

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{1} \frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (|x-1|^2 + 4 - 4|x-1|)(4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|) \leq 0 \\ 4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (|x-1|-2)^2(4x(x-3) + |x| \cdot |x-3|) \leq 0 \\ 4x(x-3) + |x| \cdot |x-3| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1|=2 \\ 4x(x-3) + |x| \cdot |x-3| \neq 0 \end{cases}$$

$$(1) \quad 4x(x-3) + |x| \cdot |x-3| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 4x(x-3) + x(x-3) = 0 \\ 0 < x < 3 \\ 4x(x-3) - x(x-3) = 0 \\ x \geq 3 \\ 4x(x-3) + x(x-3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ [x=0] \\ [x=3] \\ 0 < x < 3 \\ [x=0] \\ [x=3] \\ x \geq 3 \\ [x=0] \\ [x=3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

Значит $x \neq \{0; 3\}$

$$\begin{cases} [x=3] \\ [x=-1] \\ x \neq \{0; 3\} \\ 4x(x-3) + |x| \cdot |x-3| < 0 \end{cases} (2)$$

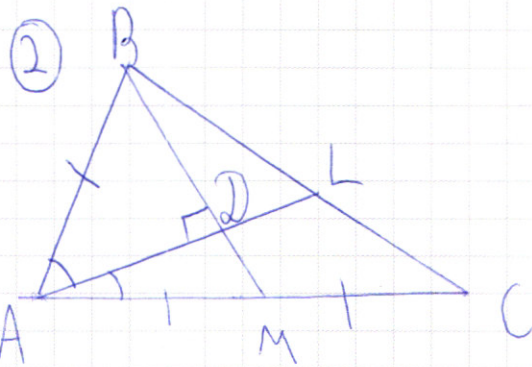
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x \in (0; 3) \end{cases} \Rightarrow x \in \{-1\} \cup (0; 3)$$

$$(2) \quad 4x(x-3) + |x| \cdot |x-3| < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 4x(x-3) + x(x-3) < 0 \\ 0 < x < 3 \\ 4x(x-3) - x(x-3) < 0 \\ x \geq 3 \\ 4x(x-3) + x(x-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x(x-3) < 0 \\ 0 < x < 3 \\ x(x-3) < 0 \\ x \geq 3 \\ x(x-3) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \{ \\ x \in (0; 3) \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow x \in (0; 3)$$

Ответ: $\{-1\} \cup (0; 3)$



Решение:

- 1) Пусть $\triangle ABC$ - такой Δ , что AL (выс.) \perp BM (мед.)
- 2) $AL \cap BM = D$ (гон. по с.р.)
- 3) BM - мед. $\triangle ABC \Rightarrow AM = MC$ (по с.р. мед. Δ)
- 4) $\triangle BAM$, AD - выс. (по п. 1), выс. (по п. 2) $\Rightarrow \triangle BAM$ - р/б (осн. BM) (по признаку р/б Δ) $\Rightarrow AB = AM$ (по с.р. р/б Δ) = MC (по п. 3)

$$5) \begin{cases} AB + AC + BC = 300 \text{ (перим.)} \\ AB + AC > BC \\ AB + BC > AC \\ AC + BC > AB \end{cases} \begin{cases} BC = 300 - 3AB \\ 3AB > BC \\ AB + BC > 2AB \\ 2AB + BC > AB \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} BC = 300 - 3AB \\ 3AB > BC \\ BC > AB \\ BC > AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3AB > 300 - 3AB > AB \\ AB \in \mathbb{N}; AB < 300 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4AB < 300 < 6AB \\ AB \in \mathbb{N}; AB < 300 \end{cases} \Rightarrow AB = \{51, 52, \dots, 73, 74\}$$

24 числа

Значит, существует 24 разл. Δ , где мед. \perp выс.

Ответ: 24 треугольника

$$\textcircled{3} \begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2x \\ xy \geq 0 \\ (y - 2x)^2 = xy \\ y = 4,5 - 0,5x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2x \\ xy \geq 0 \\ y^2 + 4x^2 - 5xy = 0 \\ y = 4,5 - 0,5x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4,5 - 0,5x^2 \geq 2x \\ x(4,5 - 0,5x^2) \geq 0 \\ (4,5 - 0,5x^2)^2 + 4x^2 - 5x(4,5 - 0,5x^2) = 0 \\ y = 4,5 - 0,5x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 9 \geq 0 \quad (3) \\ x(x-3)(x+3) \leq 0 \quad (4) \\ 0,25x^4 + 2,5x^3 - 4,5x^2 + 4x^2 - 22,5x + 4,5^2 = 0 \quad (1) \\ y = 4,5 - 0,5x^2 \end{cases}$$

