МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y| > 6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y) < 0$.

$\boxed{1}$ при $x<0$:

$$\frac{x^2-2x+5+4x-4}{5x^2-15x} \le 0 \quad \text{т.е.} \quad \frac{\overset{\geq 0\ \forall x}{(x+1)^2}}{5x(x-3)} \le 0$$ → вып. только при $x=-1$

т.к. $x<0$, $\Rightarrow 5x<0$, $x-3<-3$, $5x(x-3)>0$

при $0\leq x<1$:

$$\frac{x^2+2x+1}{4x^2-12x+x(3-x)} \le 0 \iff \frac{\overset{\geq 0\ \forall x}{(x+1)^2}}{\underbrace{3x}_{>0}\underbrace{(x-3)}_{<0}} \le 0$$ → $x\in(0;1)$

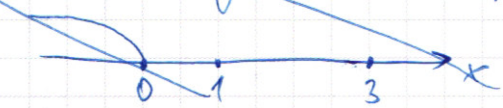
при $1\leq x<3$:

$$\frac{x^2-6x+9}{4x^2-12x+x(3-x)} \le 0 \iff \frac{\overset{\geq 0\ \forall x}{(x-3)^2}}{\underbrace{3x}_{>0}\underbrace{(x-3)}_{<0}} \le 0$$ → $x\in[1;3)$

при $x\geq 3$:

$$\frac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+x(x-3)} \le 0 \iff \frac{\overset{\geq 0\ \forall x}{(x-3)^2}}{\underbrace{5x}_{>0}\underbrace{(x-3)}_{>0}} \le 0$$ → $\varnothing$

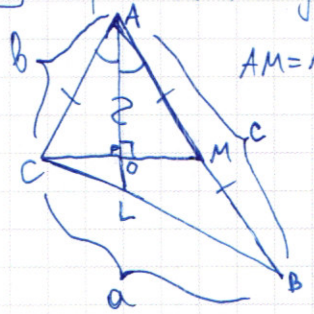
~~Решение методом интервалов:~~



ОДЗ: $\begin{cases} x\neq 3, \\ x\neq 0 \end{cases}$

Ответ: $x\in\{-1\}\cup(0;3)$

$\boxed{2}$ При таком условии всегда:



AM=AC т.к. п/у $\triangle AMO = \angle ACO$ по углу и катету

$\Rightarrow$ сторона, к которой проведена медиана (обозн. c) в два раза больше стороны, вместе с которой они образуют угол, из которого проведена биссектриса (обозн. в), т.е.

$c=2в$

по условию $a+в+c=300$ (а – третья сторона)

$\Rightarrow a+3в=300$. Из нерав.-ва тр.-ка следует

$a<в+c$ и $a+в>c$ $\Rightarrow a<3в$ и $a>c-в \iff a>в$

Итак, $\begin{cases} a+3в=300 \\ a>в \end{cases}$ и $\begin{cases} a+3в=300 \\ a<3в \end{cases}$.

Отсюда $4в>300$ и $6в<300$ т.е. $в\in(50;75)$. В целых числах в может принять 24 разл. значения от 51 до 74 включительно.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

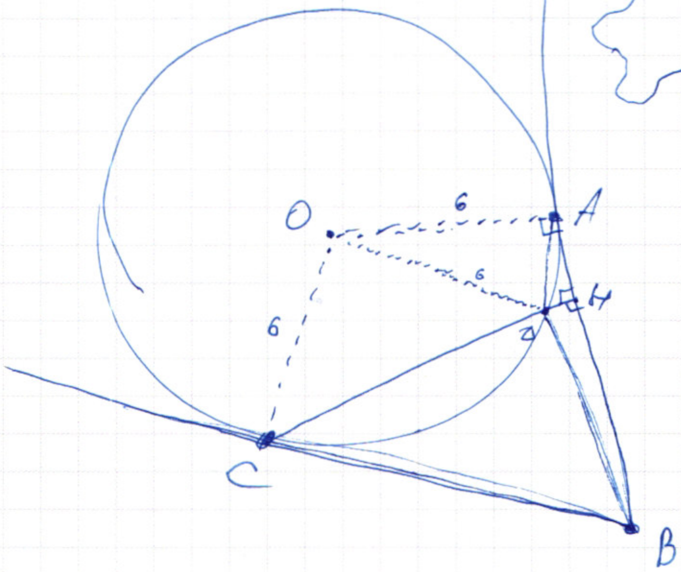
(Нумеровать только чистовики)

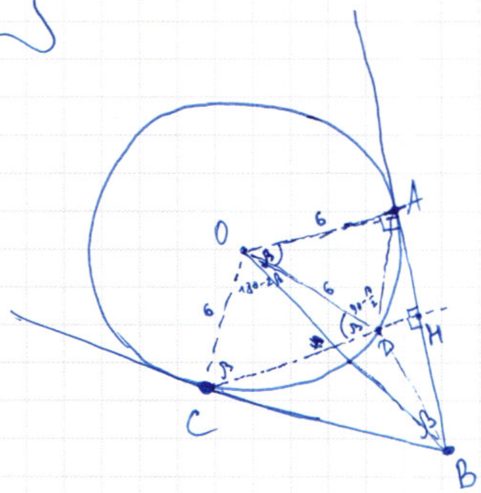
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{4}$

