

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках S и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.

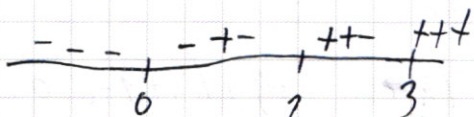
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

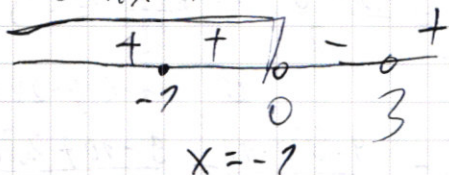
7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

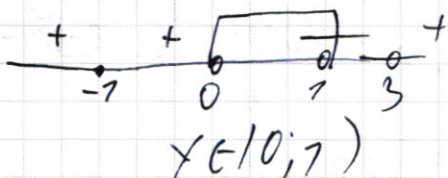
$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 72x + |x| \cdot |x-3|} \leq 0 \Leftrightarrow$$



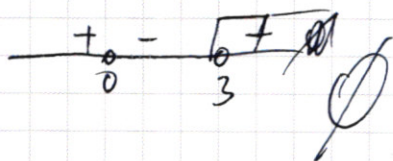
$$1. \frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \leq 0 \quad x < 0$$



$$2. \frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \leq 0 \quad 0 \leq x < 1$$



$$4. \frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \leq 0 \quad x \geq 3$$



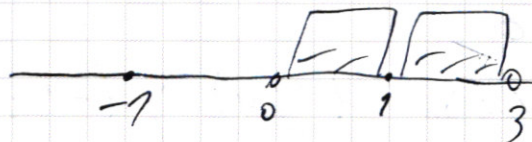
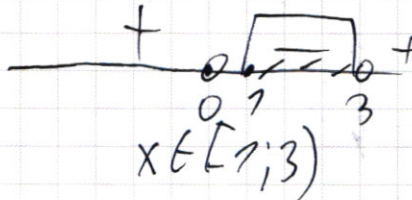
$$1. \frac{x^2 - 2x + 5 + 4x - 4}{5x^2 - 15x} \leq 0, \quad x < 0$$

$$2. \frac{x^2 + 2x + 1}{3x^2 - 9x} \leq 0 \quad 0 \leq x < 1$$

$$3. \frac{x^2 - 6x + 9}{3x^2 - 9x} \leq 0 \quad 1 \leq x < 3$$

$$4. \frac{x^2 - 6x + 9}{5x^2 - 15x} \leq 0, \quad x \geq 3$$

$$3. \frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \leq 0 \quad 1 \leq x < 3$$



Ответ: $x \in (0; 3) \cup [-1]$

№3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \Rightarrow \text{м.к. } \sqrt{xy} \geq 0, \text{ то } y-2x \geq 0, \text{ значит можно} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \text{ обе части возвести в квадрат}$$

$$(y-2x)^2 = xy \Rightarrow 4x^2 - 5xy + y^2 = 0 \quad xy \geq 0$$

$$y = \frac{9-x^2}{2} \Rightarrow 4x^2 - \frac{5x(9-x^2)}{2} + \frac{(9-x^2)^2}{4} = 0 / 4$$

$$16x^2 - 90x + 10x^3 + 81 - 18x^2 + x^4 = 0$$

$$x^4 + 70x^3 - 2x^2 - 90x + 81 = 0 \quad (x-1)(x+9)(x+1-\sqrt{70})(x+1+\sqrt{70})=0$$