$$(1) 0,25x^4 + 2,5x^3 - 0,5x^2 - 22,5x + 4,5^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 10x^3 - 2x^2 - 90x + 81 = 0$$

$$p = \pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27, \pm 81$$

$$q = \pm 1$$

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27, \pm 81;$$

$$\text{При } x = \frac{p}{q} = 1: 1 + 10 - 2 - 90 + 81 = 0$$

$$\text{При } x = \frac{p}{q} = -9: 81 \cdot 81 - 81 \cdot 90 - 81 \cdot 2 + 81 \cdot 10 + 81 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Начертим таблицу:

	1	10	-2	-90	81
1	1	11	9	-81	0
-9	1	2	-9	0	0

$$\begin{cases} x=1 \\ x=-9 \\ x^2+2x-9=0 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-9 \\ x=-1+\sqrt{10} \\ x=-1-\sqrt{10} \end{cases}$$

$$(2) D_1 = 1^2 + 9 = 10$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{10}; \quad x_2 = -1 - \sqrt{10}$$

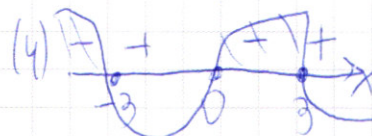
$$(3) D_1 = 4 + 9 = 13$$

$$x_3 = -2 + \sqrt{13}$$

$$x_4 = -2 - \sqrt{13}$$



$$x \in (-\infty; -2 - \sqrt{13}] \cup [-2 + \sqrt{13}; +\infty)$$



$$x \in (-\infty; -3] \cup [0; 3]$$

$$\begin{cases} y \geq 2x \\ xy \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2 - \sqrt{13}] \cup [-2 + \sqrt{13}; +\infty) \\ x \in (-\infty; -3] \cup [0; 3] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ x=-9 \\ x=-1+\sqrt{10} \\ x=-1-\sqrt{10} \end{cases}$$

$$y = 4,5 - 0,5x^2$$

$$\begin{cases} y \geq 2x \\ xy \geq 0 \\ x=1 \\ y=4 \\ x=-9 \\ y=-36 \end{cases}$$

$$y = 4,5 - 0,5(1 - 2\sqrt{10}) = -1 + \sqrt{10}$$

$$\begin{cases} x = -1 - \sqrt{10} \\ y = -1 - \sqrt{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -2 - \sqrt{13}] \cup [-2 + \sqrt{13}; +\infty) \\ x \in (-\infty; -3] \cup [0; 3] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ x=-9 \\ x=-1+\sqrt{10} \\ x=-1-\sqrt{10} \end{cases}$$

$$y = 4,5 - 0,5x^2$$

$$\begin{cases} 4 \geq 2 \\ 4 \geq 0 \\ x=1 \\ y=4 \\ x=-9 \\ y=-36 \\ -36 \geq -18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 + \sqrt{10} \\ y = -1 + \sqrt{10} \\ -1 + \sqrt{10} \geq -2 + 2\sqrt{10} \\ x = y = -1 - \sqrt{10} \leq -1 - \sqrt{10}; (1 + \sqrt{10})^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=4 \\ x=-1-\sqrt{10} \\ y=-1-\sqrt{10} \end{cases}$$

Ответ: (1; 4);
(-1 - \sqrt{10}; -1 - \sqrt{10})

$$\textcircled{7} 1) f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$2) f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{y}{y^2}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{y^2}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{y}\right) = f(y) + 2$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y); \quad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$$

3) Т.к. $x \in \mathbb{N}; y \in \mathbb{N}; 3 \leq x \leq 19; 3 \leq y \leq 19$, то $f(x)$ и $f(y)$ — суммы простых множителей, на которые раскладываются числа x и y соотв.

4) Пусть $a \in \mathbb{N}, 3 \leq a \leq 19$

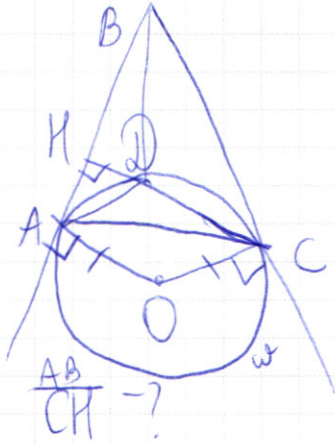
a	$f(a)$
3	3
4	4
5	5
6	5
7	7
8	6
9	6
10	7
11	11
12	7
13	13
14	9
15	8
16	8
17	17
18	8
19	19

значит, кол-во пар таких x, y , что $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ равно $16 + 15 + 13 + 12 + 11 + 2 + 8 + 3 + 5 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 128$

Ответ: 128 пар

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4



Решение:

1) ω впис. в $\angle ABC$, кас. в τ , $A_1C_1 \Rightarrow AB=BC$

2) $OA \perp AB$, $OC \perp BC$ (как рад., провед. в τ кас.)

