МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 18$, $1\leqslant y\leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leq 0$$

Рассмотрим отдельно числитель этой дроби

$x^2-6x+10-2|x-3| = (x-3)^2+1-2|x-3| = (|x-3|-1)^2 \geq 0$

При $|x-3|=1$, т.е $x-3=\pm 1$ следовательно $x=4$ или $x=2$ числитель обращается в 0, но при $x=2$ знаменатель равен 0, поэтому если числитель равен 0, то $x=4$

Если числитель строго больше 0, то знаменатель отрицателен

$2x(x-2)+|x(x-2)|<0$

Если $x(x-2)<0$, то

$2x(x-2)-x(x-2)<0$

$x(x-2)<0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ x-2>0 \Rightarrow x>2 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \\ \begin{cases} x>0 \\ x-2<0 \Rightarrow x<2 \end{cases} \Rightarrow x\in(0;2) \end{array}\right.$$

Если $x(x-2)>0$, то

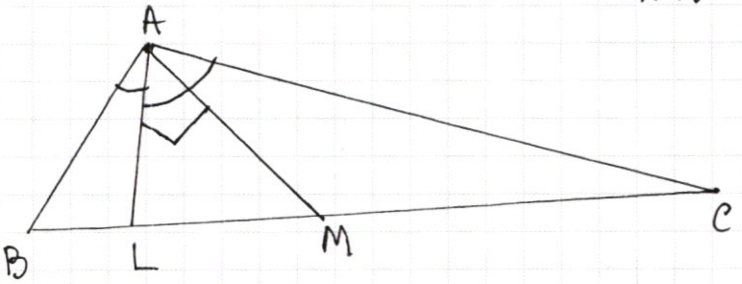
$2x(x-2)+x(x-2)<0$

$3x(x-2)<0$

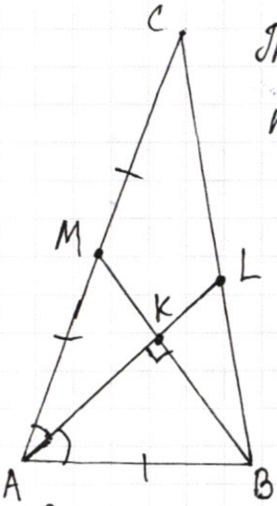
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x<0 \\ x-2>0 \Rightarrow x>2 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \\ \begin{cases} 3x>0 \\ x-2<0 \Rightarrow x<2 \end{cases} \Rightarrow x\in(0;2) \end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(0;2)\cup\{4\}$

№2



Рассмотрим один такой ΔABC. Если ~~д~~ пара таких медианы и биссектриса исходят из одной вершины* (AM и AL соответственно), то $\angle BAC = 2\angle LAC = 2\angle LAB > 2\angle LAM = 2 \cdot 90 = 180^\circ$, что невозможно.



Тогда перпендикулярны медиана и биссектриса, исходящие из разных углов (пусть, НУО, B и A соответственно). Рассмотрим ΔABM:

Пусть $BM \cap AL = K$

AK - биссектриса и высота $\Delta ABM \Rightarrow AB = AM = \frac{1}{2} AC$

Значит нужно найти кол-во Δ с целочисленными сторонами, одна из сторон которого в 2 раза больше другой. Пусть стороны таких треугольников равны x, $2x$ и y. По неравенству Δ:

$2x < x+y \Rightarrow x<y$

$y < 2x+x = 3x$

Таким образом:

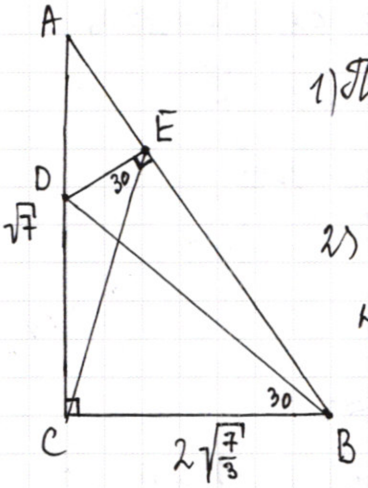
$$\begin{cases} x<y<3x \\ 3x+y=600 \end{cases} \Rightarrow 150<y<300$$

Т.к. $y \in \mathbb{N}$, то таких y существует 149, по y однозначно восстанавливаются остальные стороны треугольника

