

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1. \frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} \leq 0$$

Рассмотрим ф-цию $\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x^2 - 3x|} = y$

Найдем точки, в которых ф-ция не имеет:

$$4x^2 - 12x + |x^2 - 3x| = 0$$

$$4(x^2 - 3x) + |x^2 - 3x| = 0$$

$$x^2 - 3x \geq 0$$

$$x^2 - 3x < 0$$

$$4(x^2 - 3x) + (x^2 - 3x) = 0$$

$$4(x^2 - 3x) - (x^2 - 3x) = 0$$

$$5(x^2 - 3x) = 0$$

$$3(x^2 - 3x) = 0$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$

$$x=0 \quad x=3$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$

$$x=0 \quad x=3$$

не подходит, т.к. при подстановке

проверка

$$0 - 3 \cdot 0 \geq 0 \quad \checkmark$$

в $x^2 - 3x < 0$ дают 0

$9 - 9 \geq 0 \quad \checkmark \Rightarrow$ т. в которых ф-ция не имеет

$$x=0$$

$$x=3$$

Найдем нули ф-ции:

$$x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| = 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x^2 - 3x|} = 0$$

$$x \neq 3$$

$$x \neq 0$$

$$1) x \geq 1$$

$$x^2 - 2x + 5 - 4x + 4 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x-3)^2 = 0$$

$x=3$. ~~Этот корень не подх.~~, т.к. при $x=3$ ф-ция не сущ.

2) $x < 1$

$$x^2 - 2x + 5 + 4(x-1) = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

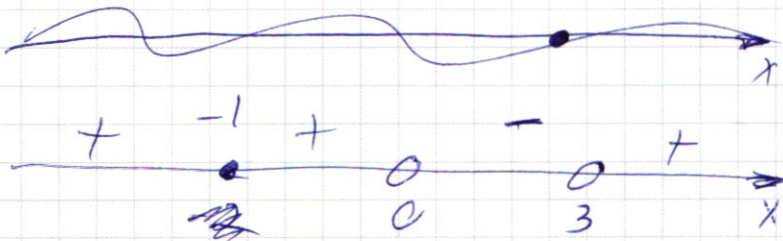
$$(x+1)^2 = 0$$

$$x = -1$$



Корни ф-ции: $x = -1$

по методу интервалов:



при $x=4$

$$\frac{16 - 8 + 5 - 4 \cdot 3}{16 \cdot 4 - 12 \cdot 4 + 4} = \frac{1}{16 + 4} = \frac{1}{20} > 0$$

при:

$$x=1$$

$$\frac{1 - 2 + 5 - 4 \cdot 0}{4 - 12 + 2} = \frac{4}{-6} < 0$$

при $x = -\frac{1}{2}$

$$\frac{\frac{1}{4} + 1 + 5 - 4 \cdot 1,5}{1 + 6 + 3,5 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{8,75} > 0$$

при $x = -2$

$$\frac{4 + 4 + 5 - 4 \cdot 3}{16 + 24 + 10} = \frac{1}{50} > 0$$

из координатной оси делаем вывод, что ф-ция меньше или равна 0 при $x \in (0; 3)$ и при $x = -1$

Отв: $x \in (0; 3) \cup x = -1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3.

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

Обз: $y-2x \geq 0$ $xy \geq 0$
 $y \geq 2x$

$$y-2x = \sqrt{xy}$$

$$y^2+4x^2-4xy = xy$$

$$x^2-2xy+y^2+3x^2-2xy = xy$$

$$(x-y)^2 = 3xy - 3x^2$$

$$(x-y)^2 = -3x(-y+x)$$

$$(x-y)^2 + 3x(x-y) = 0$$

$$(x-y) / (x-y) = 0$$

||

или $x=y$, или $4x=y$

1) $x=y$ Обз

$$\begin{cases} -x = \sqrt{x^2} = |x| & -x \neq 0 \\ x^2+2x=9 & \downarrow \\ & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -xy = \sqrt{xy} \geq 0$$

~~Обз работам~~

$$x^2+2x-9=0$$

$$D = b^2 - 4ac = 4 + 36 = 40$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -1 \pm \sqrt{10}$$

$x = -1 + \sqrt{10}$ - корень,
т.к. не отриц.
Обз.
 $y = x = -1 + \sqrt{10}$ - корень

$$2) \quad 4x = y$$

$$\begin{cases} 2x = \sqrt{4x^2} = |2x| \\ x^2 + 8x = 9 \end{cases}$$

ОДЗ.
 $2x \geq 0$
 $x \geq 0$ ~~$x \geq 0$~~

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$(x-1)(x+9) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x=1$$

$$\Downarrow$$

$$x=-9$$

- не удовл. ОДЗ.

напротив

$$\Downarrow$$

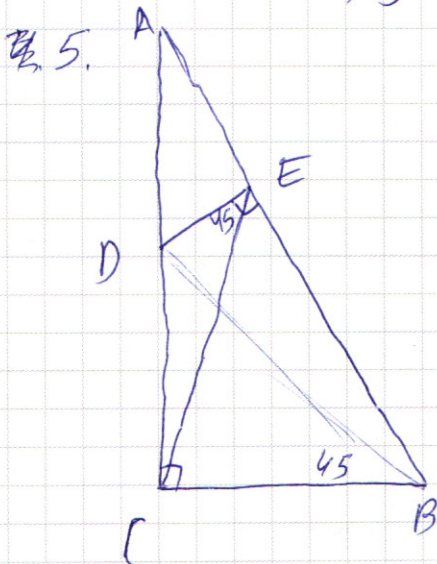
$$x=1 \quad y=4$$

$$x=y=-1-\sqrt{10}$$

} все корни

Омб: $x=1; y=4$

$$x=-1-\sqrt{10}; y=-1-\sqrt{10}$$



$$AC = \frac{5\sqrt{29}}{2} = 2,5\sqrt{29}$$

$$BC = \sqrt{29}$$

Заметим, что чет. к-ва DEBC - впис. ($\angle DEB + \angle DCB = 180^\circ$)

$$\Downarrow$$

$$45 = \angle CED = \angle CBD \text{ (опр. на дугу } CD \text{)}$$

$$\Downarrow$$

$$\angle BDC = 45 \text{ (} 180 - \angle C - \angle CBD = 180 - 90 - 45 = 45 \text{)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\triangle CBD$ - равнобедренный / $\angle CDB = \angle CBD$

\Downarrow

$BC = CD = \sqrt{29}$

$AD = AC - CD = 2,5 \sqrt{29} - \sqrt{29} = 1,5 \sqrt{29}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{1,5 \sqrt{29}}{2,5 \sqrt{29}} = \frac{1,5}{2,5} = \frac{3}{5}$

Заметим, что $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ($\angle AED = \angle BCD$)

S_{ABC} - площадь $\triangle ABC$

S_{ADE} - площадь $\triangle ADE$

$\leftarrow A$ - ось

k - коэффициент

$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} =$

$= \sqrt{29 + 29 \cdot \frac{25}{4}} =$

$= \sqrt{29 \left(1 + \frac{25}{4}\right)} =$

$= \sqrt{\frac{29}{4} \cdot 29} = \sqrt{\frac{29}{4}} \cdot \sqrt{29}$

$\frac{AD}{AB} = k = \frac{1,5 \sqrt{29}}{\sqrt{\frac{29}{4}} \cdot \sqrt{29}}$

$\frac{AD}{AB} = k = \frac{1,5 \sqrt{29}}{\sqrt{\frac{29}{4}} \cdot \sqrt{29}} = 1,5 \cdot \sqrt{\frac{4}{29}}$

$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = k^2 = 2,25 \cdot \frac{4}{29} =$

$= \frac{9}{29}$

$S_{ABC} = AC \cdot BC \cdot \frac{1}{2} =$

$= 2,5 \sqrt{29} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{1}{2} = 1,25 \cdot 29$

$S_{ADE} = \frac{9}{29} \cdot S_{ABC} =$

$= \frac{9}{29} \cdot 1,25 \cdot 29 = 9 \cdot 1,25 =$

$= 11,25$

Итого: $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$, $S_{ADE} = 11,25$

7. Заметим, что ~~любое~~ любое натур. а можно разложить на прост. множ. пусть $a = p_1 p_2 p_3 p_4 \dots p_n$ (p_1 и p_2 не обяз. разные), тогда рассмотрим на $f(a)$

$$f(a) = f(p_1 p_2 \dots p_n) = f(p_1 p_2 \dots p_{n-1}) \cdot f(p_n) = \dots = f(p_1) + f(p_2) + \dots + f(p_n) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \dots + p_n$$

т.к. $f(a) = f(a) + f(1)$, то $f(1) = 0$.

Заметим, что $f(1) = f\left(\frac{a}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$

$$\Downarrow$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$$

Перейдем к натур. числам x и y (т.к. они натур., то я могу пользоваться теми же доказательствами)

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

\Downarrow
 $f(x) < f(y)$ - такие пары x и y надо найти

попробуем значения $f(a)$ при $a \in [3; 19]$
 $a \in \mathbb{N}$:

$f(3) = 3$	$f(10) = 7$	$f(18) = 8$
$f(4) = 4$	$f(11) = 11$	$f(19) = 19$
$f(5) = 5$	$f(12) = 7$	
$f(6) = 5$	$f(13) = 13$	
$f(7) = 7$	$f(14) = 9$	
$f(8) = 6$	$f(15) = 8$	
$f(9) = 6$	$f(16) = 8$	
	$f(17) = 17$	

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Расположите их в порядке убыв.:

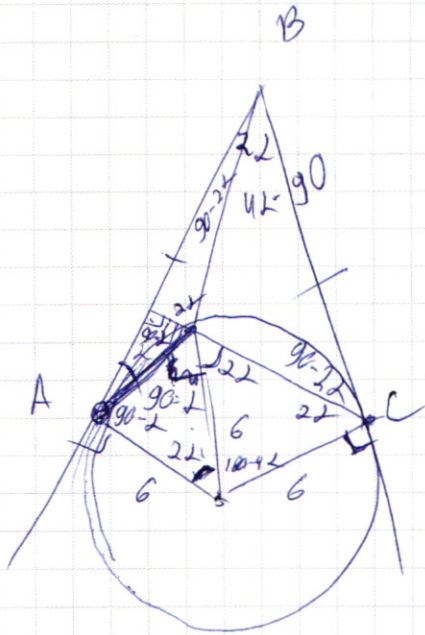
$f(19)$	16
↓	
$f(17)$	15
↓	
$f(13)$	14
↓	
$f(11)$	13
↓	
$f(14)$	12
↓	
$f(16); f(15); f(18)$	$3 \cdot 9 = 9+9+9$
↓	
$f(12), f(10), f(7)$	$3 \cdot 6 = 6+6+6$
↓	
$f(9), f(8)$	$4+4$
↓	
$f(5), f(6)$	$2+2$
↓	
$f(4)$	1
↓	
$f(3)$	0

В этих столбцах
будет какое-то
выбрание x , которое
подх. по усл. для
 y , равному числу a
из соответ. строки

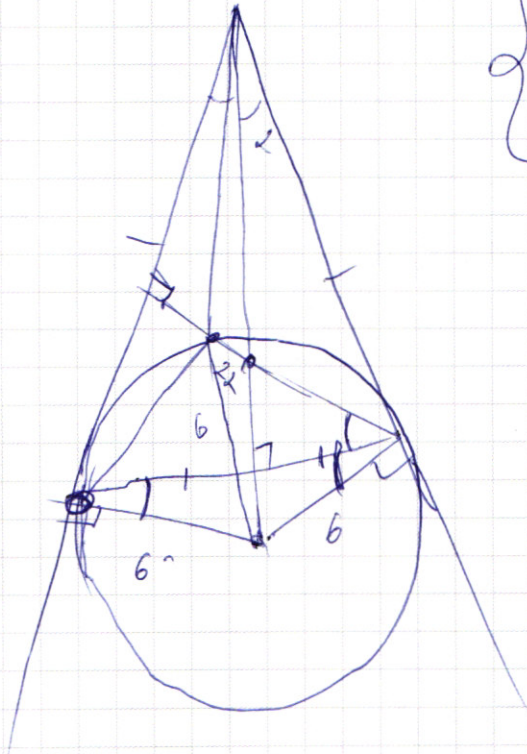
Посчитаем сумму во второй столбце, и получим ответ.

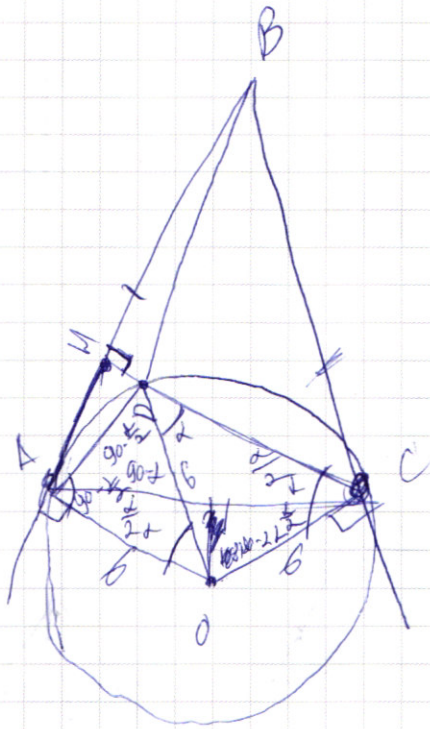
$$16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 9 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 8 + 4 + 1 = 128$$

Отв. 128



$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6-3x-2y| > 6 \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0 \end{cases}$$





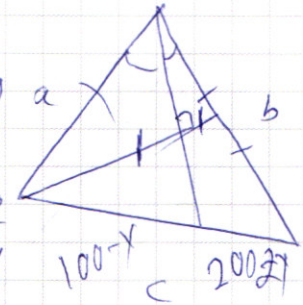
$$\frac{AB}{CH}$$

$$S_{ABD} = 15$$

$$R = 6$$

$$AB \cdot DH = 30 \quad a$$

$$AB = \frac{30}{DH}$$



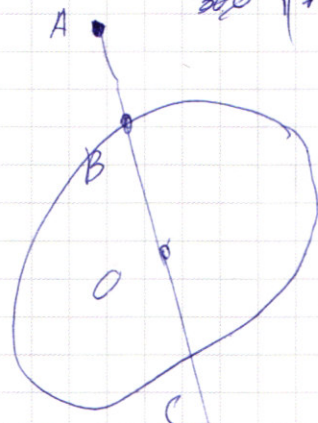
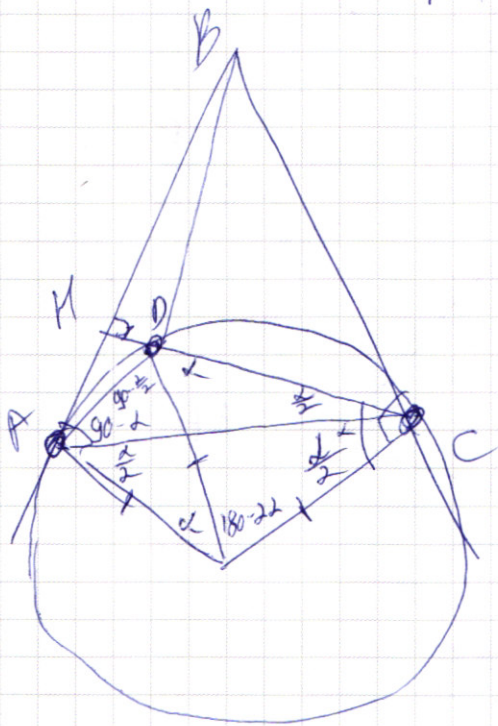
$$\frac{AB}{CH} = \frac{30}{DH} \cdot \frac{1}{CH} = \frac{30}{CH \cdot DH} = \frac{30}{AH^2}$$

$$180 - 2x$$

$$p \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

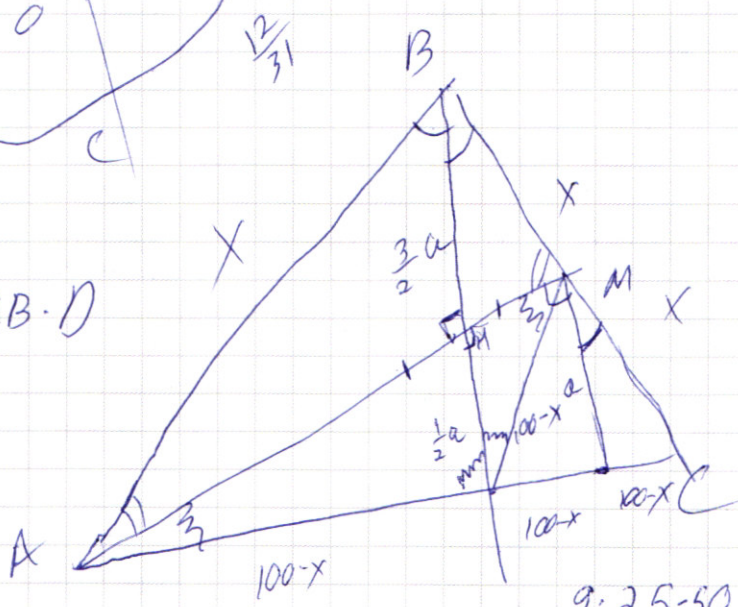
$$AH^2 = DH \cdot CH = AC^2 - CH^2$$

$$\frac{150}{300} \sqrt{(150-x)(150-2x)(3x-150)}$$



$$AB \cdot D$$

$$R = 10 \sqrt{x-50}$$



$$x^2 = (100-x)^2 + 100(x-50)$$

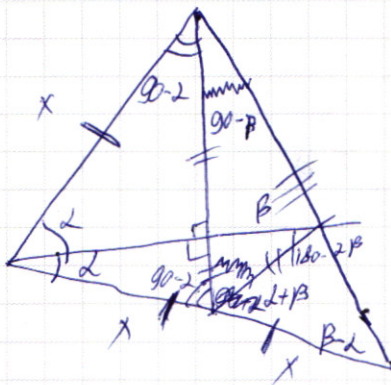
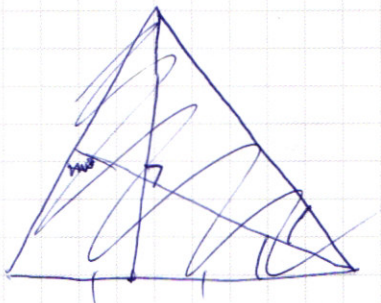
$$4x^2$$

$$AH^2 = x^2 - \frac{9}{4} 100(x-50)$$

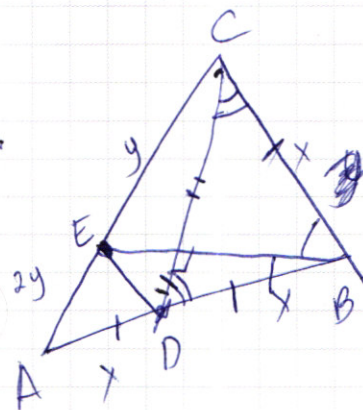
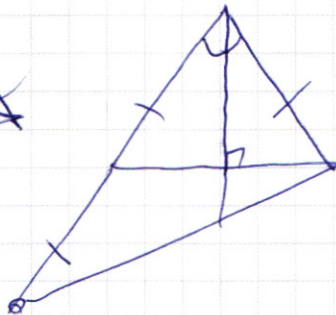
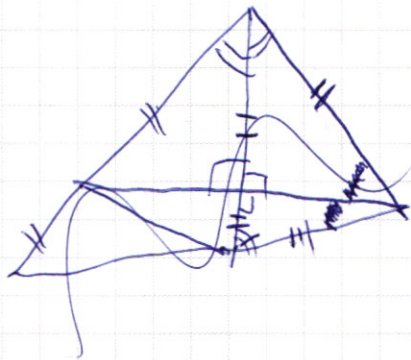
$$(100-x) - \frac{1}{4} a = x - \frac{9}{4} a$$

$$AH = \sqrt{x^2 - 225x + 11250}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$p=300$



$$\frac{AE}{2x} = \frac{EC}{x}$$

$$\frac{AE}{2} = EC$$

$$AE = 2EC$$

$$y - 2x = \sqrt{xy}$$

$$2y + x^2 = 9$$

$$y^2 + 4x^2 - 4xy = xy$$

$$y^2 + 4x^2 = 5xy$$

$$2y + x^2 = 9$$

$$y^2 + 4x^2 = 5xy$$

$$4x^2 + 8y = 36$$

$$y^2 - 8y = 5xy - 36$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = 3xy - 3x^2$$

$$(x-y)^2 = 3x(y-x) \quad \frac{(x-y)^2}{(x-y)} = 3x$$

$$x-y = 3x$$

$$x=y$$

$$x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$D = 4 + 36 = 40$$

$$y = -2x$$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &\geq 2x \\ xy &\geq 0 \end{aligned}$$

$$y^2 + 4x^2 - 4xy = xy$$

$$(x-y)^2 + 3x^2 - 2xy = xy$$

$$(x-y)^2 = 3xy - 3x^2$$

$$(x-y)^2 = 3x(y-x)$$

$$(x-y)^2 = -3x(x-y)$$

$$(x-y)^2 + 3x(x-y) = 0$$

$$(x-y)(4x-y) = 0$$

$$\downarrow$$

$$x=y$$

$$\downarrow$$

$$y=4x$$

$$-x = \sqrt{x^2} \Rightarrow x \leq 0$$

$$x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$D = 4 + 36 = 40$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2} = -1 \pm \sqrt{10}$$

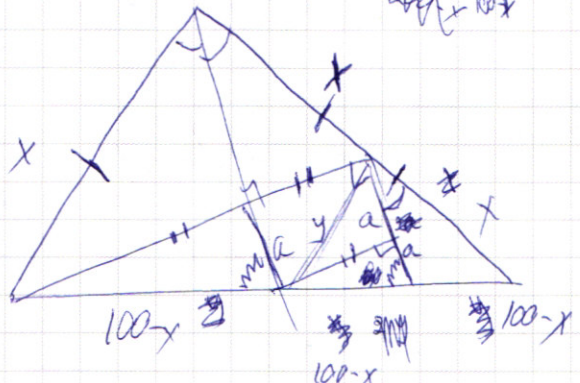
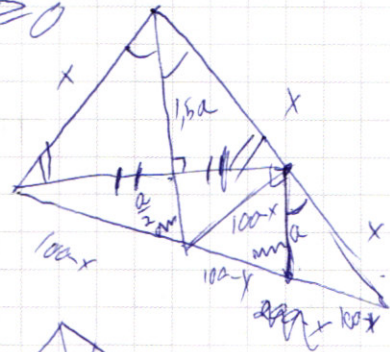
$$\Downarrow$$

$$-1 - \sqrt{10}$$

$$400(x-5) = (100-x)^2 + x^2$$

$$x^2 - 15^2(x-5) = k^2$$

$$x^2 - 225x + 225 \cdot 5$$



$$y = 100 - x$$

$$300 - 3x^2 = \frac{9}{4}a^2 +$$

$$x^2 - \frac{9}{4}a^2 = (100-x)^2 - \frac{1}{4}a^2$$

$$2x = \sqrt{4x^2} \Rightarrow x \geq 0$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$x=1, y=4$$

~~$$x=9$$~~

~~$$(2000x)^2$$~~

$$x^2 - 2a^2 = x^2 - 200x + 10000$$

$$-2a^2 = -200x + 10000$$

$$a^2 = 100x - 5000$$

$$a = \sqrt{100x - 5000}$$

$$a = 100\sqrt{x-50}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} \leq 0$$

$$x=1 \quad \frac{1-2+5}{4-12+2} = \frac{4}{-10} > 0$$

$$4x^2 - 12x + |x^2 - 3x| \neq 0 \quad \frac{16-8+5-4 \cdot 3}{16-12-4+4} = \frac{1}{0} > 0$$

