

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

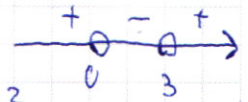
7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| |x-3|} \leq 0$

при $x \in [3; +\infty)$:

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + x(x-3)} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{5x^2 - 15x} \leq 0 / \cdot 5 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{x(x-3)} \leq 0$$

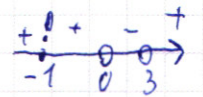


при $x \in [1; 3)$:

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + x(3-x)} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{3x^2 - 9x} \leq 0 / \cdot 3 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{x(x-3)} \leq 0 \Rightarrow x \in [1; 3)$$

при $x \in [0; 1)$:

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4(1-x)}{4x^2 - 12x + x(3-x)} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x + 1}{3x^2 - 9x} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{x(x-3)} \leq 0 \Rightarrow x \in [0; 1)$$



при $x \in (-\infty; 0)$:

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4(1-x)}{4x^2 - 12x - x(3-x)} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{5x^2 - 15x} \leq 0 / \cdot 5 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{x(x-3)} \leq 0 \Rightarrow x \in \{-1\}$$

Итого ответ: $x \in \{-1\} \cup (0; 3)$

③ $\begin{cases} y - 2x = \sqrt{x^2 + y^2} & (1) \\ 2y + x^2 = 9 & (2) \end{cases}$

$2y + x^2 = 9$

из (1) $y = \sqrt{x^2 + y^2} + 2x$; подставляем в (2):

$$\frac{9 + x^2}{2} - 2x = \sqrt{x^2 + \left(\frac{9 + x^2}{2} + 2x\right)^2}$$

$$\frac{x^2 - 4x + 9}{2} = \sqrt{\frac{9x^2 - x^4}{2}} \Rightarrow \frac{(x^2 + 4x - 9)^2}{4} = \frac{9x^2 - x^4}{2}$$

$$4x^3 + 8x^2 + 16x - 18(x^2 + 4x) + 81 = 18x - 2x^2$$

Возведем (1) в квадрат:

$$y^2 - 5y + 4x^2 = 0 \quad | : x^2$$

$$\frac{y^2}{x^2} - 5 \frac{y}{x} + 4 = 0$$

$$\frac{y}{x} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x \\ y = x \end{cases}$$

Заметим, если $y = x$, то $x - 2x = \sqrt{x^2} \Rightarrow -x = |x| \Rightarrow x < 0$ (3)

если $y = 4x$, то $2x = 2|x| \Rightarrow x > 0$ (4)

подставим $\begin{cases} y = x \\ y = 4x \end{cases}$ в (2):

$$x^2 + 2x - 9 = 0$$

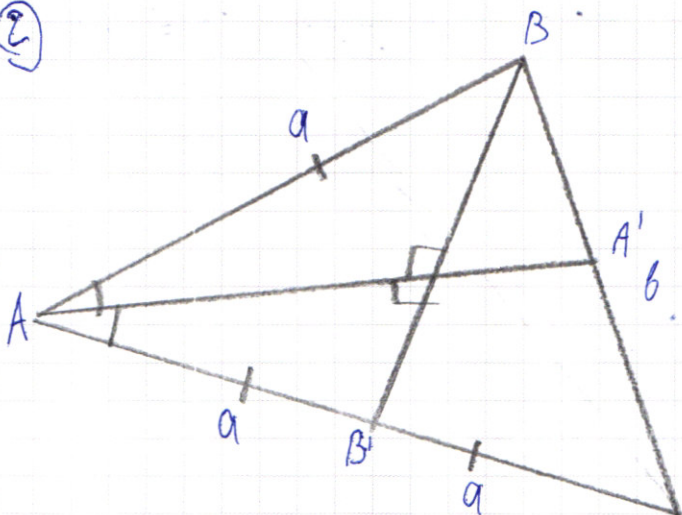
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 9}}{2} = \begin{cases} -1 + \sqrt{10} & \text{не подходит из (3)} \\ -1 - \sqrt{10} & \Rightarrow y = -1 - \sqrt{10} \end{cases}$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot 9}}{2} = \frac{-8 \pm 10}{2} = \begin{cases} -9 & \text{не подходит из (4)} \\ 1 & \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

Ответ: $(1; 4); (-1 - \sqrt{10}; -1 - \sqrt{10})$

2)