$$1 \quad 10 \quad -2 \quad -90 \quad 81$$

$$y_1 = 4 \text{ при } x=1$$

$$1 \quad 1 \quad 17 \quad 9 \quad -81 \quad 0$$

$$y_2 = \frac{9-81}{2} = \frac{-72}{2} = -36$$

$$x^3 + 17x^2 + 9x - 81$$

∅ м.к. $y-2x \geq 0$

$$1 \quad 17 \quad 9 \quad -81$$

$$y_3 = \frac{9-(\sqrt{70}-1)^2}{2} = \frac{9-10+2\sqrt{70}-1}{2} =$$

$$-9 \quad 1 \quad 2 \quad -9 \quad 0$$

$$= -1 + \sqrt{70} \quad \text{м.к. } -1 + \sqrt{70} = 2(-1 + \sqrt{70})$$

$$x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$D = 4 + 36 = 40$$

$$y_4 = \frac{9-(\sqrt{70}+1)^2}{2} = \frac{9-\sqrt{70}-2\sqrt{70}-1}{2}$$

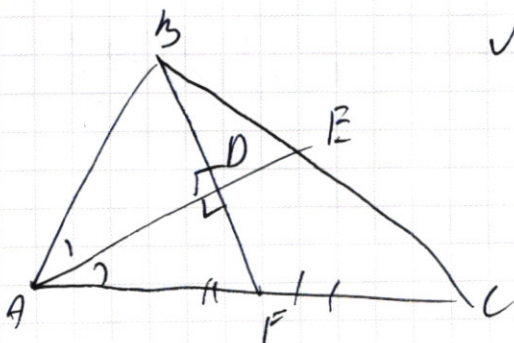
$$x_1 = -1 + \sqrt{10}$$

$$= -1 - \sqrt{70}$$

$$x_2 = -1 - \sqrt{10}$$

Ответ: $(1; 4); (-1 - \sqrt{10}; -1 - \sqrt{70})$.

№2.



Дано:

AE - бис-са

BF - медиана

$\angle ABC = 30^\circ$ $AE \perp BF$

$\triangle ABD = \triangle ADF$ по 2 углам и $N_{ТР}$ стороне

AD - общая

$\angle BAD = \angle DAF$ м.к. AE - бис-са

$\angle ADF = \angle ADB = 90^\circ \Rightarrow AB = \frac{1}{2} AC$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$AB + \frac{1}{2}AB + BC = 300$$

$$AB = 200 - \frac{2}{3}BC$$

$$BC : 3$$

$$BC < AB + \frac{1}{2}AB$$

$$BC < 200 - \frac{2}{3}BC + 100 - \frac{1}{3}BC$$

$$2BC < 300$$

$$BC < 150$$

$$AB < BC + \frac{1}{2}AB$$

$$200 - \frac{2}{3}BC < BC + 100 - \frac{1}{3}BC$$

$$100 < \frac{4}{3}BC$$

$$BC > 75$$

III. к. $BC > 75$ $75 < BC < 150$ и $BC : 3$ т.е. и

BC - целое число, то ~~число~~ число, удовлетворяющее условию, - 74

III. к. для 1 в.с. - мы можем провести 24 медианы, на всей длине в треугольнике 3, то $N_{\text{треугольников}} = 24 \cdot 3 \cdot 2 = 144$

Ответ: 144

WS.

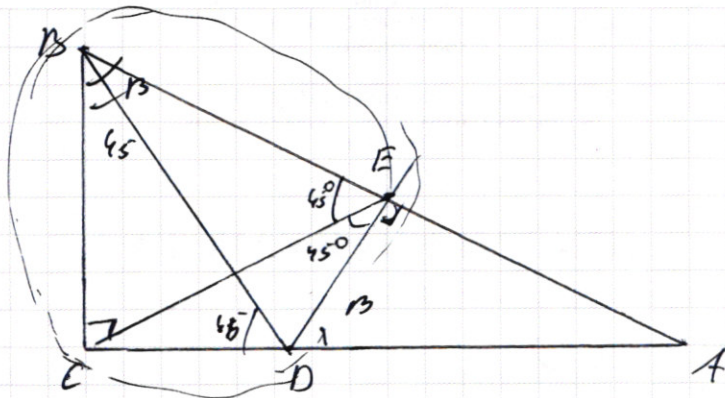
Дано:

$$DE \perp AB \\ AC = \sqrt{29}$$

$$AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

$$\angle CED = 45^\circ$$

$$\frac{AD}{AC} = S_{AED}$$



III. к. $\angle CED = 45^\circ$ и $DE \perp AB$, то $\angle CEB = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ$

м. к. ~~$\angle CBE + \angle BCD + \angle BED = 180^\circ$~~ , то B, C, D, E - вписанный четырехугольник $\Rightarrow \angle CBD = 45^\circ = \angle CDB$ - вписанные $\angle CBD = \angle CED$ и $\angle CDB = \angle CEB$ - вписанные углы, которые опираются на тугу.