3) $S_{\triangle ABC} = CH \cdot AB \cdot \frac{1}{2}$

$S_{\triangle ABC} = AB \cdot BC \cdot \frac{1}{2} \sin \angle ABC$

4) $S_{\triangle ABC} = 6AB - 36 \cdot \frac{1}{2} \sin \angle ABC = 6AB - 18 \sin(120^\circ - \angle ABC)$
(в ω впис. χ_{xy})

$= 6AB - 18 \sin \angle ABC$

5) Пусть $AB=BC=a$; $CH=H$;

6) $aH = 6a - 18 \sin \angle ABC \Leftrightarrow a(6-H) = 18 \sin \angle ABC$

7) $H = a \sin \angle ABC \Leftrightarrow \frac{a}{H} = \frac{1}{\sin \angle ABC}$

$\Rightarrow \frac{a}{H} = \frac{18}{a(6-H)} \Leftrightarrow 6a^2 - a^2H = 18H \Leftrightarrow H = \frac{6a^2}{a^2+18}$

$\frac{a}{H} = \frac{a^2+18}{6a}$

8) $ah = 30$; $h = \frac{1}{3}H \Rightarrow aH = 90 \Leftrightarrow H = \frac{90}{a}$

$\Rightarrow 6a^3 = a^2 + 18$

9) $OA \perp AB$, $CH \perp AB \Rightarrow OA \parallel CH$

$S_{AOCN} = \frac{OA+CH}{2} \cdot AN = 3AN + \frac{CH \cdot AN}{2}$; $6a = \frac{BH \cdot CH}{2} + S_{AOCN} = \frac{AB \cdot AN}{2} + 3AN = S_{\triangle ABC} + 3AN \Rightarrow S_{\triangle AOC} = 3AN$

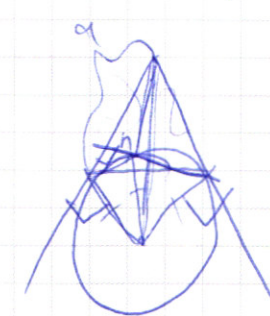
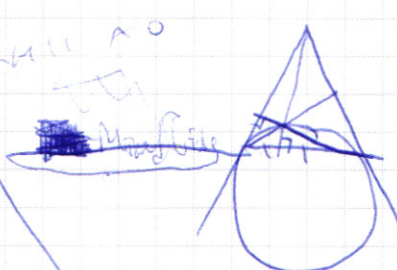
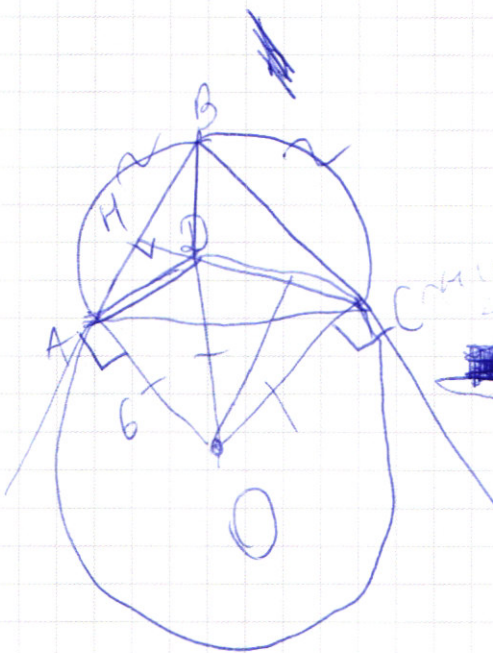


черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} |3x| + |4y| + |6-3x-2y| > 6 \\ x^2 - 2x - 3y^2 \leq 0 \end{cases}$$