BB' - медиана; AA' - биссектриса

$\Delta ABB'$ - п/б (т.к. в нем биссектриса совпадает с высотой) $\Rightarrow AB = AB' = B'C$

$$\text{Из } AB = a \text{ и } BC = b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = 3a + b = 300; \quad (1)$$

из неравенства т.к. $ABC - \Delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b > 2a \\ a + 2a > b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > a \\ 3a > b \end{cases}$$

$$\text{с из (1): } b = 300 - 3a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a > 300 - 3a \Rightarrow a > 50 \\ 300 - 3a > a \Rightarrow a < 75 \end{cases} \quad ; \text{ т.к. } a \in \mathbb{N} \Rightarrow a \in (50; 75) \cup \mathbb{N} \Rightarrow a \text{ принимает } 24 \text{ различных значения}$$

Ответ: 24

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7) Заметим:

$$f(x) = f(x/y) + f(y) \quad (\text{по св-вам функции})$$

↓

$$f(x/y) = f(x) - f(y) < 0 \quad (1)$$

Заметим, что:

$$\begin{aligned} f(3) = \underline{3}, f(4) = \underline{4}, f(2) + f(2) = \underline{4}, f(5) = \underline{5}, f(6) = f(2) + f(3) = \underline{5}, f(7) = \underline{7}, \\ f(8) = f(4) + f(2) = \underline{6}, f(9) = f(3) + f(3) = \underline{6}, f(10) = f(2) + f(5) = \underline{7}, \\ f(11) = \underline{11}, f(12) = f(6) + f(2) = \underline{7}, f(13) = \underline{13}, f(14) = f(2) + f(7) = \underline{9}, \\ f(15) = f(3) + f(5) = \underline{8}, f(16) = f(8) + f(2) = \underline{8}, f(17) = \underline{17}, f(18) = f(9) + \\ + f(2) = \underline{8}, f(19) = \underline{19} \end{aligned}$$

при $x=3$ y принимает 16 значений

при $x=4$ 15 значений

при $x=5$ 13 значений

при $x=6$ 13 знач.

при $x=7$ 8 знач.

при $x=8$ 11 знач.

при $x=9$ 11 знач.

при $x=10$ 8 знач.

при $x=11$ 3 знач.

при $x=12$ 8 знач.

при $x=13$ 2 знач.

при $x=14$ 4 знач.

при $x=15$ 5 знач.

при $x=16$ 5 знач.

при $x=17$ 1 знач.

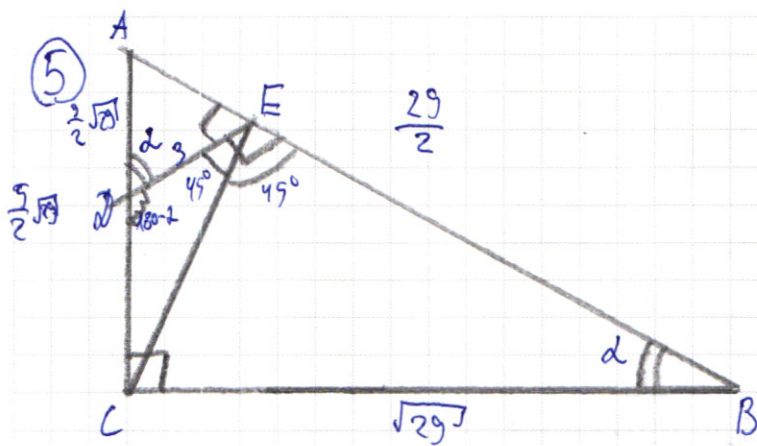
при $x=18$ 5 знач.

при $x=19$ 0 знач.

итого, кол-во пар:

$$\begin{aligned} 16 + 15 + 13 + 13 + \underline{8} + 11 + 11 + \\ + \underline{8} + \underline{3} + \underline{8} + \underline{2} + \underline{4} + \underline{5} + \underline{5} + \underline{1} + \underline{5} = \\ = 31 + 26 + 24 + 22 + 25 = \\ = \del{128} 128 \end{aligned}$$

Ответ: ~~152~~ 128



$$AC = \frac{5}{2} \sqrt{29}; BC = \sqrt{29}; \angle CED = 45^\circ;$$

$$DE \perp AB$$

по Т. Пифагора:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB = \sqrt{\frac{25}{4} \cdot 29 + 29} = \sqrt{29} \cdot \frac{\sqrt{29}}{2} = \frac{29}{2};$$

$$\sin \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{5}{2} \sqrt{29} \cdot 2}{29} = \frac{5}{\sqrt{29}};$$

