МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 Рассмотрим сначала точки $x=0$, $x=2$, $x=3$, чтобы потом при работе с модулями рассматривать только строгие неравенства (для удобства). Пусть $f(x)=\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}$

$x=0 \Rightarrow 2x^2-4x+|x|\cdot|x-2| = 0-0+0\cdot|0-2|=0$. Функция f не определена в точке 0, значит $x=0$ не войдет в ответ.

$x=2 \Rightarrow 2x^2-4x+|x|\cdot|x-2| = 2\cdot4-4\cdot2+|2|\cdot|2-2| = 8-8+|2|\cdot0=0$.

Аналогично $x=2$ не подходит. ($f(2)$ не определена)

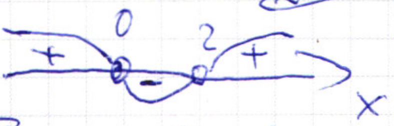
$x=3 \Rightarrow \frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} = \frac{9-18+10-2|3-3|}{2\cdot9-12+|3|\cdot|3-2|} = \frac{-1}{18-12+3} = -\frac{1}{9}<0$

Точка $x=3$ подходит.

Рассмотрим случаи раскрытия модулей:

I. ~~$x<0$~~ $x\in(-\infty;0)$

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} = \frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+(-x)\cdot(2-x)} = \frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x} = \frac{(x-2)^2}{3(x-2)x}\le 0$$



$x\in(0;2)$ $\quad \begin{cases} x\in(0;2) \\ x\in(-\infty;0) \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x\in\varnothing}$

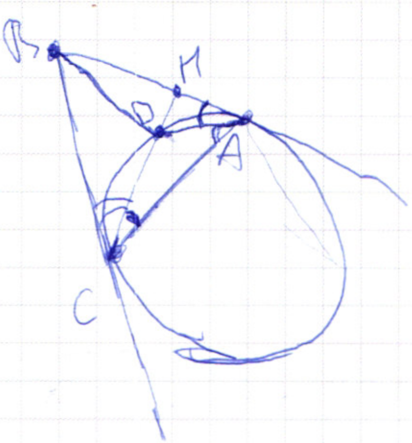
II. $x\in(0;2)$

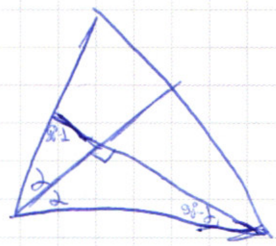
$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} = \frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x(2-x)} = \frac{x^2-4x+4}{x^2-2x} = \frac{(x-2)^2}{x(x-2)}\le 0$$

Очевидно, ответ такой же $x\in(0;2)$, как и в I, так как коэффициент $\frac{1}{3}$ никак не меняет знак. $\begin{cases} x\in(0;2) \\ x\in(0;2) \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x\in(0;2)}$

$$\frac{\sqrt{77}-7}{2}+\frac{77+7-2\sqrt{77}}{4}=\frac{77\cdot2-\sqrt{77}\cdot2}{4}$$

$$\cancel{\frac{77-\sqrt{77}}{2}+\frac{\sqrt{77}-7}{2}}$$

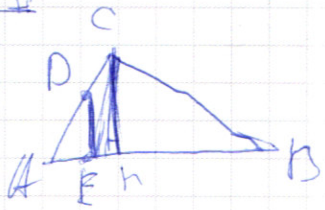




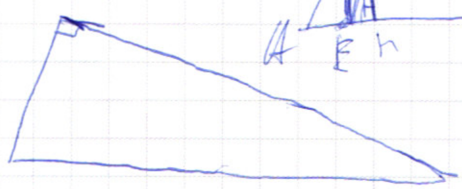
x, 2x, 600-3x

600-3x>0 => x<200

600-3x+x>2x



x+18



$\frac{BH}{CH}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 (продолжение)

III. $x \in (2;3)$

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} = \frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x(x-2)} = \frac{(x-2)^2}{3x^2-6x} = \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \le 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \in (0;2)$ аналогично с II. $\begin{cases} x \in (0;2) \\ x \in (2;3) \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$

IV. $x \in (3;+\infty)$

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} = \frac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x(x-2)} = \frac{x^2-8x+16}{3x^2-6x} = \frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \le 0$$

$x \in (-\infty;0) \cup (2;4]$

$\begin{cases} x \in (-\infty;0) \cup (2;4] \\ x \in (3;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3;4]$

Мы рассмотрели все случаи. Объединим их, не забудем добавить точки.