$\triangle CBD$ - равнобедренный по призмке $\angle CBD = \angle CDB = 45^\circ$

$$CD = CB = \sqrt{29}$$

$$\angle CBA = \beta$$

~~$AD = CD + A$~~ $AD + DC = AC$

$$AD = \frac{5\sqrt{29}}{2} - \sqrt{29} = \frac{3\sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\angle CBE + \angle CDE = 180^\circ$$

$$\angle EDA = 180^\circ - \angle CDE = \beta$$

$\triangle ABC \sim \triangle AED$ по двум углам

$$\angle CAB = \angle EDA = \beta \quad \angle DEA = 90^\circ = \angle BCA$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} \quad \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$$

~~$AB^2 = BC^2 + AC^2 = 29$~~

$$AE = \frac{AC \cdot AD}{AB} = \frac{5\sqrt{29} \cdot 3\sqrt{29}}{2 \cdot 29} = \frac{15}{2}$$

$$DE^2 = AD^2 - AE^2 = \frac{36}{4}$$

$$DE = \frac{6}{2} = 3$$

$$S_{AED} = \frac{15}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{45}{4} \quad \text{Ответ: } 0,6; \frac{45}{4} = \frac{15}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{ED}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

$$\beta = 35^\circ - \beta$$

$$AE^2 + ED^2 = AD^2$$

$$AE = \frac{AD \cdot AC}{AB}$$

$$\beta = 45^\circ$$

$$\frac{AD^2 + AC^2}{AB^2} +$$

$$\frac{BC^2 \cdot AD^2}{AB^2} = AD^2$$

$$ED = \frac{BC \cdot AD}{AB}$$

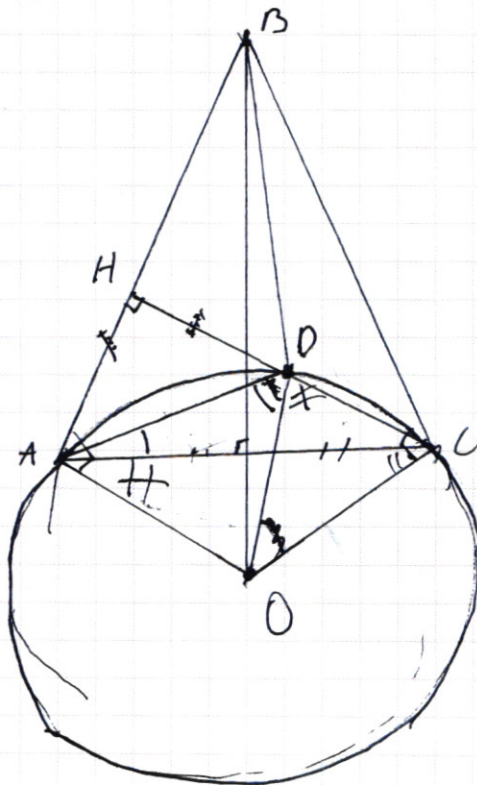
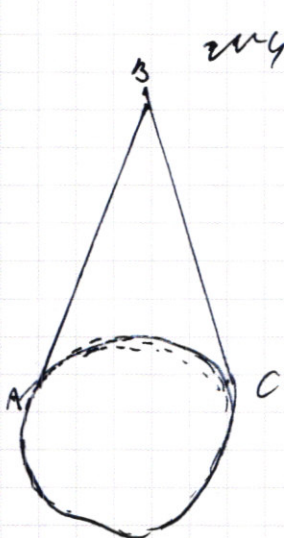
$$780 -$$

$$90$$

$$\beta = 180 - \beta - 45 = 735 - \beta$$

$$90 - 735 + \beta = \beta - 45$$

$$\beta = 6 \quad \beta - 45 + 45 + 90 + x = 780$$



$$x^2 - 2x + 7 - 1 + y^2 - 3y + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = 0$$