по Т. синусов в $\triangle CBE$:

$$\frac{BC}{\sin 45^\circ} = \frac{CE}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{\sqrt{29} \cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{CE \cdot \sqrt{2}}{5} \Rightarrow CE = \frac{10}{\sqrt{2}}$$

по Т. синусов $\triangle CDE$:

$$\frac{CD}{\sin 45^\circ} = \frac{CE}{\sin_{180-\alpha}} \quad (\angle EDC = 180 - \angle CBE, \text{ т.к. } DEBC - \text{четырёхугольник и}$$

$$\angle DEB = \angle DCB = 90^\circ); \sin \alpha = \sin_{180-\alpha};$$

$$\frac{2CD}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}}} \Rightarrow CD = \frac{10 \sqrt{29}}{5 \cdot 2} = \sqrt{29} \Rightarrow AD = AC - CD = 1,5 \sqrt{29} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{1,5 \sqrt{29}}{2,5 \sqrt{29}} = \frac{3}{5};$$

$$\angle ADE = 180^\circ - \angle EDC = \alpha \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC \text{ (по двум углам)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}; \quad \frac{AD}{AB} = \frac{1,5 \sqrt{29} \cdot 2}{29} = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

$$DE = BC \cdot \frac{AD}{AB} = \sqrt{29} \cdot \frac{3}{\sqrt{29}} = 3$$

$$AE = AC \cdot \frac{AD}{AB} = 2,5 \sqrt{29} \cdot \frac{3}{\sqrt{29}} = 7,5$$

$$S_{AED} = \frac{DE \cdot AE}{2} = \frac{3 \cdot 7,5}{2} = \frac{22,5}{2} = 11,25$$

$$\text{Ответ: } \frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}; S_{AED} = 11,25$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3) y = \frac{9-x^2}{2}$$

$$\frac{9-x^2}{2} - 2x = \sqrt{x \frac{9-x^2}{2}}$$

$$\frac{-x^2 - 4x + 9}{2} = \sqrt{x \frac{9-x^2}{2}} \quad / \cdot 2$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{(x^2 + 4x - 9)^2}{4} &= \frac{9x - x^3}{2} \\ -(x^2 + 4x - 9) &\geq 0 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 18 \\ \hline 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 27 \\ \hline 3 \\ \hline 81 \end{array}$$

$$x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 2 \cdot 9 \cdot (x^2 + 4x) + 81 = 18x - 2x^3$$

$$x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 18x^2 - 72x + 81 - 18x + 2x^3 = 0$$

$$x^4 + 10x^3 - 2x^2 - 90x + 81 = 0$$

$$16 + 80 + 81 - 180 - 8$$

$$81 + 270 - 2 \cdot 9 - 270 + 81$$

$$\left\{ \begin{aligned} y - 2x = 0 &\Rightarrow y = 2x \\ y^2 - 4xy + 4x^2 - xy = 0 \end{aligned} \right.$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0 \quad / : x^2$$

$$\frac{y^2}{x^2} - 5 \frac{y}{x} + 4 = 0 \quad \left] t = \frac{y}{x} \right.$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 & y = 4x \\ 1 & y = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x - 2x &= \sqrt{x^2} \\ x - \sqrt{x^2} &= -x \pm |x| \\ x < 0 \end{aligned}$$

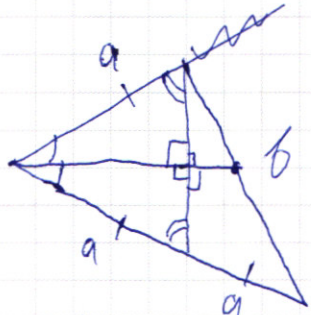
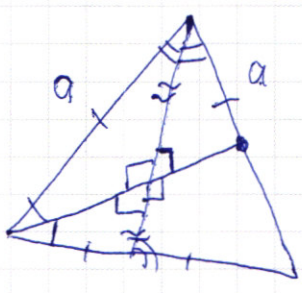
$$x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 9}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2} = \begin{cases} \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{1} \\ \frac{-1 - \sqrt{10}}{1} \end{cases}$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot 9}}{2} = \frac{-8 \pm 10}{2} = \begin{cases} -9 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -36 \\ y = 4 \end{cases}$$

