МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14 ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45°$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Разберём все 4 случая раскрытия модуля:

1) $\begin{cases} x \geq 3 \\ \dfrac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2+x^2-12x-3x} \leq 0 \end{cases}$

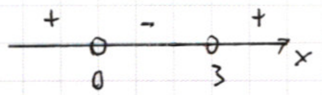
2) $\begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-x^2-12x+3x} \leq 0 \end{cases}$

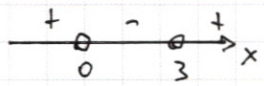
3) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x^2-2x+5+4x-4}{4x^2-x^2-12x+3} \leq 0 \end{cases}$

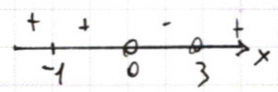
$\begin{cases} x \geq 3 \\ \dfrac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \leq 0 \end{cases}$







$\begin{cases} x \geq 3 \\ 0 < x < 3 \end{cases}$

нет решений

$\begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 0 < x < 3 \end{cases}$

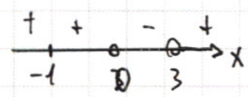
$\underline{1 \leq x < 3}$

$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ \left[\begin{array}{l} 0 < x < 3 \\ x = -1 \end{array}\right. \end{cases}$

$\underline{0 < x \leq 1}$

4) $\begin{cases} x \leq 0 \\ \dfrac{x^2-2x+5+4x-4}{4x^2+x^2-12x-3x} \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 0 \\ \dfrac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \leq 0 \end{cases}$



$\begin{cases} x \leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 0 < x < 3 \\ x = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \underline{x = -1}$

Объединим все полученные ответы (подчёркнуты):

$0 < x < 3$

$\cancel{x = -1}$

$x = -1$

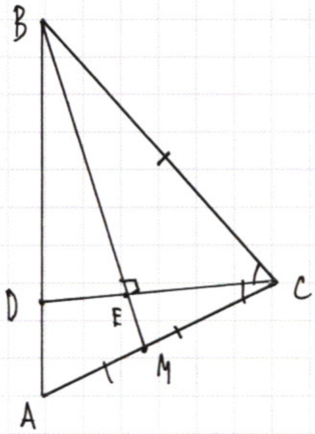
~~или~~ $x = [-1] \cup (0; 3)$.

Ответ: $x = [-1] \cup (0; 3)$.

№2

Нарисуем $\triangle ABC$:

BM - медиана
CD - бисс.
$CD \perp BM$
$CD \cap BM = E$
$P = 300$



BM - медиана $\Rightarrow AM = MC$

CD - бисс. ; $CD \perp BM \Rightarrow$ в $\triangle BMC$ CE - бисс. и высота $\Rightarrow \triangle BMC$ - р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow BC = MC = AM$

Пусть $AM = a \Rightarrow BC = a$; $AC = 2a$

$AB + BC + AC = 300$

$AB + 3a = 300$

$AB = 300 - 3a$; Чтобы $\triangle ABC$ мог существовать, нужно, чтобы:

$AC + BC > AB$ | $AB + BC > AC$
$3a > 300 - 3a$ | $300 - 2a > 2a$
$6a > 300$ | $300 > 4a$
$\underline{a > 50}$ | $\underline{a < 75}$

Кол-во возможных треугольников (с $P = 300$) равно кол-ву возможных значений a. По условию все стороны целые $\Rightarrow$ $a \in \mathbb{Z}$; $50 < a < 75 \Rightarrow$ $a = 24 \Rightarrow$ всего таких треугольников 24

Ответ: 24.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy \geq 0 \\ y - \sqrt{xy} + \frac{1}{4}x = 2\frac{1}{4}x \quad (1) \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \sqrt{y} - 2\sqrt{x} = 0 \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \sqrt{y} = 2\sqrt{x} \\ 2y + x^2 = \cancel{8}\ 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y = 4x \\ x^2 + 8x - 9 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y = 4x \\ \left[\begin{aligned} x &= 1 \\ x &= -9 \end{aligned}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