Ответ: 149

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



1) По т. Пифагора:

$$AB = \sqrt{7+\frac{28}{3}} = \sqrt{\frac{21+28}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

2) Т.к. $\angle DEB + \angle DCB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, то DEBC – вписанный по критерию вписанности $\Rightarrow \angle DEC = \angle DBC = 30^\circ$

3) $\triangle DCB$:

$$\frac{DC}{BC} = \frac{DC}{\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}} = tg\,30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow DC = \frac{2\sqrt{7}}{3}$$

4) Тогда $AD = \cancel{\ldots}\ \sqrt{7} - \frac{2\sqrt{7}}{3} = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{3}$

~~5) Т.к. CDEB – вписанный, то степень точки A относительно его описанной окружности~~

5) $\angle AED = \angle ACB = 90^\circ$
$\angle A$ – общий $\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$ по двум углам

$$k = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{21}$$

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{21}{21^2} = \frac{1}{21}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} \Rightarrow S_{ADE} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$; $S_{AED} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

№6

$$\begin{cases}|2x|+|y|+|4-2x-y|>4\\ x^2-2x-4y+y^2\leq 0\end{cases}$$

Заметим, что второе неравенство системы равносильно неравенству $(x-1)^2+(y-2)^2\leq 5$, а его задаёт ~~окружность~~ круг с центром в точке $(1;2)$ и радиусом, равным $\sqrt{5}$.

Рассмотрим первое уравнение системы и 8 случаев:

1) $$\begin{cases}2x\geq 0\\ y\geq 0\\ 4-2x-y\geq 0 \cancel{\Rightarrow 4\geq 2x+y} \;\; \cancel{4\geq 2x\geq y} \Rightarrow x\leq 2,\ y\leq 4\end{cases}$$

$2x+y+4-2x-y>4 \Rightarrow 4>4$ – не верно ни для каких x и y

2) $$\begin{cases}2x<0\\ y\geq 0\\ 4-2x-y\geq 0\end{cases}$$

$-2x+y+4-2x-y>4 \Rightarrow -4x>0$ – верно для любого $x<0$

3) $$\begin{cases}2x\geq 0\\ y\leq 0\\ 4-2x-y\geq 0\end{cases}$$

$2x-y+4-2x-y>4 \Rightarrow -2y>0$ – верно для любого $y<0$

4) $$\begin{cases}2x\geq 0\\ y\geq 0\\ 4-2x-y<0\end{cases}$$

$2x+y-4+2x+y>4 \Rightarrow 2x+y>4$

5) $$\begin{cases}2x<0\\ y<0\\ 4-2x-y\geq 0\end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение задачи 6:

$-2x-y+4\cancel{x}-2\cancel{x}-y>4 \Rightarrow -2x-y>0$ - верно для любых x и $y<0$

⑥ $\begin{cases} 2x<0 \\ y\geq 0 \\ 4-2x-y<0 \end{cases}$

$-2x+y-4+2x+y>4 \Rightarrow y>4$

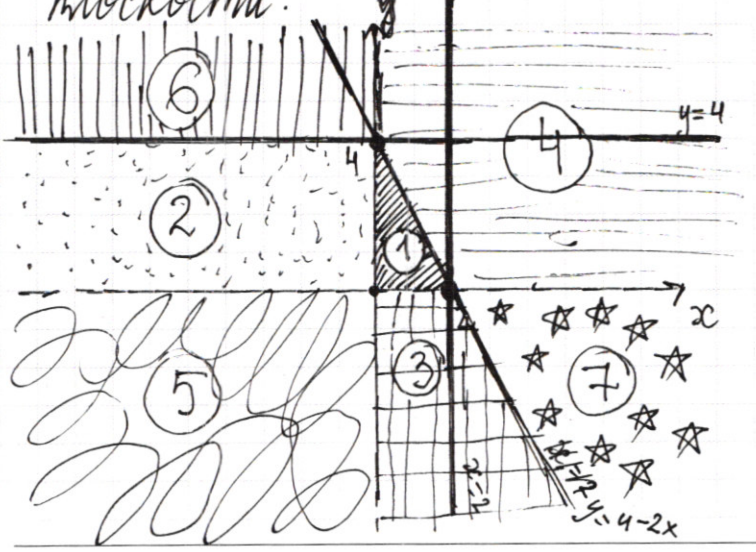
⑦ $\begin{cases} 2x\geq 0 \\ y<0 \\ 4-2x-y<0 \end{cases}$