2)



$$3a + b = 300$$

$$3a + b = 4$$

$$b = 300 - 3a$$

$$\begin{cases} 3a > 300 - 3a \Rightarrow 6a > 300 \Rightarrow a > 50 \\ 300 - 3a > a \Rightarrow 4a < 300 \Rightarrow a < 75 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3a > b \\ a + b > 2a \\ b > a \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 300 & 4 \\ \hline 28 & 45 \\ -20 & \\ \hline 20 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$10 + 10 + 5 = 25$$

51, 52, 53, 54, ..., 75

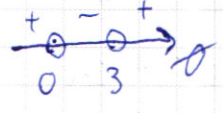
1) ~~Задача~~

$$4x(x-3) + |x||x-3| =$$

$x \geq 3$:

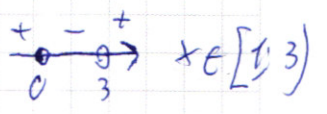
$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x^2 + x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{4x^2 - 12x^2 + x^2 - 3x} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{5x^2 - 15x} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \leq 0$$



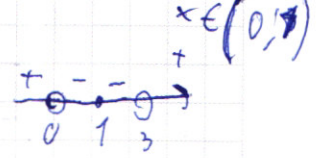
$x \in [1; 3)$:

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + x(3-x)} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{3x^2 - 9x} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{x(x-3)} \leq 0$$



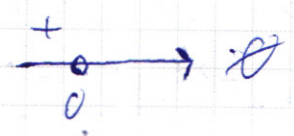
$x \in [0; 1)$:

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4(1-x)}{4x^2 - 12x + x(3-x)} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x + 1}{x(x-3)} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{x(x-3)} \leq 0$$



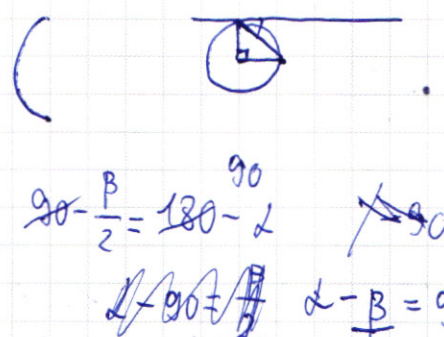
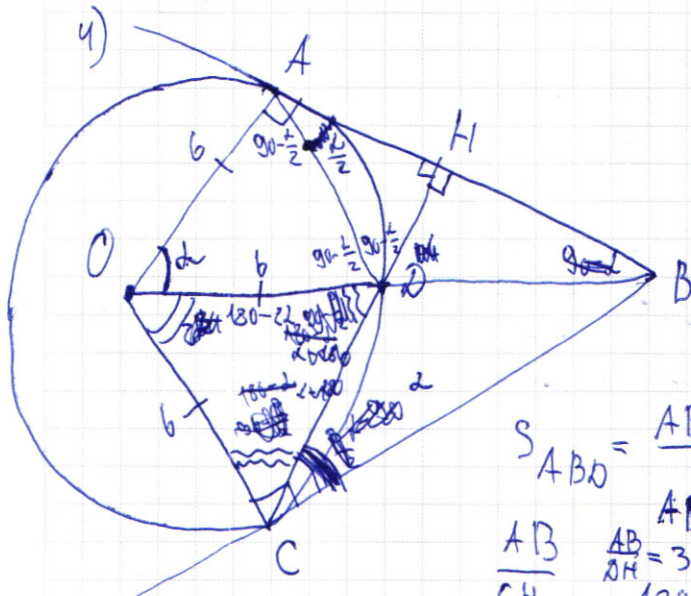
$x \in (-\infty; 0)$:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{4x^2 - 12x - x(3-x)} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{5x^2 - 15x} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{x(x-3)} \leq 0$$