$x = 1;\ y = 4$

Ответ: $x = 1;\ y = 4$

1)
$$\begin{cases} y - \sqrt{xy} + \frac{1}{4}x - 2\frac{1}{4}x = 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\sqrt{y} - \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^2 - \frac{9}{4}x = 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\sqrt{y} - \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{2}\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{y} + \sqrt{x}\right) = 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\sqrt{y} - 2\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{y} + \sqrt{x}\right) = 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$\sqrt{y} + \sqrt{x} > 0$, т.к. ~~$x \geq 0;\ y \geq 0 \Rightarrow \sqrt{y}$~~
если $\sqrt{y} + \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0;\ y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 2y = 0 \neq 9 \Rightarrow \sqrt{y} - 2\sqrt{x} = 0$

2) $x^2 + 8x - 9 = 0$

$D = 64 + 36 = 10^2$

$$\left[\begin{aligned} x &= \frac{-8+10}{2} = 1 \\ x &= \frac{-8-10}{2} = -9 \end{aligned}\right.$$

№4

Дано:

O - центр ω

AB; BC - кас.

CH - выс.

$CH \cap \omega = D$

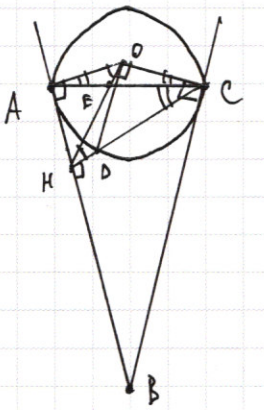
$S_{\triangle ABD} = 15$

$R = 6$

Найти:

$\frac{AB}{CH} - ?$

Решение:



CB = AB, т.к. ~~их~~ касательные из одной точки

$BA; BC$ - кас. $\Rightarrow \angle OAB = 90°$; $\angle OCB = 90°$

$AO = OC = R \Rightarrow \triangle AOC$ - р/б $\Rightarrow \angle OAC = \angle ACO$

$\angle AOH + \angle AHO = 90 = \angle AHO + \angle OHC \Rightarrow \angle OHC = \angle AOH$

$\angle ACH = \angle OAC$ (т.к. $\triangle AOE \sim \triangle HEC$ по 2-м углам)

$\triangle HOC$:

$\angle OHC + 2 \cdot \angle ACH + \angle HOC = 180$

$\angle HOC = 90$

Т. Пифагора $\triangle HCB$:

$CH^2 = CB^2 - HB^2$

$HB = AB - AH$

$\Rightarrow CH^2 = CB^2 - AB^2 + 2AB \cdot AH - AH^2$

$CH^2 = 2AB \cdot AH - AH^2$

Т. Пифагора:

$\triangle HAO$:

$OH^2 = R^2 + AH^2$

Т. Пифагора $\triangle HOC$:

$CH^2 = OH^2 + R^2$

$\Rightarrow CH^2 = AH^2 + 2R^2 \Rightarrow AH^2 - 2AB \cdot AH + R^2 = 0$

$D = AB^2 - 144 = 0$, т.к. AB принимает 1 значение

$AB = 12$

$AH = 6 \Rightarrow CH = 6\sqrt{3} \Rightarrow \frac{CH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\frac{CH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

МФТИ

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Дано:

$\triangle ABC$-прям.

$D \in AC$

$E \in AB$

$DE \perp AB$

$AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

$BC = \sqrt{29}$

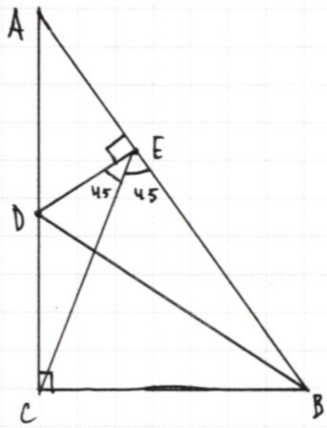
$\angle CED = 45^\circ$

Найти:

$\frac{AD}{AC}$ - ?

$S_{\triangle AED}$ - ?

Решение:



1) Найдём AB по т. Пифагора:

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AB^2 = \frac{25 \cdot 29}{4} + 29$

$AB^2 = \frac{29^2}{2^2}$

$AB = \frac{29}{2}$

2) т.к. $DE \perp AB \Rightarrow \angle DEB = 90^\circ$ и $\angle DCB = 90^\circ$; $\angle DEB + \angle DCB = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ CDEB - вписанный четырёхугольник

по т. о секущих:

$AD \cdot AC = AE \cdot AB$ (т.к. из точки A проходит 2 секущей)

$AD = \frac{AE \cdot 29 \cdot 2}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{29}} = \frac{AE \cdot \sqrt{29}}{5}$