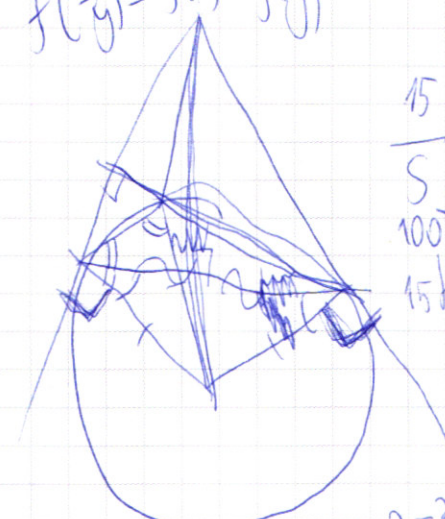
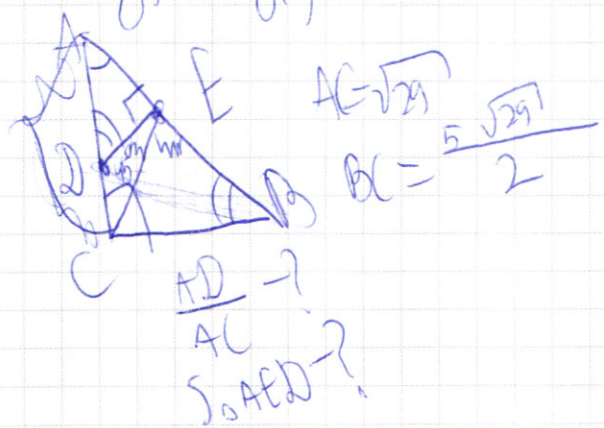
$$n \cdot a = 30$$



$$S = a \cdot H \cdot \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) + f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0 \Rightarrow f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0 \Rightarrow f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f\left(\frac{1}{y_1}\right) + f\left(\frac{1}{y_2}\right) + f\left(\frac{1}{y_3}\right) + f\left(\frac{1}{y_4}\right) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$



$$\frac{15}{S} = \frac{h}{H}$$

$$100 = 10 + 15 + 20 + 22 + 24 + 15H = h^2 a$$

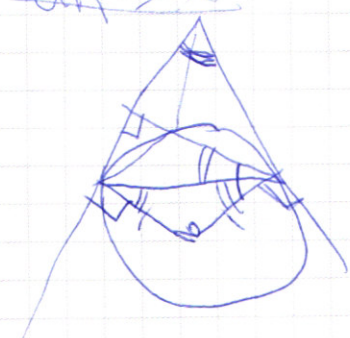
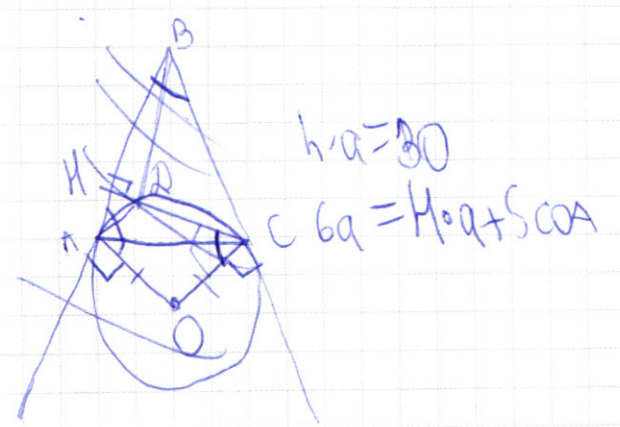
$$\frac{9}{H} = \frac{15 + 15 + 14 + 30}{h^2}$$

$$6 - 3|x| - 2|y| > |6 - 3x - 2y|$$

$$\frac{2a}{15} = \frac{6}{h}$$

$$ah = 20$$

3-3	13-13 ¹
4-4	14-9
5-5	15-8
6-5	16-8
7-7	17-17
8-6	18-8
9-6	19-8
10-7	19-19
11-11	
12-7	



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

②  $\begin{cases} c=300-3a \\ a+k=2a \Rightarrow k=a \\ m=2a+2a=4a \\ 3a \leq c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=300-3a \\ ca < 200 < 6a \\ l+l=L \\ d+0.5d=L \\ cl=2a \Rightarrow d=\frac{4}{3}l \\ d-l=h=\frac{1}{3}l=\frac{1}{6}L \end{cases}$

③ $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 2x \\ xy \geq 0 \\ y^2-4xy+x^2=xy \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 2x \\ xy \geq 0 \\ 4x^2-5xy+y^2=0 \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 2x \\ 4x^2+(4.5-0.5x)^2=50 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y \geq 2x \\ xy \geq 0 \\ 4x^2+(4.5-0.5x)^2-5x(4.5-0.5x^2)=0 \\ y=4.5-0.5x^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \\ x=-9 \\ y=-36 \\ x=-1+\sqrt{10} \\ y=4.5-0.5(-1+\sqrt{10})^2 \end{cases}$

