МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 15

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\left(\frac{(x-5)^2+4}{|x-5|}-4\right)(|x-4|+|x-6|-2) \leqslant 0.$$

2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2-25y^2}=50, \\ 5y+\sqrt{x^2-25y^2}=1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN, касается стороны AB в точке A. Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь треугольника ABN, если известно, что $AB=3$, $BM=1$.

4. [5 баллов] Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается сторон AC и AB в точках E и D. Точка Y – основание перпендикуляра, опущенного из точки E на AB, а X – вторая точка пересечения EY со вписанной окружностью треугольника ABC. Найдите радиус этой окружности, если площадь треугольника AXD равна 12, а $5AD=6EY$.

5. [5 баллов] На доске выписано $10n$ последовательных натуральных чисел ($n \in \mathbb{N}$). Из них выбираются три попарно различных числа, среди которых ровно одно кратно 2 и ровно одно кратно 5. Известно, что можно составить ровно 5 112 таких троек. Чему равно n?

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} 2y+3x \geqslant |2y-3x|, \\ y \leqslant -2x+16, \\ x^2-12y+y^2+16 \geqslant 0 \end{cases}$$

7. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые две последовательные степени числа десять равна 1234.

© МФТИ, 2022

$$\begin{cases} 2y+3x \geq |2y-3x| \\ y \leq -2x+16 \\ x^2-12y+y^2+16 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} 1234 & 10 \\ \underline{10} & \overline{123} \\ 23 & \\ \underline{20} & \\ 34 & \\ \underline{30} & \\ 4 & \end{array}$$

$y \leq -2(x-8)$

$x^2+y^2 \geq 12y-16$

100617

$\overline{xxxxxxx}$

~~10~~

$x \bmod 10^3 + x \bmod 10^4 = 1234$

$\overline{abcd} + \overline{bcd} = 1234$

617

$0617 + 617 = 1234$

117

$1117 + 117 = 1234$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

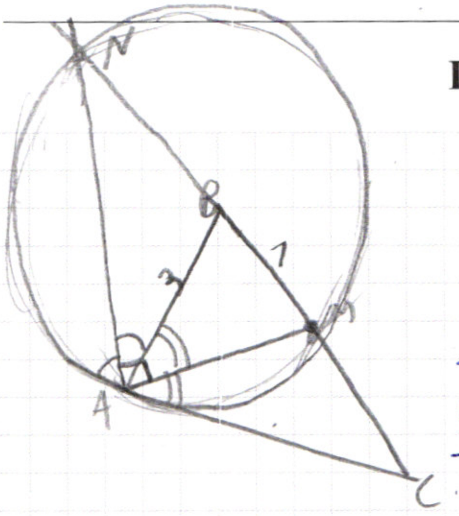
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

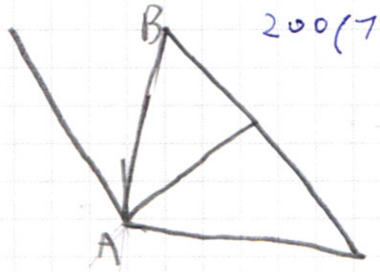
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$20 \cdot 70^2 (72 \cdot 70 - 1)$

