МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство
$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе
$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 18$, $1\leqslant y\leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

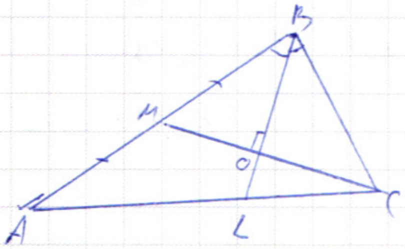
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

Построим треугольник, у которого одна из биссектрисс перпендикулярна одной из медиан



BL - биссектриса, CM - медиана; из условия следует, что: $BL \perp MC$, значит $BO \perp MC$; так как BL - биссектриса, то $\angle MBO = \angle OBC$, и BO - тоже биссектриса

Т.к BO - и биссектриса, и высота в $\triangle MBC$, то он равнобедренный ($MB = BC$). А так как MC - медиана, $MB = MA = \frac{1}{2} AB$.

Значит, чтобы медиана была перпендикулярна высоте, одна из сторон должна быть больше другой в 2 раза.

Пусть $BC = x$, ~~так~~ $AB = 2x$, тогда получим:

$x + 2x + AC = 600$

$3x + AC = 600$

$x = \frac{600 - AC}{3}$.

По условию, все стороны должны быть целочисленными, значит $\frac{600-AC}{3}$ - целое число

$\frac{600-AC}{3} = 200 - \frac{AC}{3}$ значит нужно, чтобы третья сторона была кратна 3. Но при этом сторона AC не должна быть меньше 0 и больше 600, ибо ~~таких~~ треугольников с отрицательными сторонами не существует

600 : 3 ~~н1~~ = 200 ~~н1Z~~, но если взять $AC = 600$, то другие стороны равны 0, значит треугольников ~~Ответ~~ 199

Ответ: 199

№ 1

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

Под модулем находятся: $|x-3|$, $|x|$, $|x-2|$, и при разных значениях x они раскрываются по разному

1 случай: $x\le 0$

$$\frac{x^2-6x+10-2\cdot(-(x-3))}{2x^2-4x-x\cdot(-(x-2))}\le 0 \qquad \frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x}\le 0 \qquad \frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x}\le 0$$

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x}\le 0$$

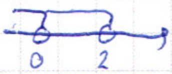
x^2-4x+4 $D=0$, значит x^2-4x+4 всегда больше или равен нулю

Значит, чтобы выражение было меньше или равно нулю, нужно, либо чтобы знаменатель был меньше нуля, либо числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

$$\begin{cases} x^2-2x<0 \\ x\le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-4x+4=0 \\ x^2-2x\ne 0 \\ x\le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-2)^2=0 \\ x\ne 0;\ x\ne 2 \\ x\le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2 \\ x\ne 0;\ x\ne 2 \\ x\le 0 \end{cases}$$

не подходит

$$\begin{cases} x(x-2)<0 \\ x\le 0 \end{cases}$$



не подходит

Ответ: $\varnothing$

2 случай: $0<x\le 2$

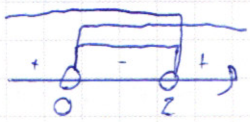
$$\frac{x^2-6x+10-2\cdot(-(x-3))}{2x^2-4x+x\cdot(-(x-2))}\le 0 \qquad \frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x-x^2+2x}\le 0 \qquad \frac{x^2-4x+4}{x^2-2x}\le 0 -$$

~~пример~~ выражение аналогично первому случаю

$$\begin{cases} x^2-2x<0 \\ 0<x\le 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-4x+4=0 \\ x^2-2x\ne 0 \\ 0<x\le 2 \end{cases}$$

– не подходит, т.к. аналогично 1 случаю

$$\begin{cases} x(x-2)<0 \\ x>0 \\ x\le 2 \end{cases}$$



Ответ: $(0;2)$

3. случай: $2<x\le 3$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3 случай: $2 < x \leq 3$

$\frac{x^2-6x+10-2\cdot(-(x-3))}{2x^2-4x+x\cdot(x-2)} \leq 0$ $\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x} \leq 0$ $\frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x} \leq 0$ - решение

Полностью аналогично 1 случаю.

Ответ: $\varnothing$

4. случай: $x > 3$

$\frac{x^2-6x+10-2(x-3)}{2x^2-4x+x\cdot(x-2)} \leq 0$ $\frac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x} \leq 0$ $\frac{x^2-8x+16}{3x^2-6x} < 0$

$\frac{x^2-8x+16}{x^2-2x} \leq 0$ $x^2-8x+16$ $D=0$, значит $x^2-8x+16$ всегда больше или равен нулю.