$x \in (0; 3)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$90 - \frac{\beta}{2} = 180 - \alpha$$

$$\alpha - \frac{\beta}{2} = 90$$

$$\beta = \frac{(\alpha - 90) \cdot 2}{1} = 2\alpha - 180$$

$$90 - \frac{\beta}{2} = 90 - \alpha +$$

$$S_{ABO} = \frac{AB \cdot DH}{2} = 15$$

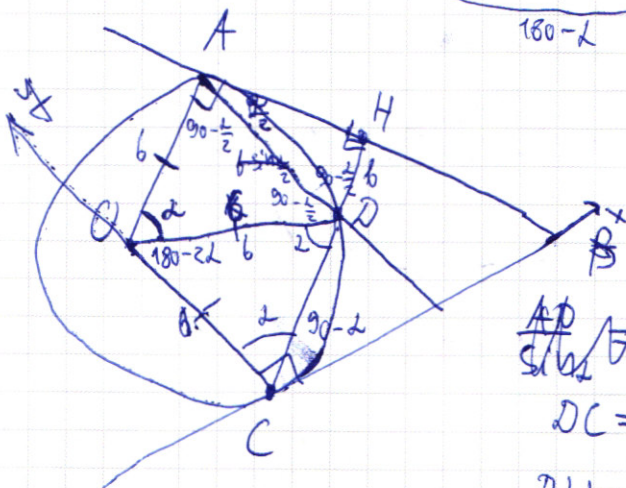
$$AB \cdot DH = 30$$

$$\frac{AB}{CH}$$

$$\frac{AB}{DH} = 30$$

$$180 - 360 + 2\alpha = 2\alpha - 180$$

$$180 - (90 - \frac{\alpha}{2} + 90 - \frac{\alpha}{2}) = \alpha$$



$$AB \cdot DH = 30$$

$$AB \cdot (DH + DC)$$

$$AD = \sqrt{36 + 36 - 2 \cdot 36 \cdot \cos 2\alpha} = 6\sqrt{2 - 2\cos 2\alpha}$$

$$DC = 6\sqrt{2 - 2\cos 2(90 - \alpha)}$$

$$DH = AD \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 6 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{2 - 2\cos 2\alpha}$$

$$12 \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \sqrt{2 - 2\cos 2\alpha}$$

$$DC^2 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot DC \cdot \cos 2\alpha = 36$$

$$DC(DC - 12 \cos 2\alpha) = 0$$

$$DC = 12 \cos 2\alpha$$

$$\frac{CE}{\sin_{180-d}} = \frac{CD}{\sin_{45^\circ}}$$

$$\frac{2.5}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{29} = \frac{CD \cdot 2}{\sqrt{2}}$$

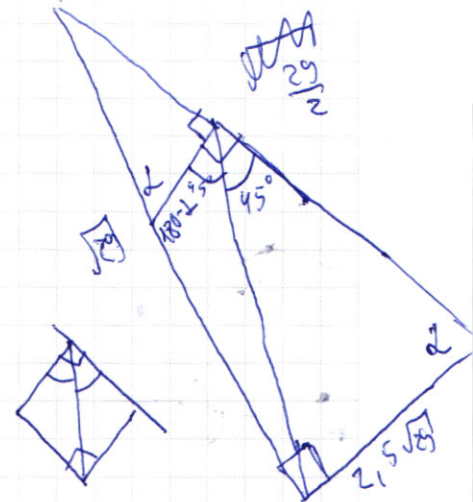
$$CD = \frac{5 \cdot \sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{5 \cdot \sqrt{29}}{2\sqrt{2}} = \frac{2CD}{\sqrt{2}}$$

$$CD = 2.5\sqrt{29}$$

$$\frac{2.5}{\sqrt{2}} = \frac{CD}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{29} = \frac{2CD}{\sqrt{2}}$$



f) $f\left(\frac{1}{y}\right)$

$$f(1) = 0$$

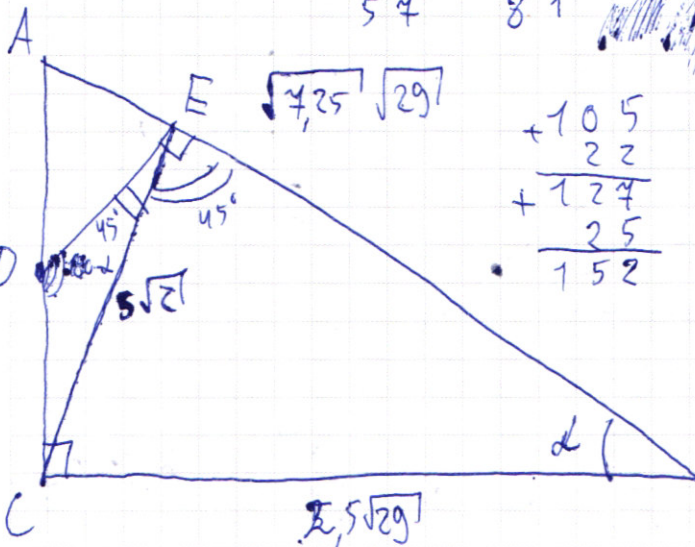
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(-1) + f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{10}{20}\right) = f(2) = 2$$