$200(719)$



$\times \frac{72}{72}$

504

5172

1 3 ~~5~~ 7 9 11 13 ~~15~~ 17 19

1 ~~2~~ 3 ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ 7 ~~8~~ 9 ~~10~~

10 13 37 79 9 11 11 13 13 17 17 19

20 17 39 7 11 5 13 11 17 13 19

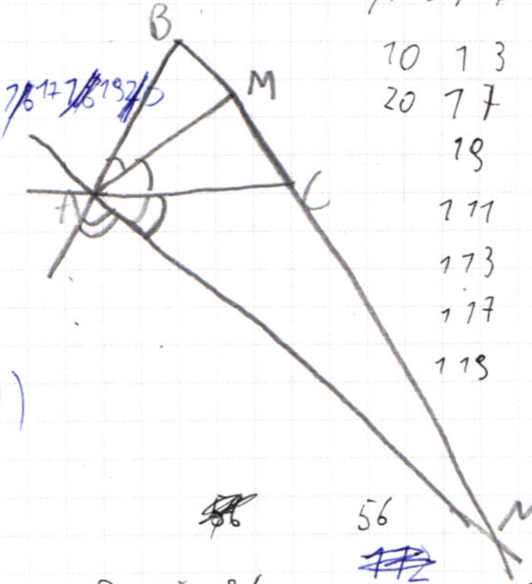
19 3 11 7 13 9 17 11 19

1 11 3 13 7 17 9 19

1 13 3 17 7 19

1 17 3 19

1 19



346

23

$72(72-1)$

$56 + 128$

184

$n(4n) + (4n) \cdot n$

56

$8 \cdot 72 = 96$

5 2 7 54 7 56 7 58 7

$\frac{n \cdot 4n \cdot (4n-1)}{2}$ 56

$2 \cdot 8 \cdot 7$

22

№5

$50(59)$

$\frac{n \cdot 4n \cdot (4n-1)}{2} + \frac{4n \cdot n \cdot 4n}{}$

$n = 6$

$2(72n^3 - n^2)$

$2n^2(4n-1) + 16n^3$

$2n^2(72n-1) = 5112$

$8n^3 - 2n^2 + 16n^3 = 24n^3 - 2n^2$

$n^2(72n-1) = 2556$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{(x-5)^2+4}{|x-5|}-4\right)\left(|x-4|+|x-6|-2\right)$$

$x \neq 5$

$\frac{(x-5)^2+4}{|x-5|}-4 \leq 0$

$|x-4|+|x-6|-2>0$

$(x-5)^2+4 \leq 4|x-5|$

$x^2-10x+29 \leq 4|x-5|$

I

$x-5<0 \quad x<5$

$x^2-10x+29+4x-20 \leq 0$

$x^2-6x+9 \leq 0$

$(x-3)^2 \leq 0$

~~решений нет~~

$x=3$

II

$x>5$

$x^2-10x+29-4x+20 \leq 0$

$x^2-14x+49 \leq 0$

$(x-7)^2 \leq 0$

~~решений нет~~ $x=7$

Первое уравнение:

$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=7 \end{array}\right.$

Второе:

$|x-4|+|x-6|-2 \leq 0$

I — 4 — II — 6 — III

I

$-x+4-x+6-2 \leq 0$

$-2x+8 \leq 0$

$-2x \leq -8$

$x \geq 4$

II

$\cancel{x}-4-\cancel{x}+6-2 \leq 0$

$0 \leq 0$

$x-\forall,\ x \neq 5$

III

$x-4+x-6-2 \leq 0$

$2x \leq 12$

$x \leq 6$

Второе:

$x \in [4;6]$

Ответ: $[4;5) \cup (5;6] \cup \{3;7\}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(29-\overset{9}{\cancel{20}})\overset{49}{(29+20)}$

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2-25y^2}=50 \\ 5y+\sqrt{x^2-25y^2}=1 \end{cases}$$

$29+\sqrt{29^2-25\cdot 4^2}$

-20

$(3\cdot 7)^2$

$29+21=50$

$x^2-25y^2 \geq 0$

$|x| \geq 5|y|$

$x-5y=49$ $\qquad$ $5y=x-49$

$x=49+5y$

$49+5y+\sqrt{7^4+10\cdot 7^2 y+\cancel{25y^2}-\cancel{25y^2}}=50$

$5y+49+\sqrt{7^4+10\cdot\cancel{7}y}=50$

$5y+49+7\sqrt{(49+10y)}=50$

$5y+7\sqrt{(49+10y)}=1$

$x+\sqrt{(x+5y)(x-5y)}=50$

5
88
209

$x+\sqrt{(2x-49)49}=50$

$x+7\cdot\sqrt{2x-49}=50$

$x=$

$x=29$

$x=29$
$y=-4$

$29=49+5y$

$5y=29-49$

$5y=-20$

$y=-4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\left(\frac{(x-5)^2+4}{|x-5|}-4\right)\left(|x-4|+|x-6|-2\right)\leq 0,$ $x\neq 5$ т.к. $|x-5|$ в знаменателе.

