



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром  $O$  касается прямых  $AB$  и  $BC$  в точках  $A$  и  $C$  соответственно. Высота  $CH$  треугольника  $ABC$  пересекает эту окружность в точках  $C$  и  $D$ . Найдите отношение  $AB : CH$ , если площадь треугольника  $ABD$  равна 15, а радиус окружности равен 6.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $DE \perp AB$ . Найдите отношение  $AD : AC$  и площадь треугольника  $AED$ , если известно, что  $AC = \sqrt{29}$ ,  $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$ , а  $\angle CED = 45^\circ$ .
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами  $(x; y)$ , удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = p$  для любого простого числа  $p$ . Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $3 \leq x \leq 19$ ,  $3 \leq y \leq 19$  и  $f(x/y) < 0$ .



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\delta^{\circ} 3. \quad \begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \quad | \cdot 12 \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases} \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} xy \geq 0 \\ y - 2x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 + 4x^2 - 4xy = xy(1) / : y^2 \\ 2y + x^2 = 9 \quad (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{из (1) } \frac{4x^2}{y^2} - 5\frac{x}{y} + 1 = 0; \quad t = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow 4t^2 - 5t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \quad t = \frac{1}{4}$$

$$1) \quad t = 1 \Rightarrow \frac{x}{y} = 1 \Rightarrow x = y \Rightarrow \text{из (2): } x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$\Delta = 4 + 36 = 40 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2} = -1 \pm \sqrt{10}$$

$$y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{10}$$

Проверяем условие  $y - 2x \geq 0$ :

$$1. \quad y_1 - 2x_1 = -1 + \sqrt{10} + 2 - 2\sqrt{10} = 1 - \sqrt{10} < 0 \Rightarrow \text{не год.}$$

$$2. \quad y_2 - 2x_2 = -1 - \sqrt{10} + 2 + 2\sqrt{10} = 1 + \sqrt{10} > 0 \Rightarrow \text{год.}$$

$$2) \quad t = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{4} \Rightarrow y = 4x; \quad \text{из (2): } x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -9 \quad y_1 = -36 \quad x_2 = 1 \quad y_2 = 4$$

Проверяем условие  $y - 2x \geq 0$

$$1. \quad y_1 - 2x_1 = -36 + 18 = -18 < 0 \Rightarrow \text{не год.}$$

$$2. \quad y_2 - 2x_2 = 4 - 2 = 2 > 0 \Rightarrow \text{год.}$$

$$\text{Ответ: } (-1 - \sqrt{10}; -1 - \sqrt{10}); (1; 4)$$

$$\text{доп. } \frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} \leq 0 \quad \begin{array}{c} \text{---} \quad \text{-+} \quad \text{++} \quad \text{+++} \\ \hline 0 \quad 1 \quad 3 \end{array}$$

1)  $x \in (-\infty; 0]$ :

$$\frac{x^2 - 2x + 5 + 4x - 4}{4x(x-3) + x(x-3)} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x + 1}{5x(x-3)} \leq 0$$

~~$$\frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \leq 0 \quad \begin{array}{c} \text{+} \quad \text{+} \quad \text{+} \\ \hline -1 \quad 0 \quad 3 \end{array}$$~~

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (0; 3) \\ x \in (-\infty; 0] \end{cases} \Rightarrow \underline{x \in \emptyset}$$

2)  $x \in (0; 1]$

~~$$\frac{x^2 + 2x + 1}{4x(x-3) - x(x-3)} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \leq 0 \quad \begin{array}{c} \text{-} \quad \text{+} \quad \text{+} \\ \hline -1 \quad 0 \quad 3 \end{array}$$~~

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (0; 3) \\ x \in (0; 1] \end{cases} \Rightarrow \underline{x \in (0; 1]}$$

3)  $x \in (1; 3]$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{3x(x-3)} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 6x + 9}{3x(x-3)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \leq 0 \quad x \neq 3 \Rightarrow \frac{x-3}{3x} \leq 0 \quad \begin{array}{c} \text{+} \quad \text{---} \quad \text{+} \\ \hline 0 \quad 3 \end{array}$$