$2x-y-4+2x+y>4 \Rightarrow x>2$

⑧ $\begin{cases} 2x<0 \\ y<0 \\ 4-2x-y<0 \end{cases}$

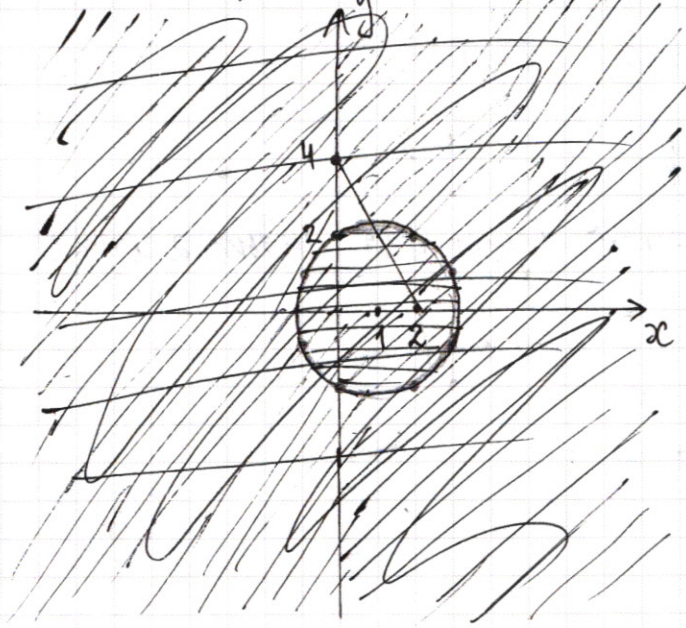
$-2x-y-4+2x+y>4 \Rightarrow -4>4$ - не верно ни для каких x и y

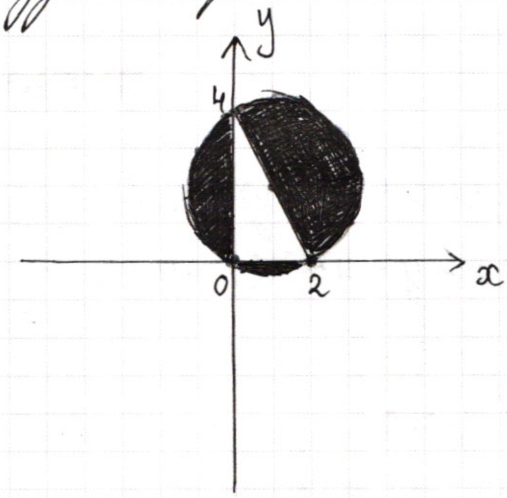
Отметим каждую из систем неравенств на координатной плоскости:



Таким образом, ~~плоскости~~ второму ~~...~~ неравенству удовлетворяет вся плоскость, кроме части заданной неравенством 1. Эта часть - треугольник с вершинами в точках $(0;0)$; $(2;0)$ и $(0;4)$

Продолжение продолжения задачи 6:
Тогда исходной системе неравенств удовлетворяет:





Окружность круга, заданного вторым неравенством системы проходит через точки $(0;0)$; $(2;0)$; $(0;4)$, т.е является описанной окружностью для треугольника с вершинами в этих точках.

Получается, площадь фигуры, удовлетворяющей исходной системе неравенств, равна площади круга с центром в т. $(1;2)$ и $r=\sqrt{5}$ минус площадь треугольника с вершинами в точках $(0;0)$; $(2;0)$ и $(0;4)$, т.е $5\pi - \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2 = 5\pi - 4 \approx 11,7$

Ответ: $\approx 11,7$ (если точно, то $5\pi - 4$)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№3

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы:

$x-2y=\sqrt{xy} \mid \uparrow^2$

$x^2-4xy+4y^2=xy$

$x^2 - 5xy+4y^2=0 \quad | : x^2$ ($x \neq 0$, т.к. из первого ур-я системы следовало бы, что $y=0 \Rightarrow x+y^2 \neq 5$)

$1-5\frac{y}{x}+4\left(\frac{y}{x}\right)^2=0$

$\frac{y}{x}=t$

$1-5t+4t^2=0$

$4t^2-5t+1=0$

$D=25-16=9$

$t_1=\frac{5+3}{8}=1$

$t_2=\frac{5-3}{8}=\frac{1}{4}$

Обратная замена:

I $\frac{y}{x}=1 \Rightarrow y=x$

$x+y^2=x+x^2=5$

$x^2+x-5=0$

$D=1+20=21$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2} \Rightarrow y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

II $\frac{y}{x}=\frac{1}{4} \Rightarrow x=4y$

$x+y^2=4y+y^2=5$

$y^2+4y-5=0$

$y_1=-5 \Rightarrow x_1=-20$; $y_2=1 \Rightarrow x_2=4$

Ответ: $\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$ и $\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$; -5 и -20; 1 и 4

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

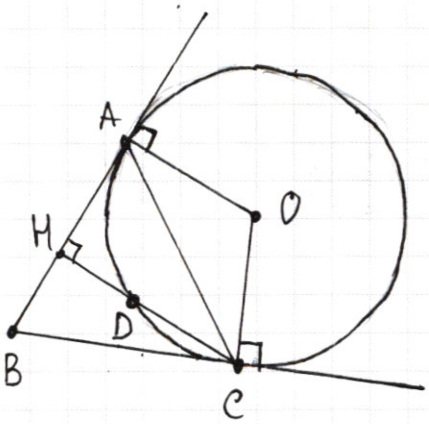
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



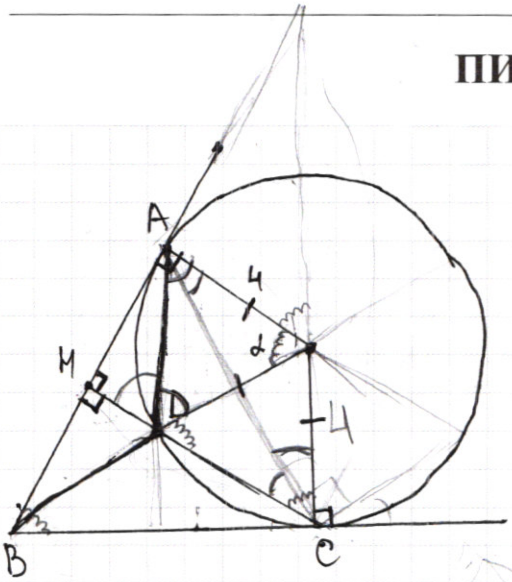
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$2x+y<4$

$S_{ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot MD=6$

$AH^2+HD^2=AD^2=$

$=4^2+4^2-2\cdot4^2\cdot\cos\alpha=$

$=32-32\cos\alpha=32(1-\cos\alpha)$

$32-32\cdot\cos\alpha$

$AH^2=AD\cdot HC$

$DC\cdot\frac{\sqrt3}{2\sqrt7}=\frac{1}{\sqrt3}\ |\cdot\sqrt3$

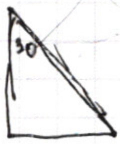
$\frac{3DC}{2\sqrt7}=1$

$DC\cdot\frac{\sqrt3}{2\sqrt7}=\sqrt3$

$DC=\frac{2\sqrt7}{3}$ $\frac{DC\sqrt3}{2\sqrt7}=\sqrt3$

$\sqrt7$

$\frac{BC}{CH}=$



$+\frac{m}{n}$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

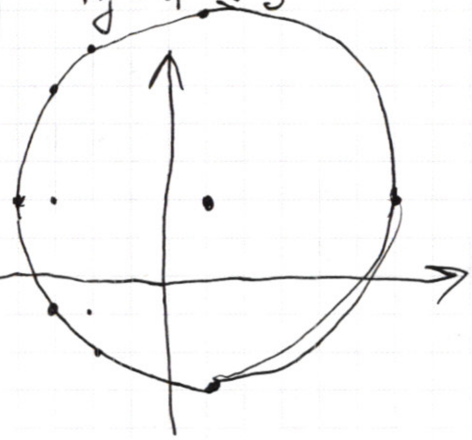
$f(p)=p$

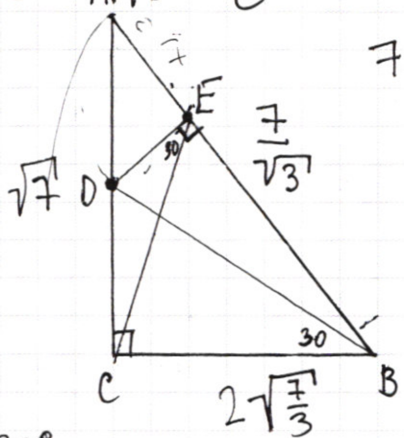
$f\left(\frac{x}{y}\right)\in\mathbb{Z}$