произведение двух множителей меньше или равно нулю когда либо множители разного знака либо один из множителей (или оба) равен нулю.

Рассмотрим первую скобку:

$\frac{(x-5)^2+4}{|x-5|}-4\leq 0$

$(x-5)^2+4\leq 4|x-5|$

Метод интервалов:

I $x-5<0$ $x<5$

$x^2-10x+25+4\leq -4(x-5)$

$x^2-10x+29+4x-20\leq 0$

$x^2-6x+9\leq 0$

$(x-3)^2\leq 0$, но квадрат числа неотрицателен => единственное решение

$(x-3)^2=0$

$x-3=0$

$\begin{cases} x=3 \\ x<5 \end{cases}$ => $x=3$

II $x-5>0 \quad x>5$

$x^2-10x+29-4x+20\leq 0$

$x^2-14x+49\leq 0$

$(x-7)^2\leq 0$, по аналогии $\begin{cases}(x-7)^2\leq 0\\(x-7)^2\geq 0\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-7)^2=0$

$x-7=0$

$\begin{cases}x=7\\x>5\end{cases} \Rightarrow x=7$

Получилось, что в любом случае первая скобка неотрицательна, а значит берем только случай, когда она равна 0.

Смотрим вторую скобку

$|x-4|+|x-6|-2\leq 0$

$\xrightarrow{\quad \mathrm{I} \quad 4 \quad \mathrm{II} \quad 6 \quad \mathrm{III} \quad} x$

метод интервалов

I

$x<4$

$-x+4-x+6-2\leq 0$

$-2x+8\leq 0$

$2x\geq 8$

$\begin{cases}x\geq 4\\x<4\end{cases}$ пересечений нет, решений нет

II

$4\leq x\leq 6$

$\cancel{x}-4-\cancel{x}+6-2\leq 0$

$0\leq 0 \Rightarrow x-\forall$

и скобка обращается в 0

но не забываем, что $x\neq 5$

III $x>6$

$x-4+x-6-2\leq 0$

$2x-12\leq 0$

$2x \overset{\leq}{\cancel{\geq}} 12$

$x \cancel{\geq} 6$ $\begin{cases}x\leq 6\\x>6\end{cases}$ пересечений нет решений нет.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Получаем только те решения, в которых произведение равно 0, т.к. обе скобки получились неотрицательны, т.е. одного знака.

Ответ: $[4;5)\cup(5;6]\cup\{3;7\}$

N2

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2-25y^2}=50 \\ 5y+\sqrt{x^2-25y^2}=7 \end{cases}$$

$$x-5y+\cancel{\sqrt{x^2-25y^2}}-\cancel{\sqrt{x^2-25y^2}}=50-7$$

$$x-5y=43$$

$$5y=x-43$$

проведем замену

$$x+\sqrt{x^2-(5y)^2}=$$

$$x+\sqrt{(x-5y)(x+5y)}=$$

$$x+\sqrt{(x-x+43)(x+x-43)}=$$

$$x+\sqrt{43(2x-43)}=$$

$$x+7\sqrt{2x-43}=50$$

рассмотрим функцию $\left(x+7\sqrt{2x-43}\right)$

$$2x-43\geq 0$$

$x\geq\frac{43}{2}$ т.е. x - положительный. Мы видим что при увеличении x увеличивается все значение функции.

Данная функция полностью одномонотонна => для каждого значения функции существует только 1 значение x, т.е. решение системы всего 1.
Решил методом подбора.

$x=29$

проверка.