$$f(1) = f(-1) + f(-1) = 0 \quad f(a) = f(-a)$$

$$f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) \quad f\left(y \cdot \frac{x}{y}\right) = f(x)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

$$\begin{array}{r} +31 \\ \hline 26 \\ \hline 54 \end{array} \quad \begin{array}{r} +57 \\ \hline 24 \\ \hline 81 \end{array} \quad \begin{array}{r} +81 \\ \hline 24 \\ \hline 105 \end{array}$$



$$f(3) = 3; f(4) = 4; f(5) = 5; f(6) = 5;$$

$$f(7) = 7; f(8) = 8; f(9) = 6; f(10) = 4;$$

$$f(11) = 11; f(12) = 4; f(13) = 13; f(14) = 9;$$

$$f(15) = 8; f(16) = 8; f(17) = 17; f(18) = 8;$$

$$f(19) = 19$$

$$16 + 15 + 13 + 13 + 8 + 10 + 10 + 8 + 3 + 7 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1$$

$$16 + 15 + (13 + 13) + 8 + (11 + 11) + 13$$

$$+ 8 + 3 + (8) + 2 + 4 + (5 + 5) +$$

$$+ 1 + (5) + 0 = 16 + 15 + 13 \cdot 2 + 8 \cdot 3 +$$

$$+ 11 \cdot 2 + 3 + 2 + 3 \cdot 5$$

$$\sqrt{1+25^2} \cdot \sqrt{29} = \sqrt{725} \cdot \sqrt{29}$$

$$\sin_x = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{725} \cdot \sqrt{29}} = \frac{1}{\sqrt{725}}$$

$$CE \cdot \sqrt{725} = \frac{2.5 \sqrt{29}}{\sqrt{2}} \cdot 2$$

$$CE = \frac{5 \sqrt{29}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{725}} = \frac{5 \sqrt{29}}{\sqrt{145}} = \frac{5 \sqrt{2} \cdot \sqrt{145}}{\sqrt{145}} = 5\sqrt{2}$$

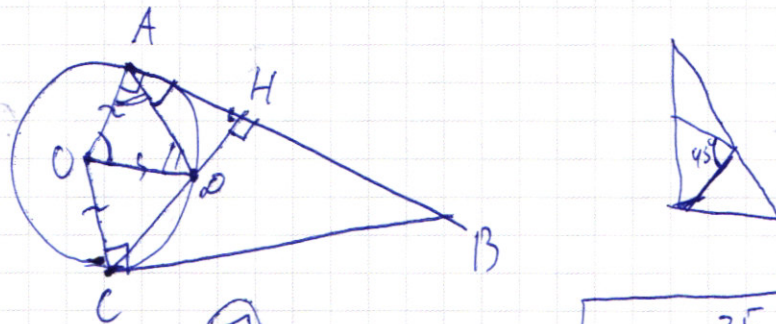
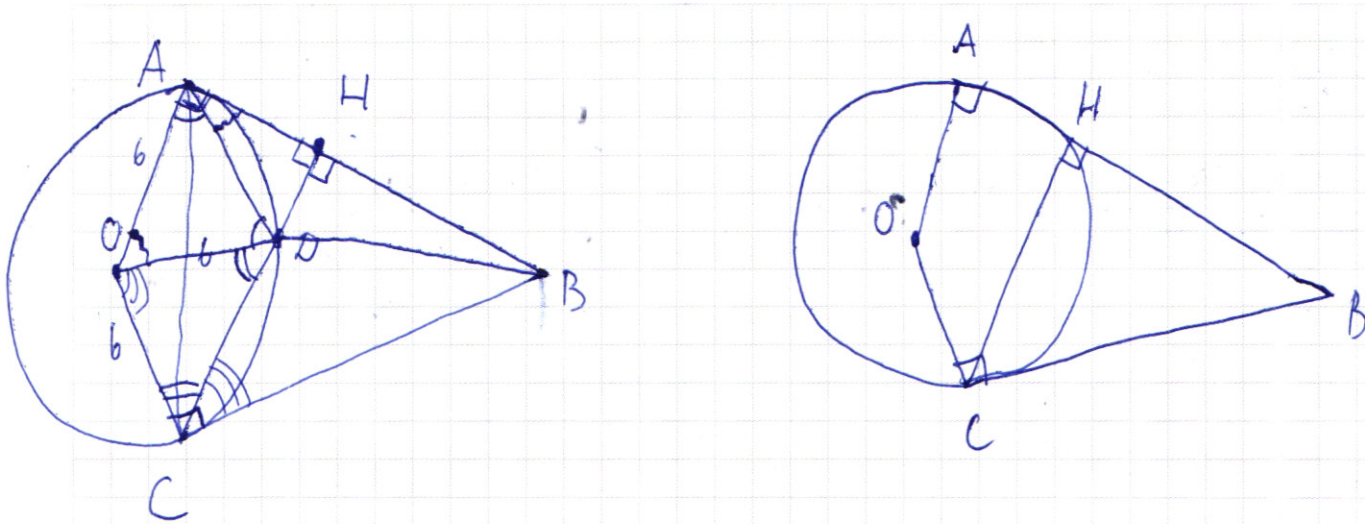
$$5\sqrt{2} \cdot \sqrt{725} = 2CD$$