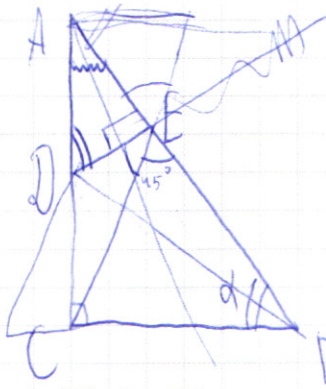
$\begin{cases} x^2-0.5x^2-4.5x^2+4.5^2-22.5x+2.5x^3=0 \\ x^4+10x^3-2x^2-90x+81=0 \end{cases}$

1	10	-2	-90	81
1	11	9	-81	0
-9	1	2	-9	0

$x^2+2x-9=0$
 $D_1=1+9=10$
 $x_1=\frac{-1+\sqrt{10}}{2}, x_2=\frac{-1-\sqrt{10}}{2}$

$37 \cdot 27^3 - 2 \cdot 27^2 - 90 \cdot 27 + 81 = 0$
 $37 \cdot 27^2 - 2 \cdot 27 - 90 + 2 = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$AC = \sqrt{29}$$

$$BC = 25\sqrt{29}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = 1$$

$$\frac{AE}{\sqrt{29}} = \frac{DE}{25\sqrt{29}} \Rightarrow DE = 25AE$$

$$\frac{a}{H} = \frac{16}{9(H-d)} \Rightarrow H-d = 18H$$

$$6a^2 = H(d-1)$$

$$AB = \sqrt{2} = \frac{CE}{\sin d}$$

$$AD = kAC \quad AC\sqrt{2} = \frac{CE}{\cos d}$$

$$AD = k\sqrt{29}$$

$$\frac{kAC}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow k = \frac{AE \cdot AB}{AC^2}$$

$$k = \frac{25}{\cos d} = \frac{1}{\sin d}$$

$$1 = \frac{kAC}{AB}$$

$$\frac{kAC}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{25BC}$$

$$\left\{ \begin{aligned} (x-1)^2 + (y-1)^2 &\leq 3,25 \\ \cos d &= 25 \sin d \end{aligned} \right.$$

$$16 - 3x - 2y > 6 - 13x - 12y$$

$$\sqrt{\cos^2 d + 6,25 \sin^2 d} \quad c) \quad AE \cdot AB = 25kAC \cdot BC$$

$$\sin d \sqrt{4,25} = 1$$

$$\sin d = \frac{\sqrt{4,25}}{4,25}$$

$$A (= 25B)$$

$$1) \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

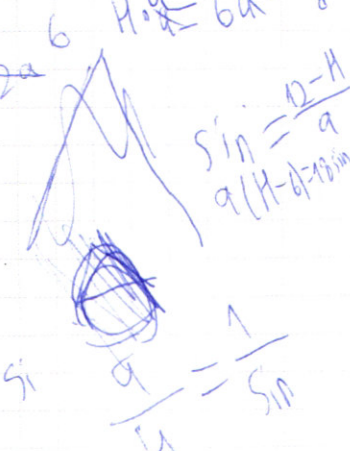
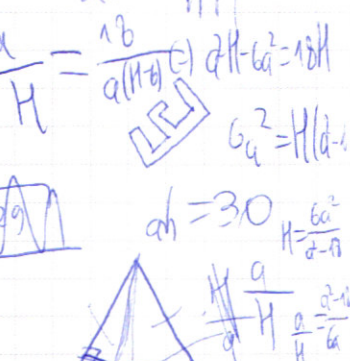
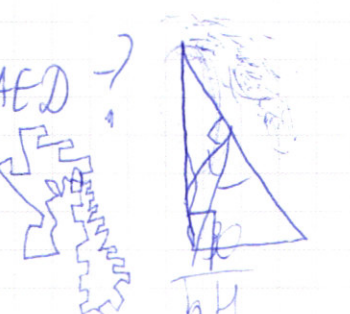
$$3) \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

$$6 - 3x - 2y > 6 + 2x + 2y \Rightarrow 6x + 4y < 0$$

$$\frac{H \cdot a}{2} = a^2 \sin$$

$$6a = \frac{BH \cdot CH}{2} + \frac{6+CH}{2} \cdot AH$$

$$H = a \sin$$





черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)