$29+\sqrt{(29-29+49)(29+29-49)}=50$

$29+\sqrt{49\cdot(58-49)}=50$

$29+\sqrt{7^2\cdot 9}=50$

$29+\sqrt{7^2\cdot 3^2}=50$

$29+7\cdot 3=50$

$29+21=50$

$50=50$ верно

но

$x-5y=49$

$5y=x-49$

$5y=29-49$

$5y=-20$

$y=-4$

Ответ: $(29; -4)$

№5

Среди 10 выписанных ~~чисел~~ подряд идущих натуральных чисел есть ровно 1 число, делящееся только на 5, 4 числа, делящихся только на 2 и 1 число, делящееся и на 2 и на 5.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим все возможные тройки чисел как сумму троек

1) где 1 число кратно 10 (и 5 и 2) а другие 2 не кратны ни 5 ни 2

2) где 1 число кратно только 2 (не кратно 10)
второе кратно только 5 (не кратно 10)
третье число не кратно ни 5 ни 2.

1)
Среди 10n чисел (последовательно идущих натуральных) есть ровно n чисел кратных 10.
Среди оставшихся есть 4 числа, не кратных ни 2 ни 5, например

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 — кратно 10
не кратны ни 5 ни 2

тогда всевозможные варианты имеют формулу
кратно 10 · не кратно ничему · не кратно ничему, минус 1 уже выбранное

$$\frac{n \cdot 4n \cdot (4n-1)}{2}$$

— делим на 2 т.к. получаются повторяющиеся варианты типа 10, 7, 3
10, 3, 7

2) n - чисел кратных только 5
4n - четных чисел без чисел кратных 10
4n - нечетных (не кратных 2) чисел, без чисел, кратных 5.
итого, данные тройки имеют формулу $4n \cdot 4n \cdot 4$

Количество всех возможных троек можно записать по формуле

$\frac{n \cdot 4n^2 \cdot (4n-1)}{2} + 4n \cdot 4n \cdot n$

$n^2(4n-1) + 16n^3$

$4n^3 - n^2 + 16n^3$

$24n^3 - n^2$

$2n^2(12n-1) = 5112$

решаю методом подбора и получаю, что

$2 \cdot 6^2(12 \cdot 6 - 1) = 2 \cdot 36(72-1) = 72 \cdot 71 = 5112 \Rightarrow$

Ответ: $n = 6$

№7

Скажем, число имеет вид $x = \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6}$

при делении числа на 10^n получаем последние n чисел как остаток, они как бы просто отбрасываются.

смотрим. ~~?~~

$x \bmod 10^n + x \bmod 10^{n+1} = 1234$

$n=1$ не подходит. даже $9 + 99 < 1234$

$n=2$ – $999 + 99 = 1098 < 1234$

$n=3$ подходит, ~~получится число остающуюся 4 разрядами~~.

~~$n=4$ не подходит~~ $n=4$ тоже подходит, но не подходит $n=5$ т.к. на 1 разряде не может быть 0 мы получим 6 значное число.

есть 2 варианта получить 1234

1) $\overline{abcd} + \overline{bcd} = 1234$ при $n=3$ оставшиеся две цифры любые, (но на 1 месте не 0)

$0617 + 617 = 1234$

2) $1117 + 117 = 1234$ 9 цифр на 1 разряд

10 цифр на 2. разряд

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

для

$\overline{x_3x_4x_5x_6} = 0617$

есть $9 \cdot 10$ вариантов

и для

$\overline{x_3x_4x_5x_6} = 7117$

есть точно так же $9 \cdot 10$ вариантов.

при $n=4$ нужно чтобы $x_2 = 0$ и будут те же $\overline{x_3x_4x_5x_6}$ но варианты, когда $x_2 = 0$ уже включены в выше перечисленные.

Итого, всего существует $(9 \cdot 10)+(9 \cdot 10) = 2 \cdot 9 \cdot 10 =$
$= 18 \cdot 10 = 180$ чисел

Ответ: 180