3) $\triangle ADE$ - т. Пифагора:

$AD^2 = DE^2 + AE^2$

$\frac{AE^2 \cdot 29}{25} = DE^2 + AE^2$

$\frac{AE^2 \cdot 4}{25} = DE^2$

$DE = \frac{2}{5} AE$

4) $\angle CDB = \angle CEB = 90 - 45 = 45$ (опираются на одну дугу)

$\angle DCB = \angle CED = 45$ (опир. на одну дугу

$\Downarrow$

$\angle CDB = \angle CBD = 45 \Rightarrow \triangle$ CDB - р/б $\Rightarrow CD = CB = \sqrt{29}$

$AD = AC - CD = \frac{5\sqrt{29}}{2} - \sqrt{29} = 1{,}5\sqrt{29} \Rightarrow AE = \frac{15}{2} = 7{,}5$

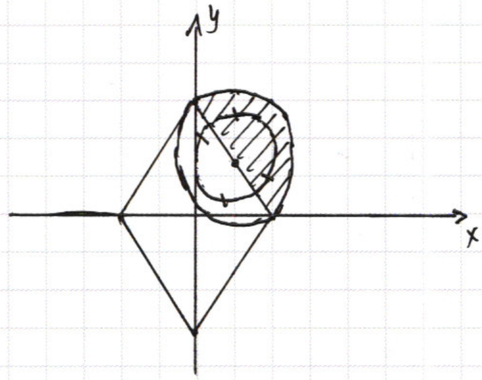
5) $\frac{AD}{AC} = \frac{1{,}5\sqrt{29}}{2{,}5\sqrt{29}} = \frac{3}{5} = \cancel{0{,}8}\ 0{,}6$

$S_{\triangle AED} = AE \cdot DE \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5} AE^2 = \frac{45}{2} = 22{,}5$

Ответ: $AD : AC = 3 : 5$; $S_{\triangle AED} = 22{,}5$

№6

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6 \\ x^2-2x-3y+y^2\le 0 \end{cases}$$ 1



1) $$\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 6-3x-2y\le 0 \\ 3x+2y+3x+2y>12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ \cancel{3x+2y}\ 6-3x-2y\le 0 \\ 6x+4y>12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 3x+2y\ge 6 \\ 3x+2y>6 \end{cases}$$

т.к. везде стоят модули => график симметричен относительно OX и OY

2) $x^2-2x-3y+y^2\le 0$

$x^2-2x+1+y^2-3y+2{,}25\le 3{,}25$

$(x-1)^2+(y-1{,}5)^2\le 3{,}25$ – это уравнение окружности с центром в точке $(1;1{,}5)$ и $R=\frac{\sqrt{13}}{2} > 1{,}5$

Заштрихованная часть – это площадь, которую надо найти

$$S=\frac{\pi R^2}{2}=\frac{13\pi}{8}$$

Ответ: $S=\frac{13\pi}{8}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\frac{x^2-2x+1+4-4|x-1|}{4x^2-12x}$$

1) $\begin{cases} x \geq 3 \\ \dfrac{(x-1)^2+4-4(x-1)}{4x^2-12x+x^2-3x} \leq 0 \end{cases}$

$x \geq 3$

$$\frac{(x-1)^2}{5(x^2-3x)} = \frac{x^2-2x+5-4x+4}{5x(x-3)} = \frac{x^2-6x+9}{5x(x-3)} = \frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \leq 0$$

+ 0 − 3 +

$0 < x < 3$

$\emptyset$

3) $0 \leq x \leq 1$

$$\frac{x^2-2x+5+4x-4}{3x(x-3)} = \frac{x^2+2x+1}{3x(x-3)} = \frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \leq 0$$