Значит, получим 2 ситуации:

1) $\begin{cases} x^2-2x<0 \\ x \geq 3 \end{cases}$ - не подходит

2) $\begin{cases} x^2-8x+16=0 \\ x^2-2x \neq 0 \\ x > 3 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-4)^2=0 \\ x(x-2) \neq 0 \\ x > 3 \end{cases}$

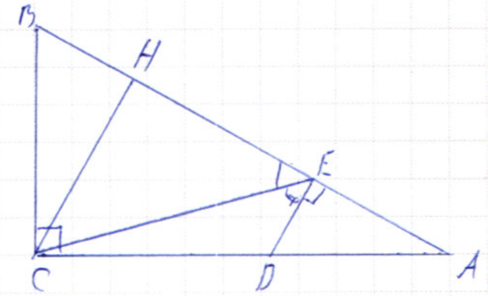
$\begin{cases} x=4 \\ x \neq 0; 2 \\ x > 3 \end{cases}$ - подходит

Ответ: 4

Общий ответ: $(0;2) \cup \{4\}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№ 5



Дано: $\triangle ABC$ - прямоугольный ($\angle C = 90$), $DE \perp AB$, $AC = \sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, $\angle CED = 30^\circ$

Найти: $\frac{AD}{AC}$; S_{AED}

Решение

По теореме Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{7 + \cancel{4}\frac{28}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = 7\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Проведём высоту CH. Из формулы площади прямоугольного треугольника следует: $\frac{1}{2}AB \cdot CH = \frac{1}{2}AC \cdot BC \Rightarrow CH = \frac{AC \cdot BC}{AB}$

$$CH = \frac{\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{\frac{7}{3}}}{7\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{14\sqrt{\frac{1}{3}}}{7\sqrt{\frac{1}{3}}} = 2$$

В $\triangle CHE$ ($\angle H = 90^\circ$):

$\angle CEH = 90 - \angle CED = 60^\circ$

$\angle HCE = 30^\circ \Rightarrow HE = \frac{1}{2} CE$ (прямоугольный треугольник)

Пусть $HE = x$, $CE = 2x$, тогда, по теореме Пифагора:

$2^2 + x^2 = 4x^2$

$3x^2 = 4$

$x^2 = \frac{4}{3}$

$x = \sqrt{\frac{4}{3}}$; $-\sqrt{\frac{4}{3}}$ - не удовлетворяет условию задачи

$x = 2\sqrt{\frac{1}{3}}$ - HE

По теореме Пифагора: $BH^2 = BC^2 - CH^2$

$BH = \sqrt{\frac{28}{3} - 4} = \sqrt{\frac{16}{3}} = 4\sqrt{\frac{1}{3}}$

$BH + HE + EA = AB \Rightarrow EA = AB - BH - HE$ $\quad EA = 7\sqrt{\frac{1}{3}} - 4\sqrt{\frac{1}{3}} - 2\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$ по 2 углам: $\angle DEA = \angle BCA = 90^\circ$, $\angle A$ - общий

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Т.к $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, $\frac{AD}{AB} = \frac{EA}{AC} = k$, $\frac{S_{ABD}}{S_{AED}} = k^2$ $k = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{1}{21}}$

$AD = AB \cdot k = 7\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{21}} = \frac{7}{3}\sqrt{\frac{1}{7}} = \frac{1}{3}\sqrt{7}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{3}$

$S_{AED} = S_{ABC} \cdot k^2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7} \cdot 2\sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \frac{1}{21} = 7\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} = \sqrt{\frac{1}{27}}$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$; $S_{AED} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$

№3

$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = xy \\ x + y^2 = 5 \\ xy \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 = 0 \\ x = 5 - y^2 \\ xy \geq 0 \end{cases}$

$(5-y^2)^2 - 5y(5-y^2) + 4y^2 = 0$

$25 - 10y^2 + y^4 - 25y + 5y^3 + 4y^2 = 0$

$y^4 + 5y^3 - 6y^2 - 25y + 25 = 0$

$y^4 + 5y^3 - 5y^2 - 25y - y^2 + 25 = 0$

$y^3(y+5) - 5y(y+5) + (y+5)(5-y) = 0$

$(y+5)(y^3 - 5y + 5 - y) = 0$

$(y+5)(y(y^2-1) - 5(y-1)) = 0$

$(y+5)(y-1)(y(y+1) - 5) = 0$

$(y+5)(y-1)(y^2+y-5) = 0$ $D = 1 + 20 = 21$ $y = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$