$$10\sqrt{725} = 2CD$$

$$CD = 5\sqrt{725}$$

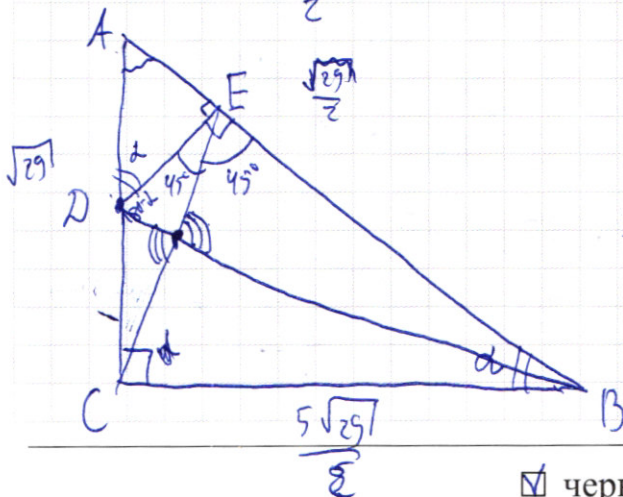
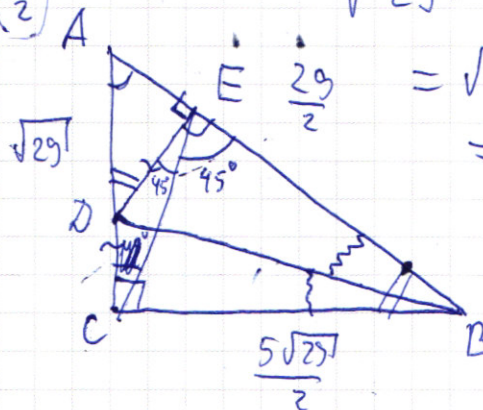
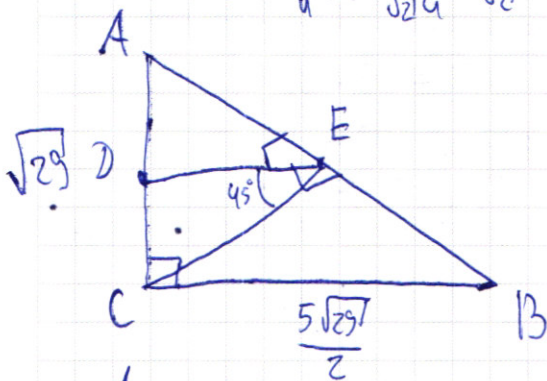
$$AD = \sqrt{29} - 5\sqrt{725} = \sqrt{4 \cdot 725} = 2\sqrt{725}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{a}{a} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} &\sqrt{29 + \frac{25}{4} \cdot 29} = \\ &= \sqrt{29} \cdot \sqrt{1 + \frac{25}{4}} = \\ &= \frac{\sqrt{29} \cdot \sqrt{29}}{2} = \frac{29}{2} \end{aligned}$$



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}} \cdot 2 = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{29}}$$

$$\frac{\frac{5\sqrt{29}}{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{CE}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{5\sqrt{29}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{CE \cdot \sqrt{29}}{2}$$

$$CE = 2 \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}}$$