$$(3x + 12y) + 16 - 3x - 2y = 6$$

$$6 - 3x - 2y = 0 \quad y = 3 - \frac{3}{2}x + 10$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy} \\ 2y+x^2 = 9 \end{cases}$$

$$(y-2x)^2 = xy$$

$$2y+x^2 = 9$$

$$y = \frac{9-x^2}{2}$$

$$y = \sqrt{xy} + 2x$$

$$2y+x^2 = 9$$

$$y^2 - 4yx + 4x^2 = xy$$

$$4x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$$

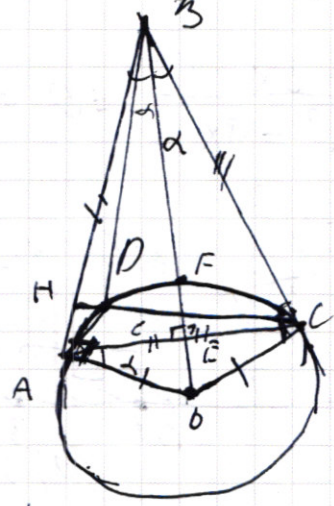
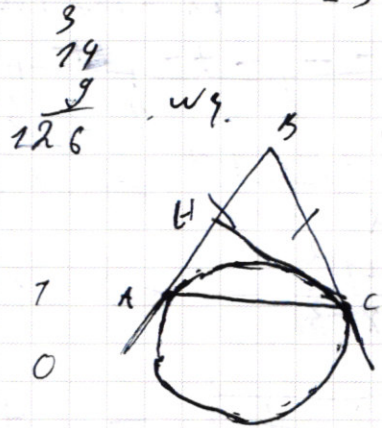
$$8x^2 - 5x(9-x^2) + (9-x^2)^2 = 0$$

$$8x^2 - 45x + 5x^3 + (x^2-9)^2 = 0$$

$$-8x^2 - 45x + 5x^3 + x^4 - 18x^2 + 87 = 0$$

$$= x^4 + 5x^3 - 26x^2 - 45x + 87 = 0$$

1	+5	-20	-45	+87
3	8	14	-3	
-3	1	2	-16	
9	1	14	176	
-9	1	-4	26	



$$\frac{AB}{CH} \cdot S_{ABH} = 15$$

$$r = 6$$

$$AB^2 = BO^2 - AO^2$$

$$AB^2 = (BO-r)(BO+r)$$

$$BO^2 - rBO = BO^2 - r^2$$

$$\frac{BC}{r} = \frac{BE}{C}$$

$$S_{ABD} = \frac{HD \cdot AB}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{CH \cdot AB}{2}$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}}$$

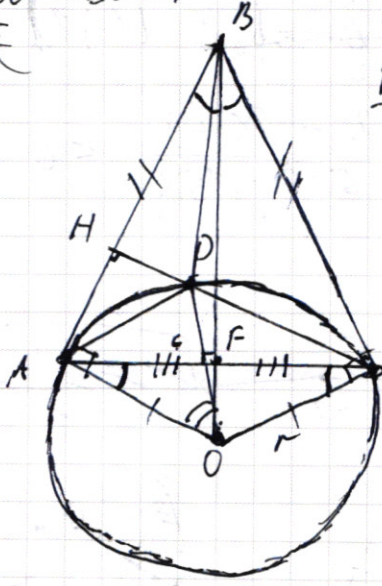
$$AB = BC$$

$$\frac{BO}{r} = \frac{AB}{C} = \sqrt{14}$$

$$AB^2 = BO^2 - r^2$$

$$\frac{C}{r} = \frac{AB}{BO}$$

$$\frac{BO}{r} = \frac{AB \cdot BO}{r \cdot AB}$$



$$\frac{9 \cdot 29}{4} - \frac{15^2}{4} = DE^2$$

$$\left(\frac{2 \cdot \sqrt{29} + 15}{2} \right) \left(\frac{2 \cdot \sqrt{29} - 15}{2} \right)$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 25 \\ 75 \\ \hline 15 \\ 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ 9 \\ \hline 267 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 267 \\ 225 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$\frac{36}{4} = \frac{6}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + (x+1)(x-3)} \leq 0$