$(y+5)(y-1)(y - \frac{-1+\sqrt{21}}{2})(y - \frac{-1-\sqrt{21}}{2}) = 0$

$y = 5$

$x + 25 = 5$

$x = \cancel{5} - 20$ ~~пне~~

$x \cdot y = -100$ - не удовлетворяет

условию $xy \geq 0$

$y = 1$

$x + 1 = 5$

$x = 4$

$x \cdot y = 4$ - подходит

$y = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$

$x + \frac{1+2\sqrt{21}+21}{4} = 5$

$x = \frac{20}{4} - \frac{22+2\sqrt{21}}{4}$

$x = \frac{-2-2\sqrt{21}}{4}$ - не подходит,

т.к $x \cdot y < 0$

$y = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

$x + \frac{1-2\sqrt{21}+21}{4} = 5$

$x = 5 - \frac{22-2\sqrt{21}}{4}$

$x = \frac{-2+2\sqrt{21}}{4}$

$x = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$ - подходит

Ответ: $(4; 1)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}; \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x \le 0$

$$\frac{x^2-6x+10+2x+6}{2x^2-4x-x\cdot(-x+2)} \le 0$$

$$\frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x} \le 0$$

$x \ne 0$

$$\begin{cases} x^2-4x+4 \le 0 \\ x^2-2x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-4x+4 \ge 0 \\ x^2-2x<0 \end{cases}$$

$(x-2)^2 \ge 0$

$x(x-2)<0$

$x^2-4x+16 \ge 0$

$x(x-2)<0$

$+\ 0\ -\ 2\ +$

Ответ: $(0;2)$

$0<x\le 2$

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x\cdot(-x+2)} \le 0$$

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x} \le 0$$

$$\begin{cases} x^2-4x+4 \le 0 \\ x^2-2x \ge 0 \end{cases}$$

Ответ: $(0;2)$

$2<x\le 3$

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x}$$

$$\frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x} \le 0$$

$x \ge 3$

$$\frac{x^2-6x+10-2x+6}{3x^2-6x} \le 0$$

$$\frac{x^2-8x+16}{x^2-2x} \le 0$$

$$\begin{cases} (x-4)^2 \ge 0 \\ x^2-2x \le 0 \end{cases}$$

$$\frac{22+2\sqrt{21}}{4} + \frac{-1+\sqrt{21}}{2} =$$

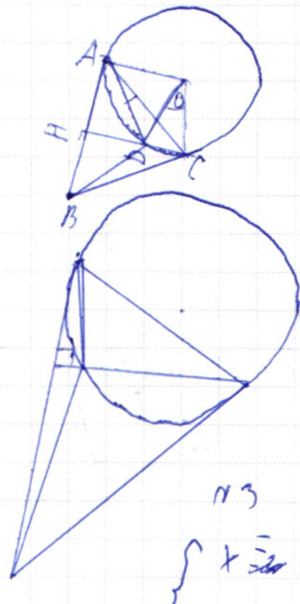
$= 2^2$

$\frac{1}{2} AB \cdot HD = 6$

$AB \cdot HD = 12$

$AB \cdot (HC-DC)$

$AB = BC$



№3

$$\begin{cases} x = \sqrt{xy} + 2y \\ x = 5-y^2 \end{cases}$$

$x=5 \quad x=-4 \quad 1$

$y=0;\ y=-3;\ y=2$

$(y+3)(y^3-2y^2)=0$

$y^2(y+3)(y-2)=0$

$y^4+3y^3-2y^3-6y^2=0$

$$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2 = xy \\ xy \ge 0 \end{cases}$$

$x^2-5xy+4y^2=0$

$y^3(y+3)-2y^2(y+3)=0 \quad 25-10y^2+y^4-25+y^3+4y^2=0 \quad y^4+y^3-6y^2=0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$(y-\frac{1+\sqrt{21}}{2})(y-\frac{1-\sqrt{21}}{2})$