Д.ф. $\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4(x^2 - 3x) + |x^2 - 3x|} = 0$

$$4(x^2 - 3x) + |x^2 - 3x| \neq 0 \quad \frac{4+4+5-4 \cdot 3}{16+24+10} = \frac{1}{50} > 0$$

м. в. ф. н. с. $x=0$
 $x=3$

$$3|x^2 - 3x| \neq 0 \quad 5|x^2 - 3x| \neq 0$$

Нужно: $x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| = 0$

$x \geq 1$ $x < 1$

$x^2 - 3x \neq 0$

$x \neq 0$

$x \neq 3$

$$x^2 - 2x + 5 - 4(x-1) = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$D = 36 - 4 = 32$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{8}}{2} = 3 \pm \sqrt{8}$$

$$(x-3)^2 = 0$$

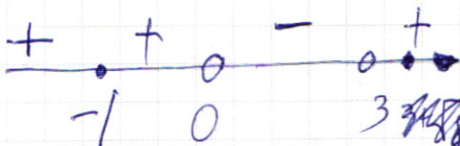
$$x=3$$

$3 - \sqrt{8}$ - к.п., т.к. $x \geq 1$

$$x^2 - 2x + 5 + 4(x-1) = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$x = -1$



Handwritten calculations and notes, including $\sqrt{19} - \sqrt{18} < 1$ and $\sqrt{19} < \sqrt{1+8+2\sqrt{8}}$.

$x \in (0, 3), -1$

$$a = p_1 p_2 \dots p_n$$

$$f(a) = F(p_1) + F(p_2) + F(p_3) + \dots + F(p_n) = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$$

$$\Downarrow$$

$$f(a) \geq 0$$

$$f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = f(1) - f(a)$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right) = f(a) + f(1) - f(b) = f(a) - f(b)$$

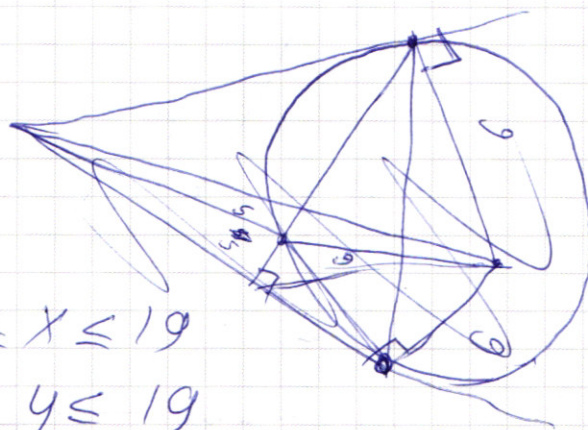
$$f(a) - f(b) < 0$$

$$f(a) < f(b)$$

$$f(x) < f(y)$$

$$3 \leq x \leq 19$$

$$3 \leq y \leq 19$$



$$2^{10} = 1024$$

$$2^9 = 512$$

$$2^8 = 256$$

$$2^7 = 128$$

$$2^6 = 64$$

$$F(19)$$

$$F(17)$$

$$F(13)$$

$$F(11)$$

$$F(14)$$

$$F(16); F(15)$$

$$F(12), F(10), F(7)$$

$$F(9), F(8) > F(5), F(6) > F(4) > F(3)$$

$$\begin{array}{r} +16 \\ +15 \\ \hline 31 \\ +14 \\ \hline 45 \\ +13 \\ \hline 58 \\ +12 \\ \hline 70 \\ +11 \\ \hline 81 \\ +10 \\ \hline 91 \\ +9 \\ \hline 100 \\ +8 \\ \hline 108 \\ +7 \\ \hline 115 \\ +6 \\ \hline 121 \\ +5 \\ \hline 126 \\ +4 \\ \hline 130 \end{array}$$

