

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x - 3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x - 2|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy}, \\ x + y^2 = 5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках S и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4, \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 18$, $1 \leq y \leq 18$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

Пусть $x \leq 3$ $x^2 - 6x + 10 - 2|x-3| = x^2 - 6x + 10 - 2(3-x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geq 0$.

Пусть $x \geq 3$ $x^2 - 6x + 10 - 2|x-3| = x^2 - 6x + 10 - 2(x-3) = x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2 \geq 0$.

Значит, при любом x числитель неотрицателен.

$$2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2| = 2x(x-2) + |x| \cdot |x-2|. \text{ Пусть } x \leq 0 \quad x(x-2) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x(x-2) > 0 \Rightarrow 2x(x-2) + |x| \cdot |x-2| > 0 \text{ (т.к. } |x| \cdot |x-2| \geq 0)$$

Пусть $x = 0$ $2x(x-2) + |x| \cdot |x-2| = 2 \cdot 0 \cdot (-2) + 0 \cdot 2 = 0$, но знаменатель не может быть равен 0.

Пусть $0 < x < 2$ $2x(x-2) + |x| \cdot |x-2| = 2x^2 - 4x + (2x - x^2) = x^2 - 2x = x(x-2)$, что меньше 0.

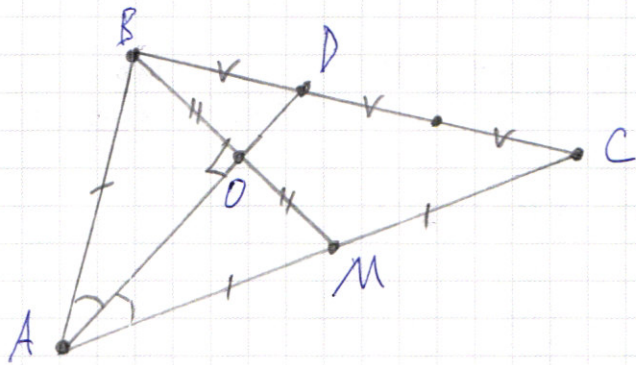
Пусть $x = 2$ $2x(x-2) + |x| \cdot |x-2| = 2 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$.

Пусть $x > 2$ $2x(x-2) + |x| \cdot |x-2| = 2x^2 - 4x + (x^2 - 2x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) > 0$.

Всё числитель всегда неотрицателен, а дробь не положительна, но знаменатель отрицателен.

Ответ: $x \in (0; 2)$.

N2



Дано:

$$\angle ABO = \angle OAM$$

$$\angle BOA = 90^\circ$$

$$AM = MC$$

$$AB \in \mathbb{N}, BC \in \mathbb{N}, AC \in \mathbb{N}$$

$$AB + BC + AC = 600$$

Найти: кол-во $\triangle ABC$

Решение:

Заметим, что AO — биссектриса и высота, значит $AB = AM \Rightarrow 2AB = AC$. (возможных).

П.к. AD — биссектриса, то $BD:DC = AB:AC = 1:2$. Раз $AB \in \mathbb{N}, AC \in \mathbb{N}, BC \in \mathbb{N}$, то $AC \geq 2, BC \geq 3$, а также $AB + BC > AC$ (то есть $AC < 300$, иначе $AB + BC = AC$) и $AB + AC > BC$ (то есть $BC < 300$, иначе $AB + AC = BC$). Раз $AC < 300$, то $AB < 150 \Rightarrow BC > 150$ ($AB + BC + AC = 600$). Значит $BC \in \mathbb{N}, BC \geq 3, BC < 300$ и $BC > 150$. Значит BC может принимать 49 значений, ($BC \geq 153$ и $BC \leq 297, BC \geq 3$). Итого, всего существует 49 треугольников.

Ответ: 49.