--- - - - - + - - - + + - - - + + +

0 1 3

1. $\frac{x^2 + 2x + 1}{5x^2 - 15x} \leq 0, x < 0$

2. $\frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \leq 0, x < 0$

+ + + - +

-1 0 3

Ответ: $x < 0$

1. $\frac{x^2 - 2x + 5 + 4x - 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} \leq 0, x < 0$

2. $\frac{x^2 - 2x + 5 + 4x - 4}{4x^2 - 12x - x^2 + 3x} \leq 0, 0 \leq x < 1$

3. $\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x - x^2 + 3x} \leq 0, 1 \leq x < 3$

4. $\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} \leq 0, x \geq 3$

2. $\frac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 - 9x} \leq 0, 0 \leq x < 1$

1. $\frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \leq 0, 0 \leq x < 1$

+ + + - +

-1 0 3

0; 1

3. $\frac{x^2 - 6x + 9}{3x^2 - 9x} \leq 0, 1 \leq x < 3$

1. $\frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \leq 0, 1 \leq x < 3$

+ - +

0 1 3

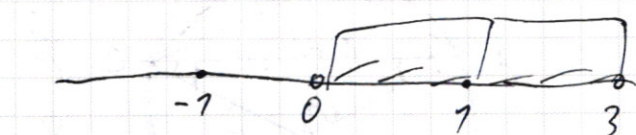
[1; 3)

4. $\frac{x^2 - 6x + 9}{5x^2 - 15x} \leq 0$

1. $\frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \leq 0, x \geq 3$

+ - +

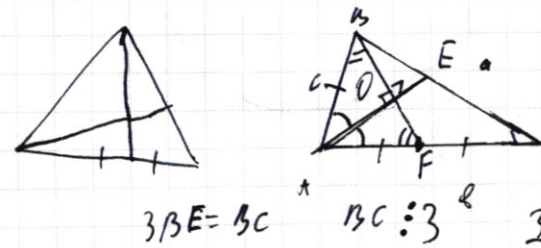
0 3



AB = 200 - $\frac{2 \cdot 50}{2 \cdot 2} = 100$

6

194



$3BE = BC$

$BC = 3$

2. $p = 300 = a + b + c$

$\frac{1}{2} b + n = 100$

$n = 100 - \frac{1}{2} b$

$BE = EC$

$\frac{1}{2} b = c$

$\frac{BE}{AB} = \frac{EC}{AC}$

$\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} b = 100 - n$

$b = 200 - 2n$

76 77 78 148 149 150

1 2 3

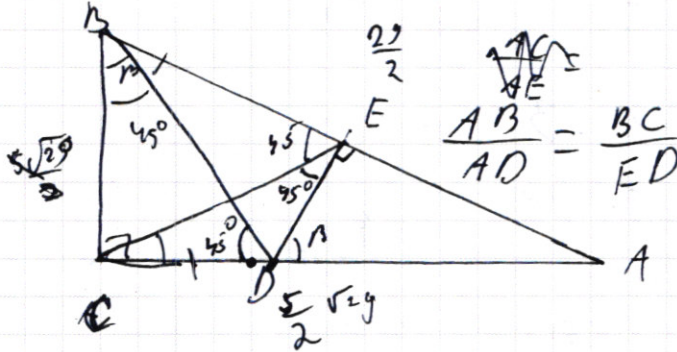
150 p 25

45 13

6 125

15

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$$

$$AC = \sqrt{2g}$$

$$BC = \frac{5\sqrt{2g}}{2}$$

$$2g + \frac{25 \cdot 2g}{4} = AB^2$$

$$2g \left(\frac{2g}{4} \right) = AB^2 -$$

$$AB = \frac{2g}{2}$$

$$\beta + \mu = 180^\circ \quad \mu = 180^\circ - \beta$$

$$AC^2 = CE^2 + AE^2 + 2 \cdot CE \cdot AE \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$BC^2 = BE^2 + CE^2 - BE \cdot CE \cdot \sqrt{2}$$

$$AC^2 = CE^2 + AE^2 + CE \cdot AE \cdot \sqrt{2}$$

$$BC^2 = (AB - AE)^2 + AE^2 + (AB - AE) \cdot CE \cdot \sqrt{2}$$

$$AC^2 - BC^2 = AB^2 + 2 \cdot AE + AB \cdot CE \cdot \sqrt{2}$$

$$180 = 180 + \beta - 45$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$$

$$AC \cdot AD = AB \cdot AE$$

$$x^2 + 2x - 9$$

$$D = 4 + 36 = 40$$

$$x_1 = \frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$

$$= -1 \pm \sqrt{10}$$

$$AC^2 - BC^2 = AB^2 + 2 \cdot AB \cdot AE + AB \cdot CE \cdot \sqrt{2}$$

$$4 - 2x = \sqrt{xy} \quad (2x - 9)^2 = xy$$

$$4x^2 - 4xy + 4^2 = xy \quad 4x^2 - 5xy + 4 = 0$$

$$2y + x^2 = 9 \quad y = \frac{9 - x^2}{2}$$

$$4x^2 - 5x \cdot \frac{9 - x^2}{2} + \frac{(9 - x^2)^2}{4}$$

$$16x^2 - 10x(9 - x^2) + (9 - x^2)^2 = 0$$

$$16x^2 - 90x + 10x^3 + 81 - 18x^2 + x^4$$

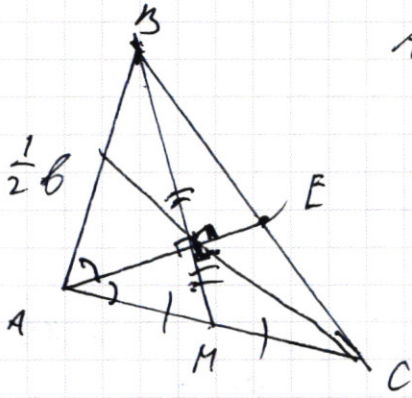
$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 90x + 81 = 0$$

$$1 + 10 \cdot \frac{9}{2} - 90 + 81 = 0$$

$$x = 1 \quad 40 \quad -2 \quad -90 \quad 81$$

$$1 \quad 1 \quad 11 \quad 9 \quad -87 \quad 0$$

$$x^3 + 11x^2 + 9x - 87$$



$$AC = b$$

$$BM = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 + 2AC^2}$$

$$\frac{BE}{AB} = \frac{CE}{AC} \quad \frac{BE}{CE} = \frac{1}{2} \quad 2BE = CE$$

$$\frac{1}{2}b + b + 3CE = 300$$

$$\frac{1}{2}b + CE = 100$$

$$b = 200 - 2CE$$

$$\frac{3}{2}b + BC = 300$$

$$b = \frac{2}{3}(300 - BC)$$

$$b = 200 - \frac{2}{3}BC$$

$$\frac{2}{3}BC = 79$$

$$80 + 4 + 4 + 3 = 37$$

$$200 - \frac{2 \cdot 79 \cdot 2}{3} = 206$$

$$57 \cdot 2 = 114$$

$$AC = 86$$

$$f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$$

$$f(p) = p$$

$$\frac{3}{5}$$

$$b < \frac{1}{2}b + BC$$

$$200 - \frac{2}{3}BC < 100 - \frac{1}{3}BC + BC$$

$$f(3) + f(5) = 3 + 5 = 8$$

$$BC \rightarrow 75$$

$$27 \cdot 3 \cdot 2 =$$



$$\frac{158}{28} \cdot 3$$

$$BC = 99$$

$$177$$

$$25$$

$$162 \overline{) 154}$$

$$104$$

$$96$$

$$48$$

$$96$$

$$48$$

$$0$$

$$104$$

$$159 \overline{) 153}$$

$$104$$

$$159$$

$$256 \overline{) 152}$$

$$106$$

$$156$$

$$100 = \frac{4}{3} BC$$

$$156$$

$$87$$

$$87 \overline{) 24}$$

$$156 \overline{) 75}$$

$$87$$