$\left[\begin{array}{l} x \in \varnothing \\ x \in (0;2) \\ x \in \varnothing \\ x \in (3;4] \\ x = 3 \\ x \ne 2 \\ x \ne 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$ Ответ: $x \in (0;2) \cup [3;4]$

№3 $f(x) = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = (f(x))^2 \\ f(x) \ge 0 \end{cases}$. Тогда

$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy} \\ x+y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y \ge 0 \\ (x-2y)^2 = xy \ (1) \\ x+y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2y \\ \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = 4y \end{array}\right. \\ x+y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 2y \\ x = 4y \\ y^2+4y-5=0 \ (2) \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 2y \\ x = y \\ y^2+y-5=0 \ (3) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

(1) $x^2-4xy+4y^2-xy = 0 = x^2-5xy+4y^2 = (x-y)(x-4y) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = 4y \end{array}\right.$

(2) $y^2+4y-5=0 = (y+5)(y-1) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -5 \end{array}\right.$

~~(3) $y^2+y-5=0 = (y+3)(y-2) \Rightarrow$~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №2

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение)

(3) $y^2+y-5=0$. $D=1^2-4\cdot1(-5)=21 \Rightarrow y_1,y_2=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 2y \\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-20\\y=-5\end{cases}\end{array}\right.\end{cases} \\ \begin{cases} x\geq 2y \\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\\y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\\y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

Заметим, что при $x=y$: $x\geq 2y \Rightarrow 2y-x\geq 0 \Rightarrow 2x-x=x\geq 0$. Подойдет только $x\geq 0$, $y\geq 0$. Также $21>1 \Rightarrow \sqrt{21}>1$

$\Leftrightarrow$ Ответ: $(x;y)=(4;1), \left(\frac{\sqrt{21}-1}{2}; \frac{\sqrt{21}-1}{2}\right)$

№ Сначала рассмотрим второе неравенство:

$x^2-2x-4y+y^2 = x^2-2x+1-1+y^2-4y+4-4 = (x-1)^2+(y-2)^2-5 \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2 \leq 5$. Это внутреняя область окружности с координатами центра $(1;2)$ и радиусом $r=\sqrt{5}$, граница включена. Докажем по индукции, что $|a_1|+...+|a_n| \geq |a_1+...+a_n|$, при $n\geq 2$, причем равенство достигается, когда $a_1,...,a_n$ одного знака. Мы также знаем, что $|x|\geq x$, причем при $x<0$ $|x|>x$, при $x\geq 0$ $|x|=x$.

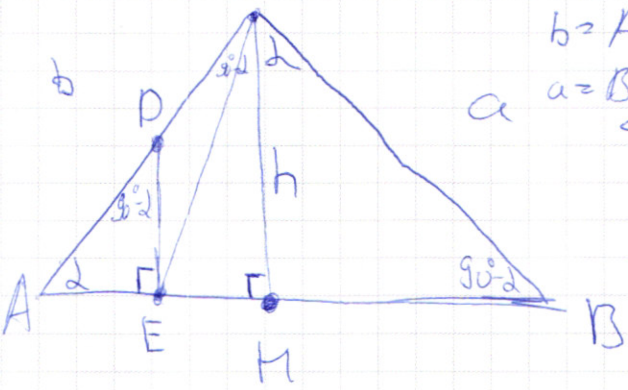
База: $|a_1a_2|\geq a_1a_2 \Rightarrow 2|a_1a_2|\geq 2a_1a_2 \Rightarrow a_1^2+2|a_1a_2|+a_2^2 \geq a_1^2+2a_1a_2+a_2^2$, $a_1^2=(|a_1|)^2 \Rightarrow (|a_1|)^2+2|a_1a_2|+(|a_2|)^2 = (|a_1|+|a_2|)^2 \geq a_1^2+2a_1a_2+a_2^2=(a_1+a_2)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{(|a_1|+|a_2|)^2} \geq \sqrt{(a_1+a_2)^2} \Rightarrow ||a_1|+|a_2|| = |a_1|+|a_2| \geq |a_1+a_2|$, причем равенство при $|a_1a_2| = a_1a_2 \Rightarrow a_1a_2\geq 0 \Rightarrow a_1, a_2$ одного знака.