N3

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$x - 2y = \sqrt{xy}$$

$$(x - 2y)^2 = xy, \text{ где } xy \geq 0.$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy$$

$$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$$

$$(x - 4y)(x - y) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$\begin{cases} x = 4y \\ x = y \end{cases}$$

Если $x = y$, то $x - 2y = x - 2x = -x$

Если $x = y$, то $x + y^2 = x + x^2 = 5$.

$$x^2 + x - 5 = 0$$

$$D = 21$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} = y$$

При $y = x = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$ $x - 2y = \sqrt{xy}$ имеет вид $\frac{1 + \sqrt{21}}{2} - 1 - \sqrt{21} = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$,
то неверно ($y = x \neq \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$). При $y = x = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$ $x - 2y = \sqrt{xy}$
имеет вид $\frac{1 - \sqrt{21}}{2} - 1 + \sqrt{21} = \frac{\sqrt{21} - 1}{2} \cdot 2$

$$1 - \sqrt{21} - 2 + 2\sqrt{21} = \sqrt{21} - 1$$

$$\sqrt{21} - 1 = \sqrt{21} - 1.$$

Если $x = 4y$, то $x + y^2 = 5$ имеет вид $4y + y^2 = 5$.

$$y^2 + 4y - 5 = 0$$

$$(y - 1)(y + 5) = 0$$

$$\begin{cases} y = 1 & x = 4 \\ y = -5 & x = -20 \end{cases}$$

Но $(4 - 2 \cdot 1 = \sqrt{4 \cdot 1})$ ($2 = 2$)

$$\begin{cases} 4 + 1^2 = 5, \end{cases}$$

А если $y = -5$ и $x = -20$, то $-20 + (-5)^2 = 5$ ($25 - 20 = 5$), а
 $-20 - 2 \cdot (-5) = -20 + 10 = -10$, но $\sqrt{xy} \geq 0 > -10$ — противоречие.

Ответ: $x = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ и $y = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ и $x=4$ и $y=1$.

Поскольку при $x=y = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$, $x+y^2=5$ имеет вид

$$\frac{1-\sqrt{21}}{2} + \left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}\right)^2 = 5$$

$$\frac{1-\sqrt{21}}{2} \left(1 + \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right) = 5$$

$$\frac{(1-\sqrt{21})(3-\sqrt{21})}{4} = 5$$

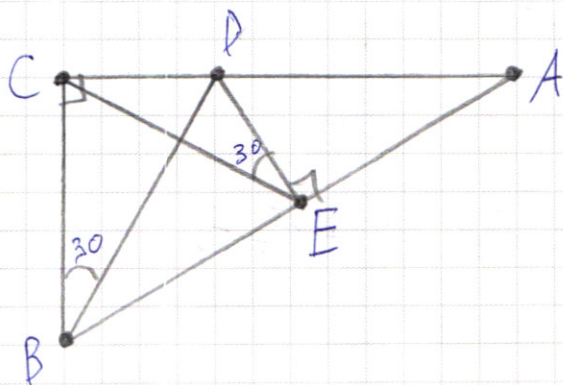
$$\frac{3 - 3\sqrt{21} - \sqrt{21} + 21}{4} = 5$$

$$\frac{24 - 4\sqrt{21}}{4} = 5$$

$$6 - \sqrt{21} = 5$$

$\sqrt{21} = 1$ — противоречие.

Ответ: $x=4$, а $y=1$.



N5

Дано:

$$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$AC = \sqrt{7}$$

$$\angle CED = 30^\circ$$

$$\angle ACB = \angle DEA = 90^\circ$$

Найти: AD ; AC

Решение: В четырёхугольнике $BCDE$ $\angle BCD + \angle BED = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, значит $BCDE$ — вписанный четырёхугольник, тогда $\angle CED = \angle CBD = 30^\circ$. В $\triangle DCB$ $\angle CBD = 30^\circ$, а $\angle BCD = 90^\circ \Rightarrow CD \cdot \sqrt{3} = BC = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \Rightarrow CD = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$. $AD = AC - DC = \sqrt{7} - \frac{2\sqrt{7}}{3} = \frac{\sqrt{7}}{3}$. $AD : AC = \frac{\sqrt{7}}{3} : \sqrt{7} = 1 : 3$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

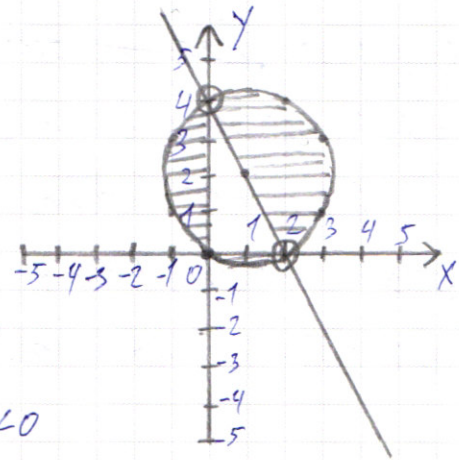
Ответ: 1; 3.