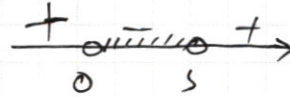
$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (0; 3) \\ x \in (1; 3] \end{cases} \Rightarrow \underline{x \in (1; 3]}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

8-1 (продолжение)

4)  $x \in (3; +\infty)$

$$\frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \leq 0 \quad x \neq 3 \Rightarrow \frac{x-3}{5x} \leq 0$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (0; 3) \\ x \in (3; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

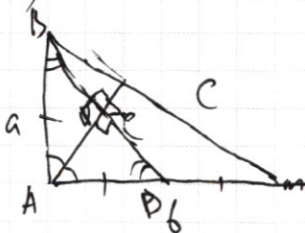
Ответ:  $x \in (0; 3)$

8/6.

~~$$\begin{cases} (x+y) + (2y) + (6-3x-2y) > 6 & (1) \\ x - 2x - 3y + y < 0 & (2) \end{cases}$$~~

Решим (1) относительно  $x$ :  $x^2$

8-2



$$a + b + c = 500 \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$\triangle ABC = \triangle ABD$  (по катету и острому углу)

$$\Rightarrow a = \frac{b}{2}$$

$$a + b \geq 150$$

$$a + c \geq 150$$

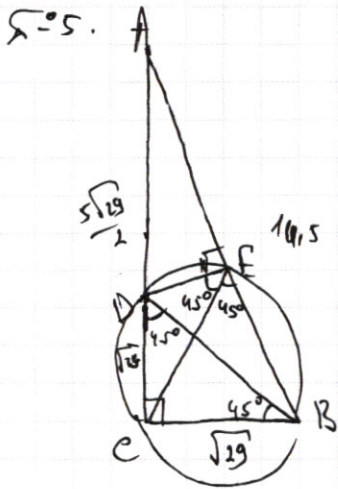
$$b + c > 150$$

$$\Rightarrow a + 2a + c = 500 \Rightarrow a + \frac{c}{2} = 100$$

$$\Rightarrow 3a > 150 \Rightarrow a > 50 \quad \cancel{a < 150} \quad b > 150 \quad c < 150$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} 2a < 150 \Rightarrow a < 75 \Rightarrow 50 < a < 75$$

$\Rightarrow$  44 варианта Ответ: 74.



$$AB = \sqrt{29 + \frac{25 \cdot 29}{4}} \approx \frac{29}{2} = 14,5$$

$\triangle ABE \sim \triangle CBA$  (по 2-м углам)

$BEDC$  - описанная, т.к.  $\angle BEC + \angle DCB = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle BDC = \angle DEC = 45^\circ$  / описанная на дугу  $BC$

$\angle CDB = \angle CDB = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle CBD - \text{р/д} \Rightarrow CB = DC = \sqrt{29}$

$$\Rightarrow AD = \frac{3\sqrt{29}}{2} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{3\sqrt{29}}{2} \cdot \frac{2}{5\sqrt{29}} = \left(\frac{3}{5}\right)$$

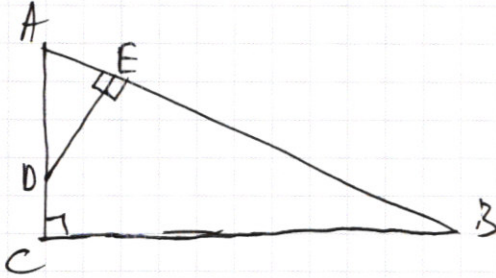
$$\triangle ADE \sim \triangle CBA \quad k = \frac{AB}{AD} = \frac{29}{2} \cdot \frac{2}{5\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{29}}{3} \Rightarrow k^2 = \frac{29}{9}$$

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{5\sqrt{29} \cdot \sqrt{29}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 29}{4}$$

$$S_{ABC} = S_{ADE} \cdot k^2 \Rightarrow S_{ADE} = \frac{5 \cdot 29}{4} \cdot \frac{9}{29} = \frac{45}{4} = 11,25$$