$(x-1)^2+(y-2)^2$

$x^2-2x+1+$

$+y^2-4y+4\le5$





$7+\frac{28}{3}=\frac{21}{3}+\frac{28}{3}=\frac{7}{\sqrt3}$

$DC=2\sqrt7$

$\frac{2\sqrt7}{\sqrt3}=\sqrt3x$

$\frac{2\sqrt7}{3}$

tg 30°

$\frac{DC}{BC}=1$

4 $4\cdot\frac{7}{3}=\frac{28}{3}$

21

$\frac{\sqrt7}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt7}$

30 45 60

$\frac{1}{2}$ $\frac{\sqrt2}{2}$ $\frac{\sqrt3}{2}$

$\frac{\sqrt3}{2}$ $\frac{\sqrt2}{2}$ $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}:\frac{\sqrt3}{2}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{}$ $\frac{7}{\sqrt3}\cdot\frac{1}{21}$

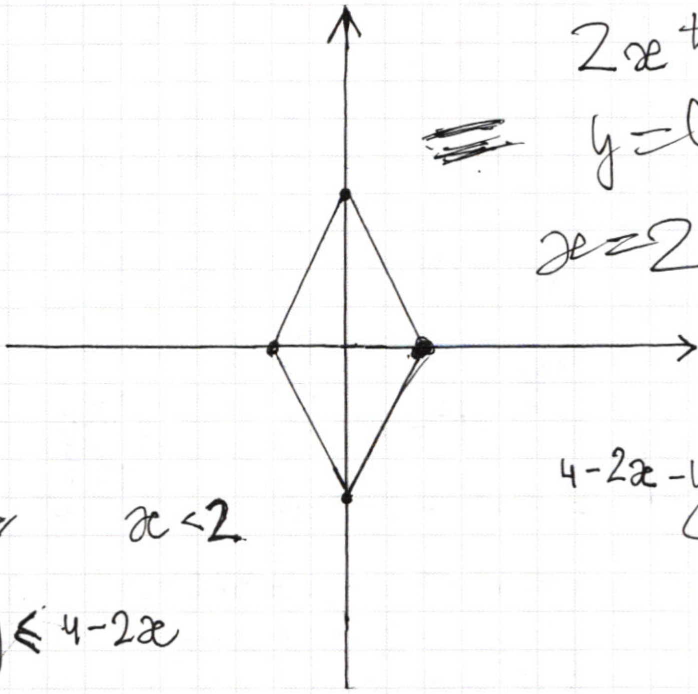
$\sqrt3$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt3}=$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt3}$