№ 6

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4 \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) \leq 5$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5 \text{ — это}$$



круг с радиусом $\sqrt{5}$ и центром в
точке $(1; 2)$, значит при $x < 0$ и $y < 0$
система не имеет решений.

Если $x < 0$ и $y > 0$, то $|2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4$ равносильно $-2x + y +$
 $+ |4 - 2x - y| \Rightarrow \begin{cases} y < 4 - 2x & (-2x + y + 4 - 2x - y = 4 - 4x > 4) \\ x > 2 & (-2x + y - 4 + 2x + y = 2y - 4 > 4) \end{cases}$

Если $x > 0$ и $y < 0$, то $|2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4$ равносильно $2x - y +$
 $+ |4 - 2x - y| \Rightarrow \begin{cases} y < 4 - 2x & (2x - y + 4 - 2x - y = 4 - 2y > 4) \\ x > 2 & (2x - y + 2x + y - 4 = 4x - 4 > 4) \end{cases}$

Если $x > 0$ и $y > 0$, то $|2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4$ равносильно $2x + y +$
 $+ |4 - 2x - y| \Rightarrow y > 4 - 2x \quad (2x + y + 2x + y - 4 = 2y + 4x - 4 > 4)$, иначе
 $2x + y + 4 - 2x - y = 4 > 4$ — противоречие.

При $x = 0, y > 4$ ($|y| + |4 - y| > 4$), но тогда $(x-1)^2 = 1$, а $(y-2)^2 > 4 \Rightarrow$
 $(x-1)^2 + (y-2)^2 > 5$ — противоречие.

При $y = 0, x > 2$ ($|2x| + |4 - 2x| > 4$), но тогда $(y-2)^2 = 4$, а $(x-1)^2 >$
 $> 1 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 > 5$ — противоречие.

Значит мы проводим прямую, параллельную через выделенные точки $(0; 4)$ и $(2; 0)$ (это же и функция $y = 4 - 2x$).
 При $x < 0$ и $y > 0$ $y < 4 - 2x$ - вся соответствующая часть круга без точки $(0; 4)$. При $x > 0$ и $y < 0$ $y < 4 - 2x$ - вся соответствующая часть круга без точки $(2; 0)$. При $x > 0$ и $y > 0$ $y > 4 - 2x$ - вся часть круга выше прямой без точек $(2; 0)$ и $(0; 4)$.
 Все точки $(x; y)$, удовлетворяющие системе - это площадь круга ~~без~~ радиуса 5 и центром в $(1; 2)$ без площади треугольника с вершинами в точках $(0; 0)$, $(2; 0)$, $(4; 0)$, илюс точка $(0; 0)$. Площадь круга - $\pi R^2 = 5\pi$.
 Площадь треугольника - это $4 \cdot 2 : 2 = 4$.
 Ответ: $5\pi - 4$ илюс точка $(0; 0)$.

N7

Пусть (a) - это $f(a)$. Тогда $(2) = 2$; $(3) = 3$; $(5) = 5$; $(7) = 7$; $(11) = 11$; $(13) = 13$ и $(17) = 17$. т.е. это простые числа. $(4) = (2) + (2) = 4$; $(6) = (2) + (3) = 5$; $(8) = (4) + (4) = 8$; $(9) = (3) + (3) = 6$; $(10) = (2) + (5) = 7$; $(12) = (2) + (6) = 7$; $(14) = (2) + (7) = 9$; $(15) = (3) + (5) = 8$; $(16) = (2) + (8) = 8$; $(18) = (2) + (9) = 8$. Заметим, что $(a) = (a) + (1) = 7(1) = 0$.

Тогда $(1) = (a) + (\frac{1}{a}) = 0 = 7(a) = -(\frac{1}{a})$. Тогда $(\frac{x}{y}) < 0$, если $(y) > (x)$, ведь $(\frac{x}{y}) = (x) + (\frac{1}{y}) = (x) - (y)$. Значит При $x=1, y > 1$; при $x=2, y > 2$; при $x=3, y > 3$; при $x=4, y > 4$; при $x=5$ или $x=6, y > 6$ ($(5) = (6) = 5$); при $x=7, x=10$ или $x=12, y=11$ или $y > 12$ ($(7) = (10) = (12) = 7$); при $x=8$ или $x=9, y=7$ или $y > 9$ ($(8) = (9) = 6$); при $x=11, y=13$ или $y=17$; при $x=13, y=17$; при $x=14, y=11, y=13$ или $y=17$; при $x=15, x=16$ или $x=18, y=11, y=13$,

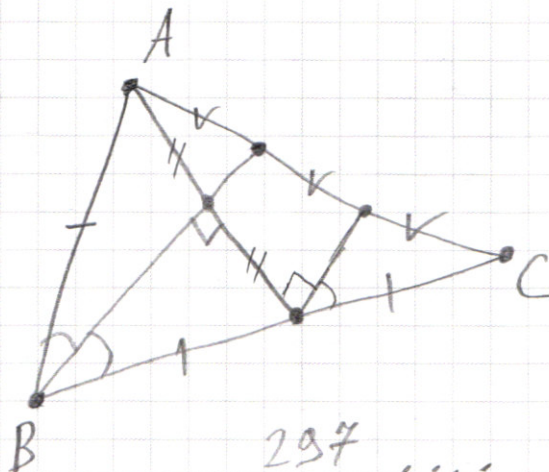
$\angle OAB + \angle OCB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle COA + \angle CBA = 180^\circ$, $\angle COM = \angle OMA \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle COA = 180 - \angle CBA$, $180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle CBA = 2\alpha$, значит $D \in BO$,
 т.к. $\angle DBA = \angle OBA$, $\angle MOA = 2\alpha \Rightarrow 180^\circ - \angle OMA - \angle OAM =$
 $= 90^\circ - \alpha \Rightarrow \alpha = 30^\circ$. Тогда $\angle OCD = 60^\circ \Rightarrow OC = OA = CD = AD = 4$,
 $BC = BA$ и $\angle ABC = 30^\circ \cdot 2 = 60^\circ \Rightarrow BC = BA = AC$. Тогда D - точка
 пересечения медиан, т.к. в равностороннем треуголь-
 нике медианы - это биссектрисы и высоты, а D - пересе-
 чение биссектрисы и высоты. Тогда $DH = \frac{1}{2} CH = 4 : 2 = 2$,
 $S_{ABD} = AB \cdot \frac{1}{2} DH = \frac{1}{2} AB \cdot 2 = AB \cdot 1 = AB = 6 \Rightarrow AB = 6$, CH
 $CH = CD + DH = 4 + 2 = 6$.
 Ответ: 1:1.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)^2 - 2|x-3| + 1}{2x(x-2) + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

$$\frac{|x-3|(|x-3| - 2) + 1}{2x(x-2) + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

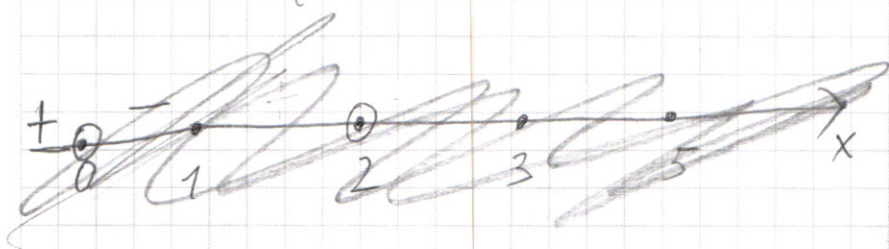


297 ... 153

101 202 ... 448 298

$$2x^2 - 4x + 2x - x^2$$

$$x^2 - 2x < 0$$



$$x \leq 3 \quad (3-x)(3-x-2)+1 = (3-x)(1-x)+1 = 3+x^2-4x+1 = (x-2)^2$$

$$x \geq 3 \quad (x-3)(x-3-2)+1 = (x-3)(x-5)+1 = x^2-8x+16 = (x-4)^2$$

$$x \leq 0 \quad +$$

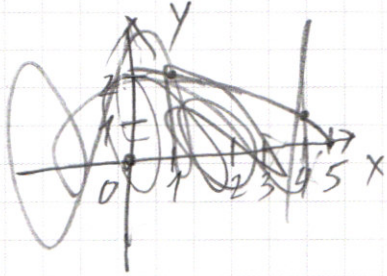
$$0 \leq x \leq 2 \quad -$$

$$x(2-x) + 2x(x-2) = 2x - x^2 + 2x^2 - 4x = x^2 - 2x = x(x-2)$$

$$2 \leq x \quad +$$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy} \Rightarrow x^2 + 4y^2 - 2\sqrt{4xy} = xy \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 5xy + 4y^2 = 0, \text{ где } xy \neq 0 \text{ и } x-2y \neq 0$$

$$y = \sqrt{5-x} \Rightarrow x \leq 5$$



$$(x-4y)(x-y) = 0$$

$$\begin{cases} x=y \Rightarrow y+y^2=5 \\ x=4y \Rightarrow 4y+y^2=5 \end{cases}$$

$$y^2 + y - 5 = 0$$

$$y^2 + 4y - 5 = 0$$

$$(y^2 + 4y + 4) - 9 = 0$$

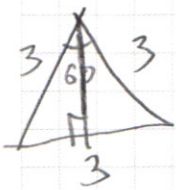
$$(y+2)^2 - 9 = 0$$

$$(y-1)(y+5) = 0$$

$$x, y = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

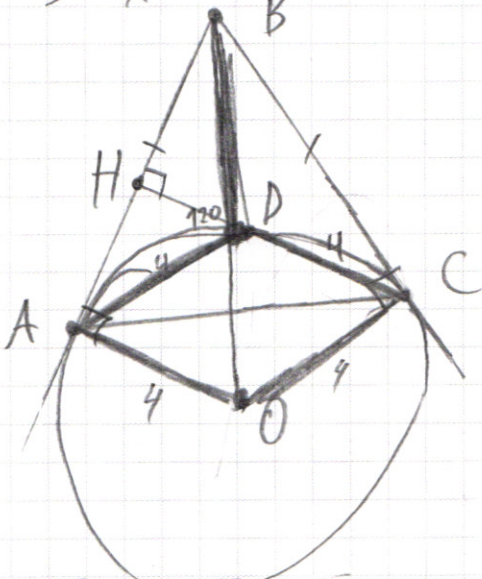
$$y=1 \quad x=4$$

$$y=-5 \quad x=-20$$



$$\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$



$$S_{ABD} = S = \frac{AD \cdot DB \cdot \sin 60}{2}$$



$$AC = \sqrt{7}$$

$$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$BC : AC = AB = \sqrt{7 + \frac{28}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

$$= DE : EA = 2\sqrt{3} : 3$$

$$\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} : \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$$

$$\begin{aligned} & \frac{4 - \sqrt{21}}{2} + \left(\frac{1 - \sqrt{21}}{2} \right)^2 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \left(1 + \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \right) = \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \cdot \frac{3 - \sqrt{21}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{3} \\ & = \frac{(1 - \sqrt{21})(3 - \sqrt{21})}{4} = \frac{21 + 3 - 4\sqrt{21}}{4} = \frac{24 - 4\sqrt{21}}{4} = 6 - \sqrt{21} \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 2|x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4 \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$(x - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) \leq 5$$

$$\cancel{(x-1)^2 + (y-2)^2} \leq 5 \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5$$

$$(2|x| + |y|) + |4 - (2x + y)| > 4$$

$$x < 0 \quad y > 0 \Rightarrow |y - 2x| + |4 - 2x - y| > 4$$

$$\cancel{-(4-2x) + y + |4 - 2x - y|} \geq 0 \quad 2x + y > 4$$

$$\cancel{y - (4-2x) + (4-2x) - y} = 0$$

$$x < 0 \quad y > 0 \Rightarrow y > 4 - 2x$$

$$x < 0 \quad y < 0 \Rightarrow -y - 2x + |4 - y - 2x| > 4$$

$$x > 0 \quad y < 0 \Rightarrow 2x - y + |4 - 2x - y| > 4$$

$$\cancel{-(4-2x) - y + |4 - 2x - y|} \geq 0$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ 2x + y < 4 \end{cases}$$

$$x > 0 \quad y > 0 \Rightarrow 2x + y + |4 - 2x - y| > 4$$

$$2x + y > 4$$

$$x = 0 \quad y > 4$$

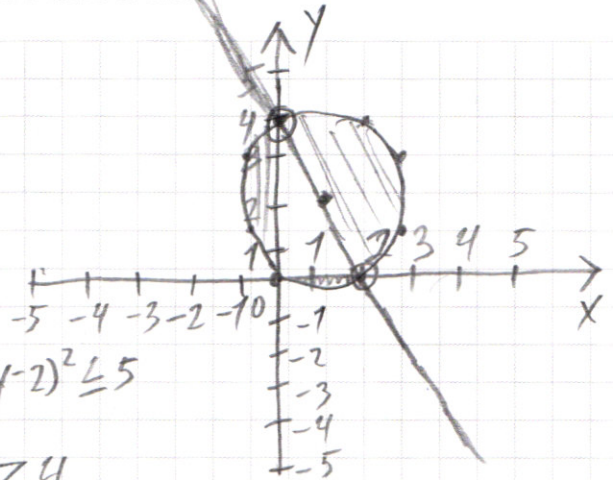
$$y = 0 \quad x > 2$$

$$x < 0 \quad y < 0 \Rightarrow -2x - y + |4 - 2x - y| > 4$$

$$x < 0 \quad y > 0 \Rightarrow -2x + y + |4 - 2x - y| > 4 \quad \begin{cases} 2x + y < 4 \\ y < 4 - 2x \end{cases}$$

$$x > 0 \quad y < 0 \Rightarrow 2x - y + |4 - 2x - y| > 4 \quad \begin{cases} y > 4 \end{cases}$$

$$x > 0 \quad y > 0 \Rightarrow 2x + y + |4 - 2x - y| > 4 \quad \begin{cases} x > 2 \\ 2x + y < 4 \\ y < 4 - 2x \end{cases}$$



$$(f(ab) = f(a) + f(b)) \Rightarrow f(1 \cdot p) = f(p) + f(1) = f(p) = p$$

$$\begin{cases} f(p) = p \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

$$1 \leq x \leq 18$$

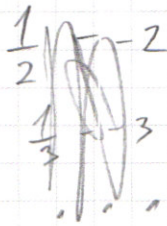
~~$$f(1 \cdot a) = f(1) + f(a) = f(a)$$~~

$$1 \leq x \leq 18$$

~~$$f(6) = f(2) + f(3) = 5$$~~

$$f(6) = 6$$

$$f(x:y) < 0$$



1-0	8-6	14-9
2-2	9-6	15-8
3-3	10-7	16-8
4-4	11-11	17-17
5-5	12-7	18-8
6-5	13-13	
7-7		

$$x=1 \quad y > 1 \quad \checkmark 17$$

$$x=2 \quad \cancel{y > 3, 4} \quad y > 2 \quad \checkmark 16$$

$$x=3 \quad y > 3 \quad \checkmark 185$$

$$x=4 \quad y > 4 \quad \checkmark 14$$

$$x=5 \quad y > 6 \quad 12$$

$$x=6 \quad y > 6 \quad 12$$

$$x = 7; 10; 12 \quad y = 11 \text{ и } y > 12 \quad 7 \cdot 3 = 21$$

$$x = 8; 9 \quad y > 9 \text{ и } y = 7 \quad 10 \cdot 2 = 20$$

$$x = 11 \quad y = 13 \text{ и } y = 17 \quad 2$$

$$x = 13 \quad y = 17 \quad 1$$

$$x = 14 \quad y = 11; 13; 17 \quad 3$$

$$x = 15; 16; 18 \quad y = 14; 11; 13; 17, \quad 4 \cdot 3 = 12$$

$$33 - 48 \quad 62 \quad 44 \quad 86 \quad 107 \quad 127 \quad 129 \quad 130 \quad 133 \quad 145$$

$$17 + 16 + 15 + 14 + 12 + 12 + 21 + 20 + 2 + 1 + 3 + 12 = 145$$