+ −1 + 0 − 3 +

$0 < x < 3$

$x = -1$

$\underline{0 < x \leq 1}$

2) $1 \leq x \leq 3$

$$\frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \leq 0$$

+ 0 − 3 +

$0 < x < 3$

$\underline{1 \leq x < 3}$

4) $x \leq 0$

$$\frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \leq 0$$

$\underline{x = -1}$

+ −1 + 0 − 3 +

$1 \leq x < 3$

$0 < x \leq 1$

$x = -1$

$\boxed{0 < x < 3 \quad x = -1}$

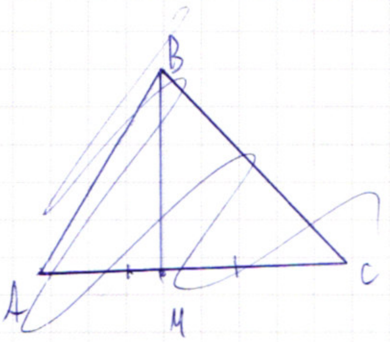
☑ черновик ☐ чистовик

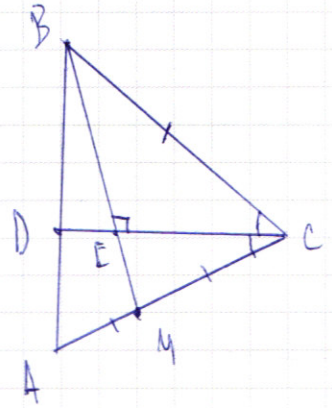
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2





$BC = a$

$AC = 2a$

$BA = 300 - 3a$

$3a > BA$

$3a > 300 - 3a$

$6a > 300$

$a > 50$

$a < 100$, т.к. если $a \geq 100$, то $3a \geq 300$ - это не треуг.

$36 - 6{,}25 = 29{,}75 = \frac{119}{4}$ $\frac{CH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$OH^2 = AH^2 + R^2$ $CH = 6\sqrt{3}$

$CH^2 = OH^2 + R^2 = AH^2 + 2R^2 = 108$

$AH = 6$

$CH^2 = AB^2 - (AB - AH)^2$

$AB^2 - AB^2 + 2AB \cdot AH - AH^2 = AH^2 + 2R^2$

$\cancel{2AH^2} = AH^2 + 12AH + 36 = 0$

$51 + 102 + 147 = 300$

$99 + 198 + 3 = 300$ (X)

$90 + 180 + 30 = 300$ (X)

$80 + 160 + 60 = 300$ (X)

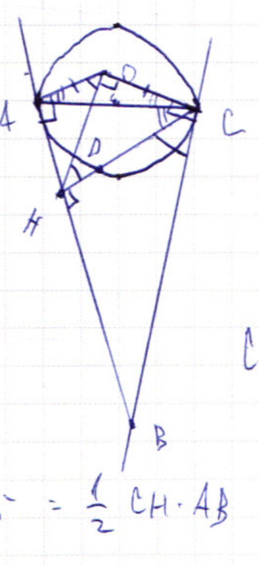
$75 + 150 + 75 = 300$ (X)

$74 + 148 + 78 = 300$ (+)

от 51 до 74

$10 + 10 + 4 = 24$

№4



$AH^2 = CH^2$

$AH = CH$

$2CH^2 = 2AB \cdot CH$

$2CH$

$CH^2 = OH^2 + R^2$

$OH^2 = CH^2 - R^2$

$S_{\triangle ABD} = 15 = \frac{1}{2} CH \cdot AB$ $CH \cdot AB = 30$

$R = 6$ $AH^2 = CH^2 - 2R^2$

~~OH = CH~~

$OH^2 = CH^2 - R^2$

$CH^2 + HB^2 = CB^2$

$\frac{900}{AB^2} + HB^2 = AB^2$

$CH^2 + AB^2 - 2AB \cdot AH + AH^2 = AB^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$CH^2 = OH^2 + R^2$

$OH^2 = CH^2 - R^2$

$AH^2 = CH^2 - 2R^2$

$CH^2 + CH^2 - 2R^2 = 2AB \cdot AH$

$CH^2 - R^2 = AB \cdot AH$

$OH^2 = AH^2 + R^2$

$AH^2 - AB \cdot AH + \cancel{12}\,36 = 0$

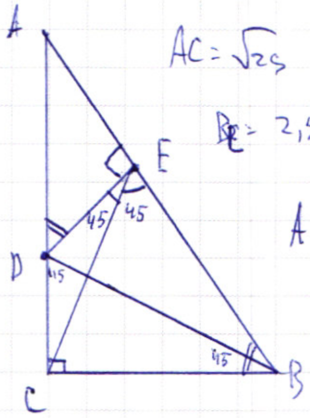
$D = AB^2 - 144 = 0$

$AB = 12$

$DH = 2,5$

$\frac{AB}{CH} = 4,8$

№5



$AC = \sqrt{29}$

$BC = 2,5\sqrt{29}$

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AB^2 = 29 + \frac{29 \cdot 25}{4}$