$\frac{\sqrt7\cdot\sqrt7}{3}$

$\frac{7}{21\sqrt3}=\frac{1}{3\sqrt3}$



$2x+y=4$

$y=4$

$x=2$

$$\begin{array}{r} 3{,}14 \\ \times\ 5 \\ \hline 15{,}70 \end{array}$$

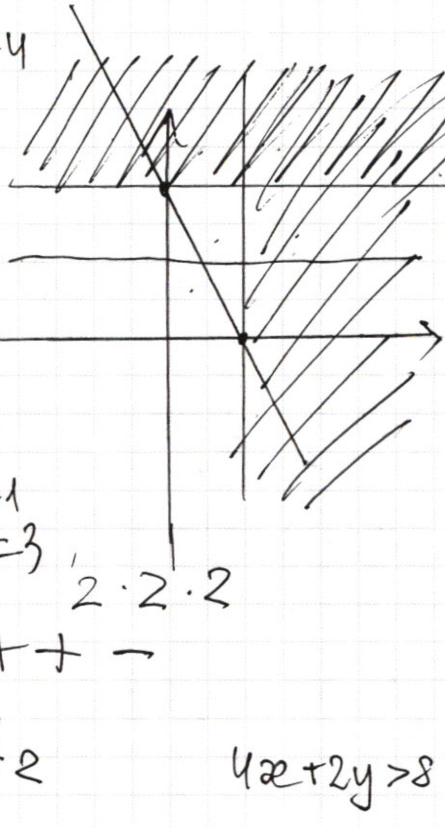
$2x+y=4$ 11,7

$4-2x-y$

$2x+y=4$

$y \geq \quad x<2$

$0 \leq y \leq 4-2x$



$4-2x-y=4$

$2x-y=0$

$2x+y=4$

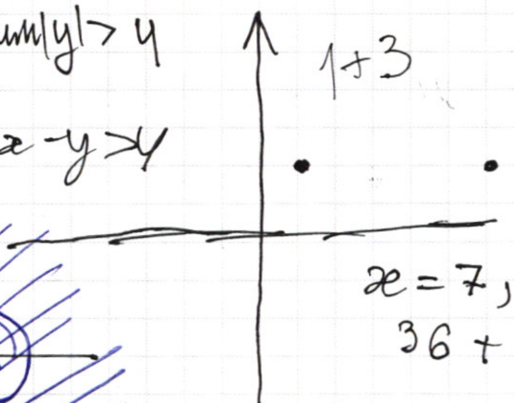
$y = 4-2x = \quad y \leq$

$|2x|+|y|+|4-2x-y|>4$

$4-2x-y=4 \quad y=4-2$

Если

$|x|>2$ или $|y|>4$



$1+3$

$x=1$

$y=3$

$2\cdot2\cdot2$

$2x+y+4-2x-y>4$

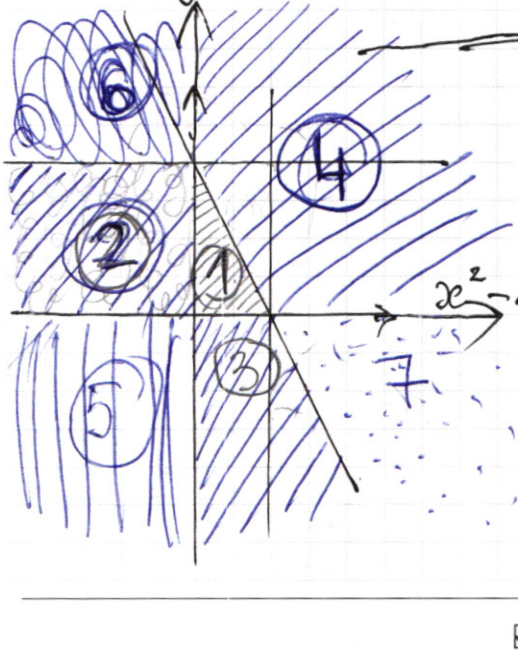
$+ \ + \ -$

$x=7,\ y=2$

$36+$

$4x+2y>8$

$2x+y>4$



$x^2-2x+\cancel{?}+y^2-4y+\cancel{?} \leq \cancel{?}\,0$

$-4x-2y>0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x||x-2|} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)^2+1-2|x-3|}{2x(x-2)+|x(x-2)|} \leq 0 \qquad = (|x-3|-1)^2$$

$$(x-3)^2+1 \geq 2\sqrt{(x-3)^2} = 2|x-3|$$

$$2x(x-2)+|x(x-2)|<0$$

если $x(x-2)<0$

$$2x(x-2)-x(x-2)<0$$

$x(x-2)<0$ $\qquad |x-3|$

$x<0$ $\qquad x-3=1 \Rightarrow x=4$

$x-2>0$ $\qquad 2.$

$2\cdot16-4\cdot4+4\cdot2$

$2\cdot4-4\cdot2.$

$$\begin{cases} x<y<3x \\ 3x+y=600 \end{cases}$$

$y<300$

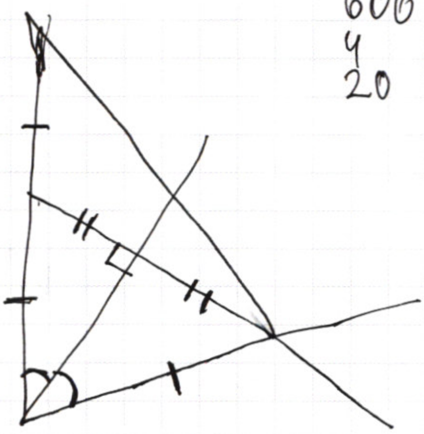
$y>150$

$\frac{600}{4}=$

$600 : 4 = 150$

$\;\;4$

$\;\;20$

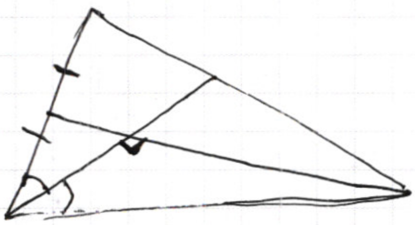


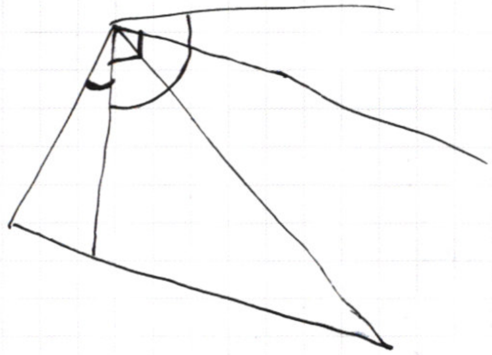
299

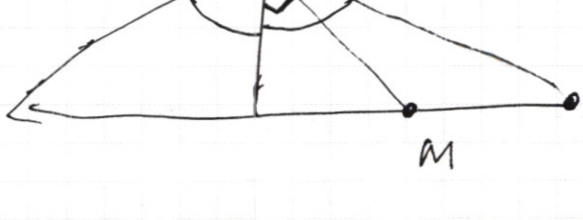
151

$299-150=$

$=149$







☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$\sqrt{x}=a$

$\sqrt{y}=b$

$2x+y^2-2y-\sqrt{xy}-5=0$

$(y-1)^2+2x-\sqrt{xy}-6=0$

$\sqrt{xy}=2$

$a^2-2b^2=ab$

$\sqrt{xy}+2y=-y^2+5$

$a^2+b^4=5$

$2a^2+b^4-2b^2=ab+5$

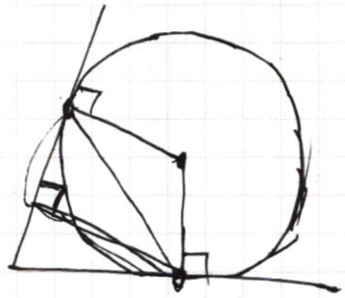
y

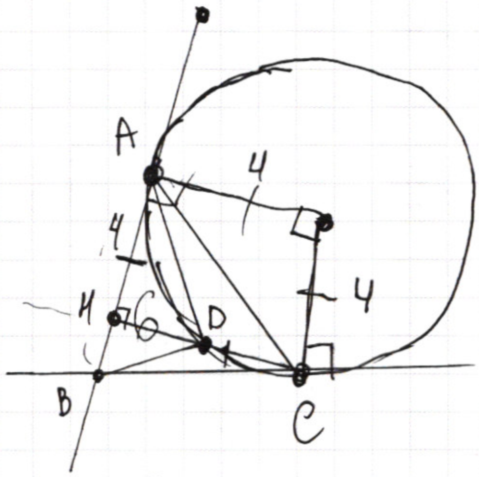
(

$y^2+2y=5-\sqrt{xy}$

$x=$

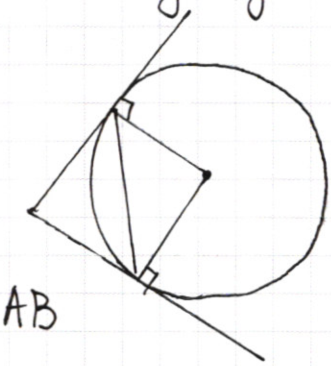
$x-y-\sqrt{xy}=y$





$x-2y$

$x^2-5xy+4y^2=0 \mid : x^2$



$4\cdot AB$

$AB\cdot HD=12$

$AB\cdot CH=12$

$x(4-x)=16$

$R=4$

$4x-x^2-16=0$

$\frac{AB}{CH}-?=\frac{BC}{CH}$

$D=(1-5y)^2-20(y^2-1)=$

$=1-10y+25y^2-20y^2+$

$+20=$

$x^2-4x-16=0$

$D=16+64$

$x^2+x(1-5y)+5y^2-5$

$x^2+x(1-5y)+5(y^2-1)$

$5y^2-10y+21$

x^2-4xy

$x^2-4xy+4y^2=xy$

$x^2-5xy+4y^2=0$

$x+y^2=5$

$x+y^2=5$

-5

1

$x^2+x+5y^2-5xy=5$

$x^2+5y^2-5xy+x-5=0$

$D=25y^2-4\cdot(5y^2)\cdot(x-5)=$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)