Ответ:  $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$ ;  $S_{ADE} = 11,25$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$AC = \sqrt{29} \quad BC = \frac{5\sqrt{29}}{2} \quad \angle CED = 45^\circ$$

$$AB = \sqrt{29 + 25 \cdot 29} = \frac{29}{2} = 14,5$$

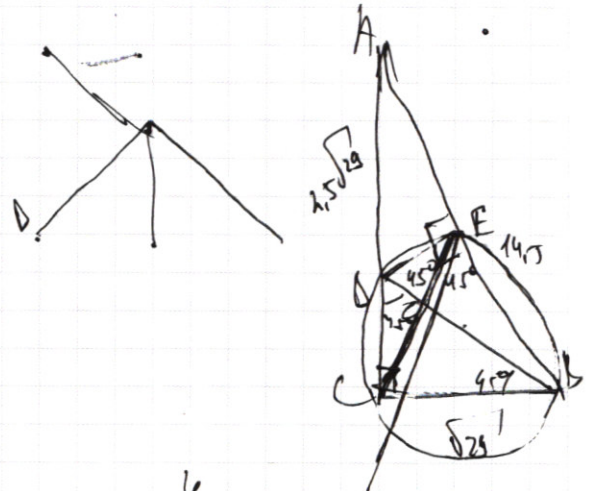
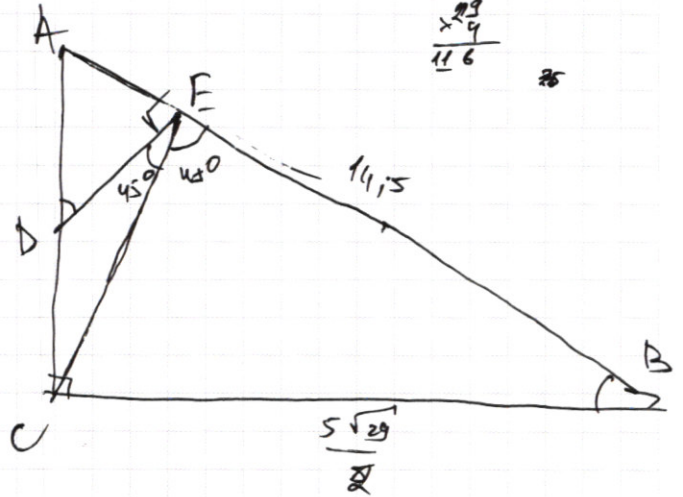
A

$$\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BC} = \frac{29 \cdot 2}{2 \cdot 5\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{29}}{5}$$

$$\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{AC} = \frac{29}{2 \cdot \sqrt{29}} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{AE}{DE} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{DE}{DO} = \frac{BE}{BO}$$



$$\frac{29 \cdot 2}{14,5}$$

11,25





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

$$AH^2 = DH \cdot CD$$

$$AB = BH + AH$$

$$AB \cdot DH = 30$$

$$\Rightarrow DH = \frac{30}{BH + AH}$$

~~$$DH = 30$$~~

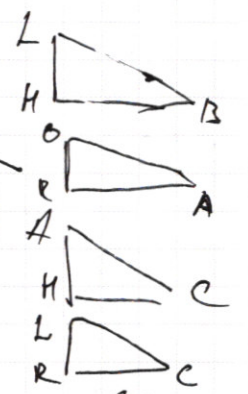
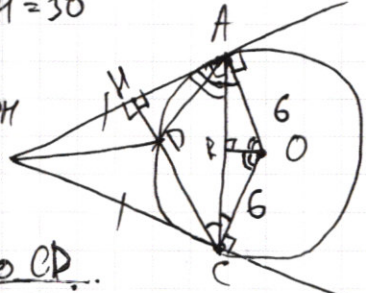
$$AH^2 = \frac{30 \cdot CD}{BH + AH}$$