$AB^2 = \frac{29^2}{2^2}$

$AB = \frac{29}{2}$

$AD = \frac{AE \cdot \sqrt{29}}{5}$

$\frac{3}{2} = \frac{AE}{5}$

$AD \cdot AC = AE \cdot AB$

$\cancel{AD = \frac{AE \cdot 29}{2 \cdot \sqrt{29}} = \frac{AE \cdot \sqrt{29}}{2}}$

$AD = \frac{2 \cdot AE \cdot 29}{2 \cdot 5\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{29} \cdot AE}{5}$

$\cancel{\frac{AE^2 \cdot 29}{4} = AE^2 + DE^2}$

$\cancel{\frac{AE^2 \cdot 25}{4} = DE^2}$

$\frac{AE^2 \cdot 29}{5^2} = AE^2 + DE^2$

$\frac{AE^2 \cdot 4}{25} = DE^2$

$DE = \frac{2}{5} AE$

$\cancel{DE = 2,5\,AE}$

$S_{\triangle AED} = \frac{5}{4} AE^2 = \frac{45}{4} = 11,25$

$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{2}$

$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

$\cancel{DC = CB = 2,5\sqrt{29}}$

$DC = \sqrt{29}$

$AD = 1,5\sqrt{29}$

$\frac{AD}{AC} = 1,5$

$|AD| = |\sqrt{29} - 2,5\sqrt{29}| = 1,5\sqrt{29}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{1,5\sqrt{29}}{2,5\sqrt{29}} = 0,6 = 3:5$

$AE = 3$

$S_{\triangle AED} = \frac{1}{5} AE^2 = 1,8$

$\frac{3}{5}\sqrt{29} = \frac{\sqrt{29} \cdot AE}{5}$

$AE = 3$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \qquad \begin{matrix} xy\ge 0 \\ x\ge 0 \\ y \ge 0 \end{matrix}$$

$y-\sqrt{xy}+\frac{1}{4}x = 2\frac{1}{4}x$

$(\sqrt{y}-\frac{1}{2}\sqrt{x})^2-\frac{9}{4}x = (\sqrt{y}-\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{3}{2}\sqrt{x})(\sqrt{y}+\sqrt{x}) = (\sqrt{y}-2\sqrt{x})(\sqrt{y}+\sqrt{x})$

$$\begin{cases} (\sqrt{y}-2\sqrt{x})(\sqrt{y}+\sqrt{x})=0 \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 175 \\ \times\ 175 \\ \hline 875 \\ +\ 1225 \\ 175 \\ \hline 3{,}0625 \end{array}$$

$\sqrt{y}-2\sqrt{x}=0$

$\sqrt{y}=2\sqrt{x}$

$y=4x$

$8x+x^2=9$

$x^2+8x-9=0$

$D=64+36=10^2$

$x=\frac{-8+10}{2}=1 \Rightarrow y=4$

$x=\frac{-8-10}{2}=-9 \quad \varnothing$

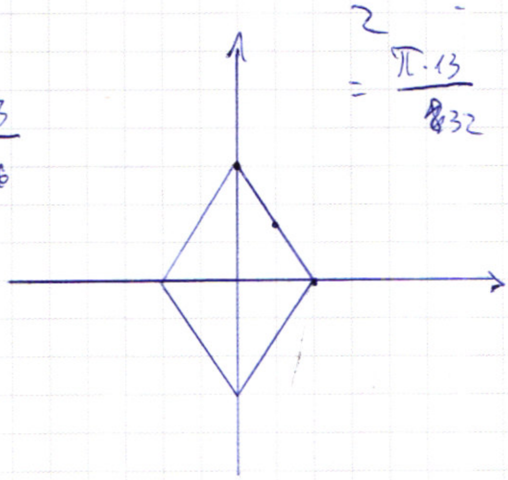
№6

$\frac{\sqrt{13}}{4}$ $\quad 1{,}5 \quad$ $\frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi\cdot 13}{32}$

$\frac{13}{16}$

$x^2-2x+1+y^2-3y+2{,}25 \le 3{,}25$

$(x-1)^2+(y-1{,}5)^2 \le 3{,}25$



$x\ge 0 \qquad\qquad x \le 0$

$y\ge 0 \qquad\qquad y\le 0$

$6-3x-2y \le 0$

$6x+4y>12$

$3x+2y \le 6$

$S=\frac{\pi\cdot 13}{32}$