$$12 + 3 + 4 = 127 + 1 = 128$$

$$f(3) = 3 \quad f(11) = 11$$

$$f(4) = 4 \quad f(12) = 7$$

$$f(5) = 5 \quad f(13) = 13$$

$$f(6) = 5 \quad f(14) = 9$$

$$f(7) = 7 \quad f(15) = 8$$

$$f(8) = 6 \quad f(16) = 8$$

$$f(9) = 6 \quad f(17) = 17$$

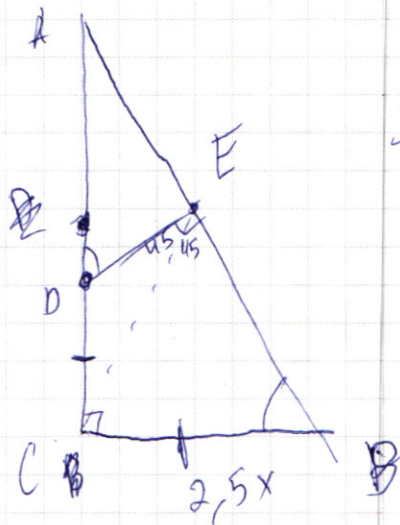
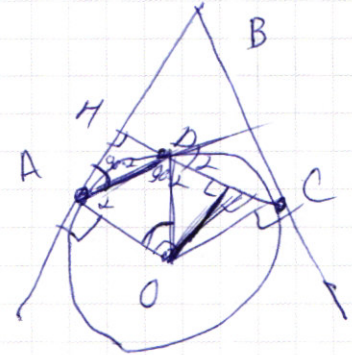
$$f(10) = 7 \quad f(18) = 8$$

$$f(19) = 19$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$AH^2 + \frac{1}{4}a^2 = (100-x)^2$$

$$x^2 - 225x + 11250 + 25(x-50) = x^2 - 200x$$



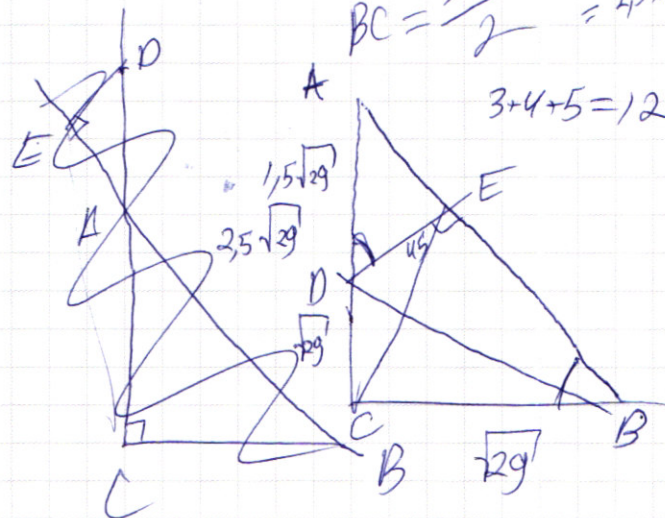
$$\frac{AD}{AC}$$

$$S_{AED} = \sqrt{29} = x$$

$$AC = \sqrt{29}$$

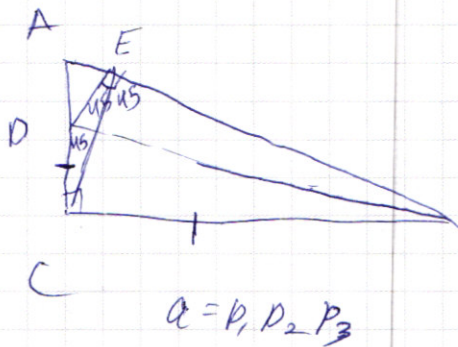
$$BC = \frac{5\sqrt{29}}{2} = 2,5\sqrt{29}$$

$$3+4+5=12$$



$$f(3)=3$$

$$f(4)=2$$



$$a = p_1 p_2 p_3$$

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f(p) = p$$

$$3 \leq x \leq 19$$

$$3 \leq y \leq 19$$

$$f(a^2) = 2f(a)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(xy) + f\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$$

$$f(a) = f(p_1) + f(p_2) + f(p_3) + \dots + f(p_n) = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$$