$x^2-4xy+4y^2=xy$

$25-40+16=9$

$x=5-y^2$

$y^3(y+5)-5y(y+5)-y^2+25$

$D=1+20=21$

$y=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

$x^2-5xy+4y=0$

$(y+5)(y^3-5y-y+5)=$

$y^4+y^3-10y^2-5y+25=0$

y^3-6y+5

$(5-y^2)^2-5(5-y^2)y+4y^2=0$

$y^3-1-y^2+y^2-5y-y$

$y^4-10y^2-5y+50=0$

$25-10y^2+y^4-25y+5y^3+4y^2=0$

$(y-1)(y^2+y-5)$

$y^4+2y^3-4y^2-5y=0$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0$

$(y-1)(y^2+y-5)$

$y^2+2x=5-\sqrt{xy}$

$y^4+5y^3-5y^2-y^2-25y+25=0$

$y(y^2-1)-5y+5$

$y^2+10-2y^2=5-\sqrt{5y-y^3}$

$6-\frac{3}{13}=5\frac{10}{13}$

$y^2(y^2-1)+5y^2(y-1)-25(y-1)=0$

$\sqrt{5y-y^3}=y^2-5$

$c\quad d$

$y(y-1)(y+1)=5(y-1)$

$(y-1)(y^2+y+1)+5y^2-25)=0$

$y^4-10y^2+25-5y+y^3+d=6$

$y^3+6y^2-25=0$

$(5-x)\sqrt{5-x}$

$(y-1)(y(y+1)-\frac{75}{13}$

$\frac{325}{13}$

$\frac{c}{1}=\frac{\sqrt{d}}{25}$

$y^3+\frac{3}{13}y^3+5\frac{10}{13}y^2-25$

$(\sqrt{5-x})^3+6(5-x)-25=0$

$25c=d$

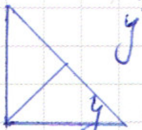
$5c=\sqrt{d}$

$y^2(y+\frac{3}{13})+\frac{75}{13}(y^2-4{,}5)$

$(\sqrt{5-x})^3=6x-5$

$25c^2=d$

$25c=6-c$

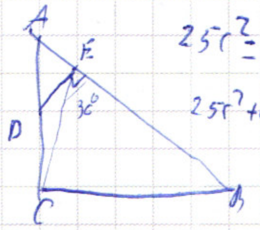


$y^2(y+6)-25=0$

$\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}h\cdot AB$

$26c=6$

$c=\frac{6}{26}\quad\frac{3}{13}$



$25c^2=6-c$

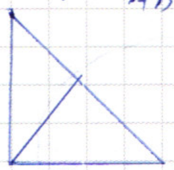
$25c^2+c-6=0$

$h=\frac{AC\cdot BC}{AB}$

$\frac{600-AC}{3}=200-\frac{AC}{3}$

$AC=\sqrt{7}$

$BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$



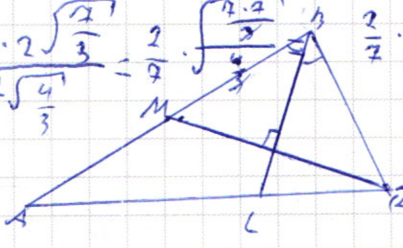
$AB=2BC$

$3x+AC=600$

$\angle CED=30^\circ$

$D=1+600=601$

$\frac{600-AC}{3}=$ целое

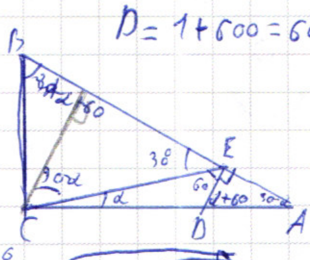


$\frac{\sqrt{7}\cdot2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\sqrt{1}\sqrt{\frac{4}{3}}}=\frac{2}{7}\cdot\sqrt{\frac{7\cdot7}{3}}$

$\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{2}=1$

$\frac{BC}{\sin30}=\frac{BE}{\sin 90-\alpha}$

$\sqrt{7-\frac{28}{3}}=7\sqrt{\frac{4}{3}}$



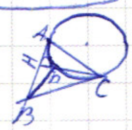
$2BC=\frac{AB-EA}{\sin90-\alpha}$

$\angle ECA+\angle E=30^\circ$

$\boxed{\frac{-1\pm\sqrt{601}}{50}}$

$4\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\sin 90-\alpha=7\sqrt{\frac{4}{3}}$

$\angle B+\angle A=90$



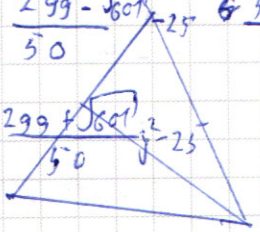
$\begin{cases} y^3+\frac{-1-\sqrt{601}}{50}y^2+\frac{299-\sqrt{601}}{50}-25 \\ y^3+\frac{-1+\sqrt{601}}{50}y^2+\frac{299+\sqrt{601}}{50}y^2-25 \end{cases}$

$\frac{300-1-\sqrt{601}}{50}$

3α

$\angle B-\angle ECA=60^\circ$

$\angle B=\angle EDA$



$180-\alpha-90=90-\alpha$

$\frac{2\sqrt{\frac{7}{3}}}{35}=\frac{2}{\sin 60-\alpha}$

$2\cdot\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\sin 60-\alpha=1$

$\sin 60-\alpha$

$h=1$

$EC=2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА