

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 16

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\left(\frac{(x-1)^2 + 9}{|x-1|} - 6 \right) (|x-3| + |x| - 3) \leq 0.$$

2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 16y^2} = 32, \\ 4y + \sqrt{x^2 - 16y^2} = 23. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN , касается стороны AB в точке A . Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь треугольника ABN , если известно, что $AB = \sqrt{5}$, $BM = 2$.
4. [5 баллов] Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается сторон AC и AB в точках E и D . Точка Y – основание перпендикуляра, опущенного из точки E на AB , а X – вторая точка пересечения EY со вписанной окружностью треугольника ABC . Найдите радиус этой окружности, если площадь треугольника AXD равна 5, а $2AD = 3EY$.
5. [5 баллов] На доске выписано $6n$ последовательных натуральных чисел ($n \in \mathbb{N}$). Из них выбираются три попарно различных числа, среди которых ровно одно кратно 2 и ровно одно кратно 3. Известно, что можно составить ровно 5 900 таких троек. Чему равно n ?

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} 4y + 7x \geq |4y - 7x|, \\ y \leq -3x + 15, \\ x^2 - 10y + y^2 + 15 \geq 0 \end{cases}$$

7. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые две последовательные степени числа десять равна 1356.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5

раз числа последовательные и их $6n$ то делимых на 3 всего $2n$, на 2 всего $3n$, на 6 всего n и делимых на 3 но не делимых на 6 всего $2n - n$ потому что все делимые на 6 делятся на 3 и делимы на 2 но не делимы на 6 всего $3n - n = 2n$, не делимых на $2, 3, 6$ всего $6n - 2n - n - n = 2n$. Теперь раз равно 1 кратно 2 и равно 1 трём то либо ~~од~~ одно число делится на 6 а два других ни на 2 ни на 3 либо одно делится на 2 но не делится на 3 , одно делится на 3 но не делится на 2 и 1 не делится на 2 ни на 3 .

В первом случае вариантов выбрать кратное 6 всего n а выбрать два различных не кратных 2 и 3 всего $\frac{2n \cdot (2n - 1)}{2} = 2n^2 - n$ и всего тогда в первом случае $n \cdot (2n^2 - n)$ вариантов, а это $2n^3 - n^2$.

Во втором случае выбрать кратное 3 всего n вариантов, кратное 2 всего $2n$ и не кратное 2 и 3 всего $2n$, и того $n \cdot 2n \cdot 2n = 4n^3$ вариантов но во втором случае, тогда суммарно $6n^3 - n^2$ вариантов

или $n^2(6n - 1)$ разность 5900 но ~~это простое~~ и получим $59 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$ а раз оно делится на n^2 то n^2 либо 1 либо 2 , либо 5 либо 10 , подставим по очереди и получим $1^2(1 \cdot 6 - 1) = 5$ $2^2(2 \cdot 6 - 1) = 44$ $5^2(5 \cdot 6 - 1) = 725$
 $10^2(10 \cdot 6 - 1) = 5900$ значит $n = 10$

Ответ: $n = 10$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7

пусть последние 4 цифры десятизначного числа это a b c d ,
тогда a степень 10 будет больше 3 или меньше по остаткам
будет меньше 1000, b больше 100 и меньше 1000 и меньшей степе-
ни ~~и так далее~~ ~~и сумма остатков~~ и сумма остатков
будет ~~и~~ меньше 1100. значит большая степень хотя бы 4
если $a = 4$ по остаткам он делится будет ~~a b c d~~ $1000a + 100b +$
 $+ 10c + d$ и $100b + 10c + d$ и в сумме $1000a + 200b + 20c + 2d$
тогда по сумма остатков оканчивается на 6 то d либо 3 либо 8
но если $d = 3$ то $2c$ делится оканчивается на 5 потому что нет перехо-
да через разряд по $2c$ четное а значит $d = 8$. Тогда $2c$ окан-
чивается на 4 и $c = 2$ либо $c = 7$ но если $c = 2$ то не будет перехода
через разряд и $2b$ оканчивается будет на 3, значит $c = 7$, и
 $2b$ оканчивается на 2, тогда $b = 1$ или $b = 6$, или $b = 1$ то
 $a = 1$ и все числа оканчивающиеся на 1178 нам подходят,
если $b = 6$ то все числа подходят оканчивающиеся на 0678, и тех
и тех всего 9 · 10 вариантов (первую цифру выбрать 9, вторую 10
вариантов) и всего тогда $2 \cdot 9 \cdot 10 = 180$.

или максимальная степень > 4 то минимальная ≥ 4 и a будет
~~и так далее~~ в сумме будет умножится на 2000 а значит $a = 0$, разряды
меньше a будут брать минимум по 10000 поэтому a максимальная
степень 10 на которую делит x то с 4 по x цифру с нуля все 0.



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № __
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1 проз.

значит x ~~66~~ потому что число с 0 не начинается, а значит $x=5$
и тогда ~~подойдут все~~ 1356 доплат равняется ~~1000 + 100 + 10 + 2 +~~
 $+ 100 + 100 + 2 = 200 + 20 + 2$ и еще так же пойти с конца
по научили до в 66 тоже самое то и с $x=4$ - что $D=8$ а $c=7$
а b тогда может быть равно только 6 а значит D и 9 разряд
 10000 тоже D но тогда числа оканчиваются на 00678
а значит мы их уже посчитали когда считали те что
оканчиваются на 0678 , и все тогда чисел 180 нам подходит.

Ответ: 180

Задача 2.

вним из первого второе и научили $x - 4y = 9$ тогда $x = 4y + 9$
подставим во второе и научили $4y + \sqrt{(4y+9)^2 - 16y^2} = 23$ тогда
 $\sqrt{16y^2 + 4y \cdot 2 \cdot 9 + 9^2 - 16y^2} = 23 - 4y$
 $\sqrt{4y \cdot 2 \cdot 9 + 9^2} = 23 - 4y$
 $\sqrt{72y + 81} = 23 - 4y$
 $72y + 81 = (23 - 4y)^2$
 $72y + 81 = 529 - 184y + 16y^2$
 $16y^2 - 256y + 448 = 0$
 $16y^2 - 256y + 1024 - 576 = 0$
 $(4y - 32)^2 = 576$
 $4y_1 - 32 = 24$ $4y_2 - 32 = -24$
 $4y_1 = 56$ $4y_2 = 8$
 $y_1 = 14$ $x_1 = 14 \cdot 4 + 9 = 65$ $y_2 = 2$ $x_2 = 2 \cdot 4 + 9 = 17$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2 прог.

$$\text{по } 65 + \sqrt{65^2 - 16 \cdot 14^2} \neq 32$$

x_1 и y_1 нам не подходят.

а x_2 и y_2 подходят.

$$x + \sqrt{x^2 - 16y^2} = 32 \quad \text{и} \quad \sqrt{4y + x^2 - 16y^2} \quad 4y + \sqrt{x^2 - 16y^2} = 23$$

$$17 + \sqrt{17^2 - 16 \cdot 2^2} = 32$$

$$4 \cdot 2 + \sqrt{17^2 - 16 \cdot 2^2} = 23$$

Ответ: $x = 17$, $y = 2$

Задача 1

$x \neq 1$ потому что $|x-1|$ стоит в знаменателе.

$$(x-1)^2 = |x-1| \cdot |x-1| \quad \text{тогда} \quad \frac{(x-1)^2 + 9}{|x-1|} - 6 = \frac{|x-1| \cdot |x-1| + 9}{|x-1|} - 6 = \frac{|x-1| \cdot |x-1| + 9 - 6|x-1|}{|x-1|} = \frac{(|x-1| - 3)^2}{|x-1|}$$

~~это всегда ≥ 0 .~~ это всегда ≥ 0 .

если $x \geq 3$

$$0 < x \leq 3$$

$x < 0$

то $|x-3| + |x| - 3 =$

$$x-3 + x-3 = 2x-6$$

$$3-x + x-3 = 0$$

$$3-x-x-3 = -2x$$

получается $x=0$ если $|x-1|-3=0$ $x=4$ или $x=-2$

или если $0 < x < 3$ и если $x < 0$ и не равен -2 то обе скобки > 0 .

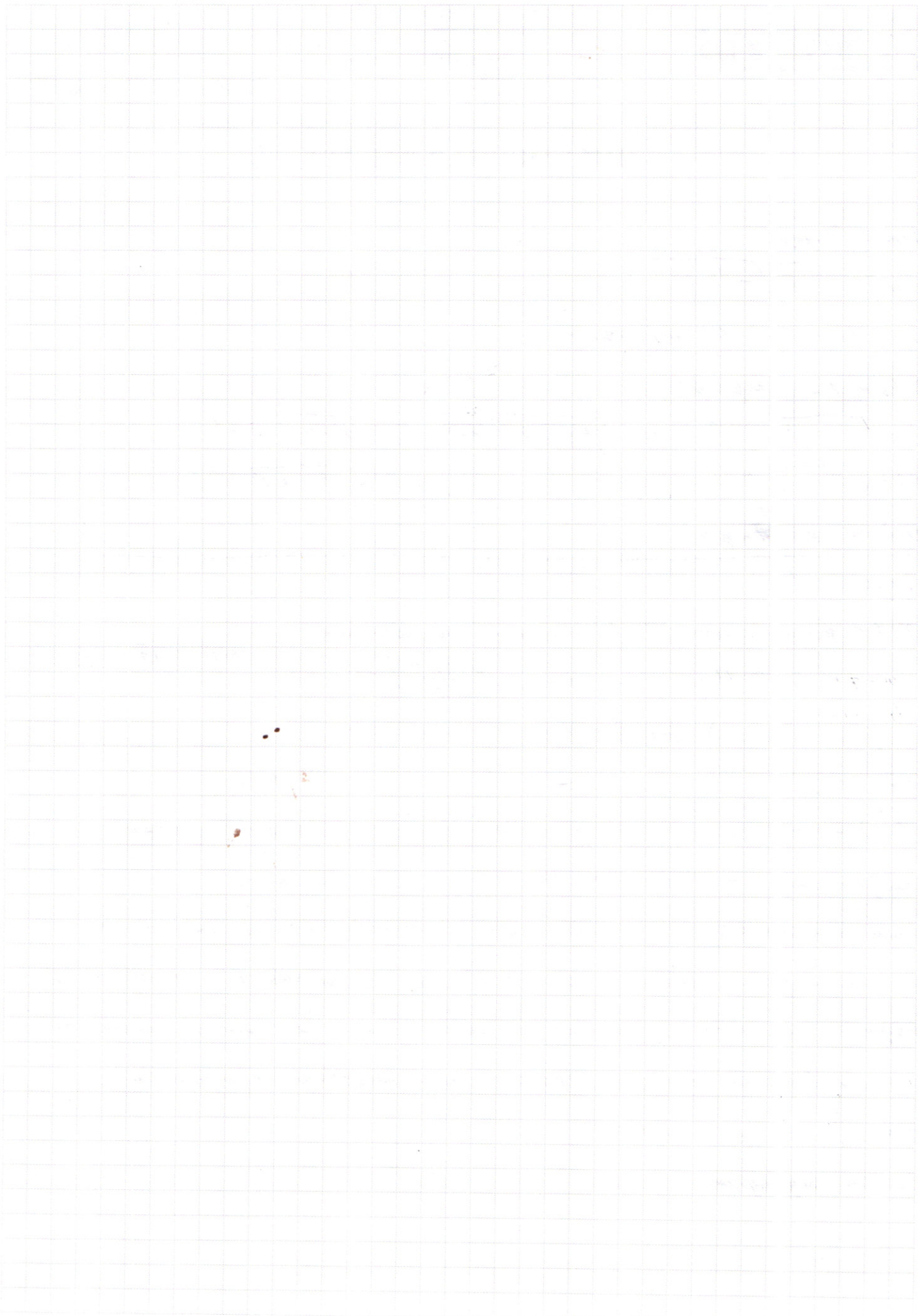
и произведение тоже. если $x \geq 3$ то $2x$ хотя бы в 6 а значит $2x-6$

всегда > 0 если $x > 3$ и значит что если $x > 3$ то и не 4 то обе скобки > 0

и произведение тоже. а значит нам подойдут только

$$x = -2 \quad 0 \leq x \leq 3 \quad \text{и} \quad x = 4.$$

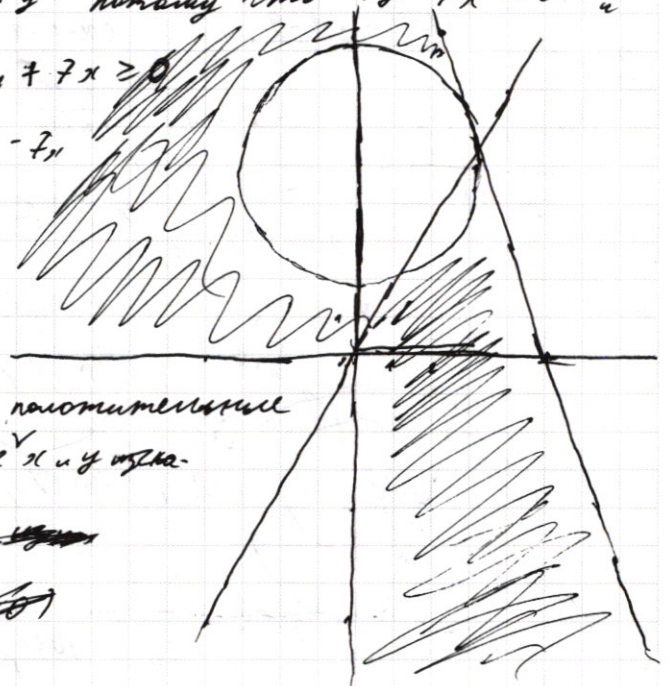
Ответ: подходят $0 \leq x \leq 3$ и $x = -2$, $x = 4$.



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

Задача 6 посмотрим на первое неравенство
 проведем прямую $4y - 7x = 0$, все что выше нее будет подходить под
 $4y + 7x \geq 4y - 7x$ потому что $4y - 7x$ будет > 0 , все что ниже
 будет подходить под $4y + 7x \geq 7x - 4y$ потому что $4y - 7x < 0$ и
 все что на прямой подходит под $4y + 7x \geq 0$
 тогда выше прямой нам подойдет $4y + 7x \geq 4y - 7x$
 или $7x \geq -7x$ т.е. все когда $x \geq 0$,
 ниже прямой $4y + 7x \geq 7x - 4y$
 и $4y \geq -4y$ подойдет все когда $y \geq 0$
 и получим что под первое подойдет все x и y положительные
~~и тогда все точки треугольника~~
 (взяв вершины и точки пересечения)



под второе подходит все что ниже прямой $y = -3x + 15$ т.е. все
 само эта прямая может рассматриваться что получается из
 первых двух неравенств фигура с вершинами в точках

а ~~под~~ 3 подходит $x^2 - 10y + y^2 + 15 \geq 0$
 $x^2 + (y - 5)^2 - 10 \geq 0$
 $x^2 + (y - 5)^2 \geq 10$ но $x^2 + (y - 5)^2 = 10$ это эллипс, окружность
 с центром в точке $(0; 5)$ и радиусом $\sqrt{10}$ а $x^2 + (y - 5)^2 \geq 10$
 это все кроме того что внутри окружности
 эллипс в эллиптической трапеции вырезает фигуру с радиусом
 по радиальной фигуре радиусом будет эллипс.

Ответ: ~~каждый деление~~
 площадь треугольника $15 \cdot 5 / 2 = 37,5$ а площадь параболы
 круг с радиусом $\sqrt{10}$ это 5π и вся площадь тогда $37,5 - 5\pi$
 Ответ: $37,5 - 5\pi$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten mathematical work on grid paper, including:

- Algebraic equations: $2x-6$, $\frac{(x-1)^2+6x-8+9}{x-1}$, $\frac{(x-1)^2+9}{(x-1)^2}$, $x-4y=0$, $x=4y+9$, $x^2+(y-5)^2-10 > 0$, $x^2+(y-5)^2 > 10$.
- Geometric diagrams: Several triangles and circles with vertices labeled A, B, C, D, E. One diagram shows a triangle with a point inside, possibly a centroid or circumcenter, with various lines and angles marked.
- Calculus/Algebra: $(x-1)^2+9=6$, $x > 7 \leq 3$, $32^2 = 1024$, $3n^2 = 5900$, $4y+7x \geq 0$, $8y \geq 0$.
- Other notes: $6n$, $7x$, $119/120$, $289-64$, 225 , 576 , 144 , 576 , 288 , 196 , 42 , 520 , 120 , $19-11$, $(19-11-3)^2$, $(19-11-3)^2$, $19-11$, $19-11$.