$$S_{\triangle AB} = 15$$

$$r = 6$$

$$AB = BC$$

$$AO \parallel CH$$



$$\triangle AHC \sim \triangle APO$$

$$\Rightarrow \angle HAC = \angle AOR$$

~~$$\frac{CH}{x} = \frac{2x}{6}$$~~

$$CH = 2x^2$$

$$\rightarrow \triangle ABR \sim \triangle PRO$$

$$3CH = x$$

$$x = \sqrt{3CH}$$

$$AH^2 = DH \cdot CD$$

$$\triangle AHH$$

$$\frac{1}{2} AB \cdot DH = 15 \Rightarrow AB \cdot DH = 30$$

$$\frac{CH}{BR} = \frac{AB \cdot 2x}{AB} \Rightarrow CH \cdot \frac{AB}{CH} = \frac{2x}{BR}$$

$$\frac{CH}{BR} = \frac{2\sqrt{3CH}}{AB}$$

$$AB \cdot CH = 2\sqrt{3CH} \cdot BR$$

$$\frac{AB}{6} = \frac{BR}{\sqrt{3CH}}$$

~~$$AB$$~~

~~$$AB \cdot \sqrt{3CH} = BR \cdot 6$$~~

$$AB \cdot \sqrt{CH} = \sqrt{3} \cdot BR$$

$$\Delta^0 \quad x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0 \quad \Delta = 4 - 4(y^2 - 3y + 1) = 4(y^2 - 3y + 1)$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4(y^2 - 3y + 1)}}{2} = 1 \pm (y^2 - 3y + 1)$$

$$x_1 = y^2 - 3y + 2 \quad x_2 = y^2 - 3y$$

$$|3(y^2 - 3y + 2)| + |2y| + |\sqrt{-3y^2 + 9y} - \sqrt{-2y}| > 0$$

$$|3(y^2 - 3y + 2)| + |2y| + |\sqrt{3}y\sqrt{4 - 3y}|$$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} & |^2 & y^2 + 4x^2 - 4xy = xy & xy \geq 0 \\ y^2 + x^2 = 9 & & 2y + x^2 = 9 & \end{cases}$$

$$4x^2 - 5xy + y^2 = 0 \quad | :y^2 \quad 4\frac{x^2}{y^2} - 5\frac{x}{y} + 1 = 0 \quad \frac{x}{y} = t$$

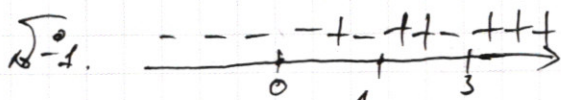
$$4t^2 - 5t + 1 = 0 \quad \Delta = 25 - 16 = 9 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{8}$$

$$t_1 = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

1)  $t = 1: \frac{x}{y} = 1 \Rightarrow x = y \Rightarrow x^2 + 2x - 9 = 0$   
 $\Delta = 4 + 36 = 40 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2} = -1 \pm \sqrt{10}$

$\Rightarrow y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{10}$

2)  $t = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{4} \Rightarrow y = 4x \Rightarrow x^2 + 8x - 9 = 0$   
 $x = -9 \quad x = 1 \quad y = -36 \quad y = 4$



1)  $x \in (-\infty; 0]$   

$$\frac{x^2 - 2x + 5 + 4x + 1}{4x^2 - 12x}$$

$\Delta = 4 - 16$   
 $a > 750 \quad b > 1000$   
 $\frac{a}{3} \leq 50 \quad c \leq 150$   
 $100 \leq 25 \quad 5^2 + 10^2 = 125$   
 $65 \cdot 3 = 195$

$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$   
 $100 < a < 150$   
 $50 < a < 150$

$3a + c = 300$   
 $a = 100 - \frac{c}{3}$   
 $a + c = 100$   
 $b = 2a$

$2(k^2 + l^2 + m^2) = a^2 + x^2 + \frac{b^2}{4}$   
 $k^2 + l^2 = a^2$   
 $l^2 + m^2 = x^2$   
 $k^2 + m^2 = \frac{b^2}{4}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)