Переход: пусть $|a_1|+...+|a_n| \geq |a_1+...+a_n|$, и равенство, когда они одного знака.

$$|a_1|+...+|a_{n+1}| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{первые } n \text{ одного знака} \\ \text{равенство}}}{\geq} |a_1+...+a_n|+|a_{n+1}| \underset{\substack{\uparrow \\ a_1+...+a_n \text{ одного знака с } a_{n+1}}}{\geq} |a_1+...+a_{n+1}|$$

Если $a_1,...,a_n$ отрицательные, то т.к. $a_1+...+a_n$ меньше 0, то и a_{n+1} меньше 0, значит $a_1,...,a_{n+1}$ меньше 0. Аналогично для другого случая. Переход доказан.

№5



Дано:
$b=AC=\sqrt{7}$
$a=BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$
$\angle CED=30^\circ$

Пусть $AC=b$, $BC=a$, $\angle CAB=\alpha$. Расставим очевидные углы. ~~В ΔCEH~~: Проведем высоту CH, $CH=h$.

$DE\perp AB$, $CH\perp AB \Rightarrow DE \parallel CH \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CED = \angle ECH \Rightarrow tg\angle CED = tg\angle ECH = \frac{EH}{CH}$. Выразим h.

$\triangle BHC \sim \triangle BCA$ по 2 углам $\Rightarrow \frac{CH}{AC}=\frac{BC}{AB} \Rightarrow h=\frac{a\cdot b}{AB}=\boxed{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

$tg\angle CED=\frac{EH}{CH} \Rightarrow EH = CH\, tg\angle CED = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\, tg30^\circ = \frac{ab}{\sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{3(a^2+b^2)}}$

$tg30^\circ=\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Также $AH=\sqrt{b^2-h^2}=\sqrt{b^2-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}=\sqrt{\frac{b^4+a^2b^2-a^2b^2}{a^2+b^2}}=$
$=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. $DE\parallel CH \Rightarrow$ по т. Фалеса:

$\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AH}=\frac{AH-EH}{AH}=1-\frac{EH}{AH}=1-\frac{\frac{ab}{\sqrt{3(a^2+b^2)}}}{\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}}=1-\frac{\frac{ab}{\sqrt{3}}}{b^2}=1-\frac{a}{b\sqrt{3}}=$

$=1-\frac{2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}=1-\frac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=1-\frac{2}{3}=\boxed{\frac{1}{3}}$

$\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}\Rightarrow AD=\frac{AC}{3}=\frac{\sqrt{7}}{3}$; $AE=AH-EH=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{ab}{\sqrt{3(a^2+b^2)}}$. $=$

Отдельно посчитаем $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{7+4\cdot\frac{7}{3}}=\sqrt{\frac{21}{3}+\frac{28}{3}}=\sqrt{\frac{49}{3}}=\frac{7}{\sqrt{3}}$

$=\frac{b^2}{\frac{7}{\sqrt{3}}}-\frac{ab}{\sqrt{3}\cdot\frac{7}{\sqrt{3}}}=\frac{7\sqrt{3}}{7}-\frac{2\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\sqrt{7}}{7}=\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{3-2}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

~~S~~ $ED=\sqrt{AD^2-AE^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\frac{7}{9}-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{7}{9}-\frac{3}{9}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

$S_{AED}=\frac{AE\cdot ED}{2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{3\sqrt{3}}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{9}}$ Ответ: $\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$, $S_{AED}=\frac{\sqrt{3}}{9}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

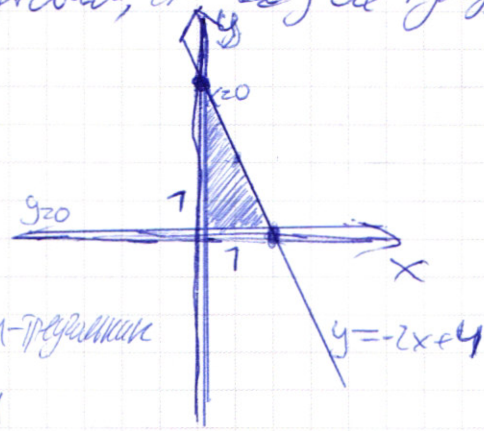
№6 (продолжение)

$|2x|+|y|+|4-2x-y| \geq |2x+y+4-2x-y| = |4| = 4$. По нам дано строгое неравенство. Значит, подходят все x, y, кроме тех, при которых неравенство обращается в равенство, а это значит, как я уже высказывал, что все подмодульные выражения одного знака.

I. $2x \geq 0,\ y \geq 0,\ 4-2x-y \geq 0$

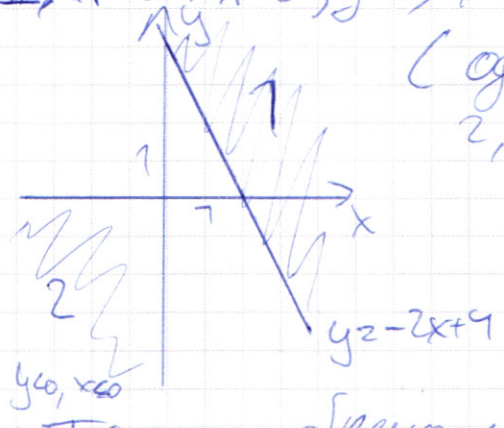
$4-2x-y \geq 0 \Rightarrow y \leq -2x+4$

$2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$



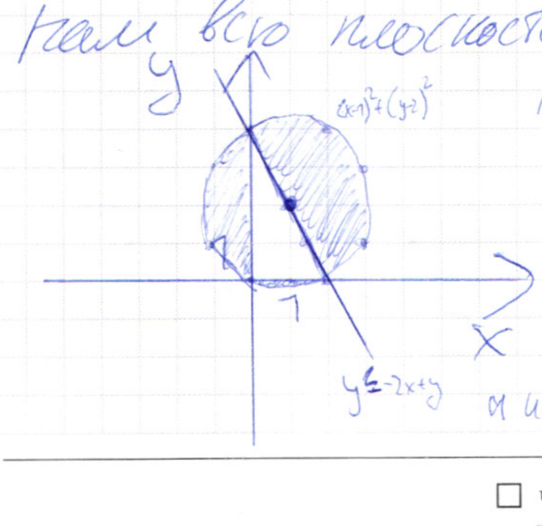
Область, соответствующая неравенствам — треугольник

II. $2x<0 \Rightarrow x<0,\ y<0,\ 4-2x-y<0 \Rightarrow y>-2x+4$



С одной стороны, должно лежать в области 2, с другой — в области 1, значит нет случаев и $x \in \emptyset, y \in \emptyset$. Можно и через алгебру показать: $x<0 \Rightarrow -x>0 \Rightarrow y > 4+(-2x)>0$. Но $y<0$. Противоречие.

Таким образом, неравенство $|2x|+|y|+|4-2x-y|>4$ дает нам всю плоскость кроме треугольника.



Площадь — это площадь внутри окружности без площади треугольника. Покажем, что треугольник полностью входит в окружность.

$y=0 \Rightarrow -2x+4=0 \Rightarrow x=2$, $x=0 \Rightarrow y=0+4=4$.

Заметим, что $(0-1)^2+(0-2)^2=1+4=5$, $(0-1)^2+(4-2)^2=1+4=5$, $(2-1)^2+(0-2)^2=1+4=5$. Значит, он вписан в окружность и искомая площадь $S=\pi r^2-2\cdot4=\pi\cdot(\sqrt{5})^2-2\cdot4=5\pi-8$. Ответ: $5\pi-8$

№7 (продолжение)

Тогда у нас получается $S = 0+1+2+3+4+4+5+5+6+6+6+$ (например, это число означает, что при $y=6$ и $f(y)=5$ есть 4 x, таких что $f(y)>f(x)$)

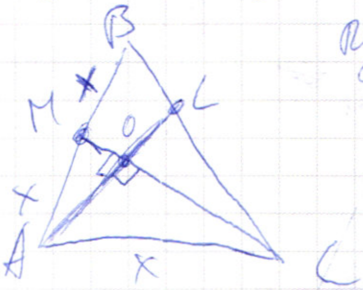
$+7+7+7+8+10+12+16 = 14+10+18+21+18+12+16 =$

$= 30+30+28+21 = 60+49 = 109$ Ответ: 109

Это и есть ответ, так как мы для всех случаев y рассмотрели все случаи x.

№2

Понятно, что медиана и биссектриса должны выходить из разных углов.



Пусть CM - медиана, AL - биссектриса, $AM = BM = x$.

$\angle AMO = 90^\circ - \angle MAO$

$\angle ACO = 90^\circ - \angle CAO$

$\angle MAO = \angle CAO$ (бисс.)

$\Rightarrow \angle AMO = \angle ACO \Rightarrow \triangle MAC$ - р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow AM = AC \Rightarrow AC = x$

То есть у треугольников, удовлетворяющих условию, одна сторона в два раза больше другой. Также заметим, что если дан x, то треугольник задан однозначно по трем сторонам $(x, 2x, 600-3x)$. Запишем ограничения на x, учитывая, что вырожденные треугольники (отрезки) не подходят.

$x > 0,\ 2x > 0,\ 600-3x > 0$ - стороны больше 0

$\Rightarrow x > 0,\ x < 200$

$x + 2x > 600-3x \Rightarrow 6x > 600 \Rightarrow x > 100$, $600-3x+x > 2x \Rightarrow 4x < 600 \Rightarrow x < 150$, $600-3x+2x > x \Rightarrow x < 300$, неравенство треугольника

Самые узкие границы -

$100 < x < 150$, также стороны целочисленные $\Rightarrow x \in \mathbb{N}$. от 101 до 149 включительно 49 вариантов x, значит и 49 вариантов треугольников. Ответ: 49. Примечание: мы использовали все возможные ограничения x, значит меньше ответ не будет

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

Рассмотрим некоторое простое p.

$f(p) = f(p\cdot 1) = f(p) + f(1) \Rightarrow f(1) = f(p) - f(p) = 0$. Найдём все значения функции от 1 до 18. $f(1)=0$, $f(2)=2$, $f(3)=3$, $f(4)=f(2\cdot 2)=f(2)+f(2)=4$, $f(5)=5$, $f(6)=f(3\cdot 2)=f(3)+f(2)=5$, $f(7)=7$, $f(8)=f(4\cdot 2)=f(4)+f(2)=4+2=6$, $f(9)=f(3\cdot 3)=f(3)+f(3)=6$, $f(10)=f(2)+f(5)=7$, $f(11)=11$, $f(12)=f(2\cdot 6)=f(2)+f(6)=7$, $f(13)=13$, $f(14)=f(2\cdot 7)=f(2)+f(7)=9$, $f(15)=f(3\cdot 5)=f(3)+f(5)=8$, $f(16)=f(2\cdot 8)=f(2)+f(8)=2+6=8$, $f(17)=17$, $f(18)=f(2\cdot 9)=f(2)+f(9)=8$. Докажем, что функция однозначна. $f(p^n)=pn$. База: при $n=1$ $f(p)=p$. Переход:

$f(p^{n+1}) = f(p^n\cdot p) = f(p^n)+f(p) = pn+p = p(n+1)$.

$f(p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{n_k}) = n_1p_1+\ldots n_kp_k$. Индукция по k. База: при $k=1$ $f(p_1^{n_1})=n_1p_1$.

Переход: $f(p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_{k+1}^{n_{k+1}}) = f(p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{n_k}) + f(p_{k+1}^{n_{k+1}}) = (n_1p_1+\ldots+n_kp_k)+n_{k+1}p_{k+1}$.

Ч.т.д. Значит ~~значения~~ значение функции – это сумма всех простых множителей на простые множители при разложении. Так как разложение натурального числа однозначно, $f(x)$ для $x\in N$ однозначна. Рассмотрим числа вида $\frac{m}{n}$, где m, n – натуральные. Это все рац. полож. числа. $f(m)=f(n\cdot\frac{m}{n})=f(n)+f(\frac{m}{n}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{f(\frac{m}{n}) = f(m)-f(n)}$, $f(m)$ и $f(n)$ однозначны $\Rightarrow f(m)-f(n)$ однозначно. Также заметим, что $f(\frac{km}{kn}) = f(km)-f(kn) = f(k)+f(m)-f(k)-f(n) = f(m)-f(n)$. Однозначна функция.

$f(\frac{x}{y}) = f(x)-f(y) < 0 \Rightarrow \underline{f(y) > f(x)}$. Выпишем $f(1),\ldots,f(18)$ в порядке неубывания.

f(n)	1	2	3	4	5	5	6	6	7	7	7	8 [illegible]	8	8	8	9	11	13	17
n	1	2	3	4	5	6	8	9	7	10	12	[illegible]	15	16	18	14	11	13	17

Нижний ряд показывает, что я не ошибся во время переноса.

Нам нужно найти кол-во пар x, y / $f(y)>f(x)$. Будем двигаться по верхнему ряду и для каждого значения $f(y)$ считать, сколько значений f меньше.