$|-3|+|5|=8$

$|-3+5|=2$





$S_{ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot DH$

$AB=\frac{2S_{ABD}}{DH}$

$\boxed{6}$

$$\begin{cases}|3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6,\\ x^2-2x-3y+y^2\le 0 \quad (2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x(x-2)\le -y(y-3)\\ \end{cases}$$

$$y=1:\ \begin{cases}|3x|+2+|4-3x|>6\\ x^2-2x-2\le 0\end{cases}$$

(2): $y<-\frac{D}{4a}$ т.е. $y<-\frac{4-4(y^2-3y)}{4}$

$y<-1+y^2-3y$

$y^2-4y-1>0$

$\frac{AB}{CH}=\frac{2S_{ABD}}{DH\cdot CH}$

$DH\cdot CH=AH^2$

$\frac{DH}{AH}=\frac{AH}{CH}=\frac{AD}{AC}$ $(\triangle OAD\sim\triangle BAC)$ $=\frac{R}{AB}$

$AB=\frac{2S_{ABD}}{DH}$

$\frac{AB}{CH}=\frac{2S_{ABD}}{AH^2}=\frac{2S_{ABD}}{\frac{R^2\cdot CH^2}{AB^2}}$

$\frac{AB^2}{CH^2}\cdot\frac{2S_{ABD}}{R^2}=\cancel{\frac{AB}{CH}}$

$\frac{AB}{CH}\cdot\frac{2S_{ABD}}{R^2}=1$

$\frac{AB}{CH}=\frac{R^2}{2S_{ABD}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Поскольку $c=2в$, а $a=300-3в$, каждому значению $в$ соотв-ет ровно один треугольник и таких 24. Ответ: 24.

$\boxed{3}$ $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$

$$\begin{cases} y-2x\geqslant 0 & (*) \\ xy=(y-2x)^2 \quad (y^2-4xy+4x^2) & (1) \\ 2y+x^2=9 & (2) \end{cases}$$

из (2) $\Rightarrow y=\dfrac{x^2-9}{-2}$ (2')

Подставив (2') в (1) получаем:

$$\left(\frac{9-x^2}{2}\right)^2-5x\left(\frac{9-x^2}{2}\right)+4x^2=0 \quad |\cdot 4$$

$$\Updownarrow$$

$$x^4+10x^3-2x^2-90x+81=0$$

$x=1,\ x=-9$ – корни

$$(x-1)(x+9)(x^2+2x-9)=0$$

$\to D=40$

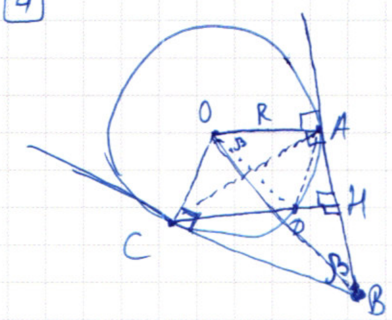
$x_{3,4}=\dfrac{-2\pm2\sqrt{10}}{2}=-1\pm\sqrt{10}$ $\quad y=\dfrac{9-x^2}{2}$

$$\Bigg\}\Rightarrow \begin{cases} (x;y)=\left[\begin{array}{l}(1;4)\\(-9;-36)\\(-1+\sqrt{10};-1+\sqrt{10})\\(-1-\sqrt{10};-1-\sqrt{10})\end{array}\right. \\ (*):\ y\geqslant 2x \end{cases} \Rightarrow (x;y)=\left[\begin{array}{l}(1;4)\\(-1-\sqrt{10};-1-\sqrt{10})\end{array}\right.$$

Ответ: $(1;4),\ (-1-\sqrt{10};-1-\sqrt{10})$

$AB = \frac{2S_{ABD}}{DH}$ т.к. $S_{ABD} = \frac{1}{2} DH \cdot AB$

$\boxed{4}$



$\frac{AB}{CH} = \frac{2S_{ABD}}{DH \cdot CH}$; $\quad DH \cdot CH = AH^2$ т.к.

$\triangle ACH \sim \triangle DAH$ ($\angle AHC$ – общ., $\angle HAD = \angle ACH$ вп. на одну дугу)

т.е. $\frac{AH}{DH} = \frac{CH}{AH} = \frac{AC}{AD}$

] $\angle ODC = \beta$, тогда $\angle OCD \overset{\text{р/б } \triangle ODC}{=} \angle ODC \overset{OA \parallel CH,\ \angle AOD \text{ и } \angle ODC - \text{накр.л.}}{=} \angle AOD$

$\Rightarrow$ 1) $\angle ADO = \angle OAD = 90° - \frac{\beta}{2}$ т.к. $\triangle OAD$ – р/б и угол при вершине $= \beta$

2) $\angle DOC = 180° - 2\beta$ по Σ углов тр-ка

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AOD$ т.к. $\angle ABC = \beta$ ($ABCO$ – впис. и $AOC = 180° - \beta \Rightarrow \angle ABC = \beta$)

$\frac{AH}{DH} = \frac{CH}{AH} = \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{R}$ $\Rightarrow AH^2 = \frac{R^2 \cdot CH^2}{AB^2}$

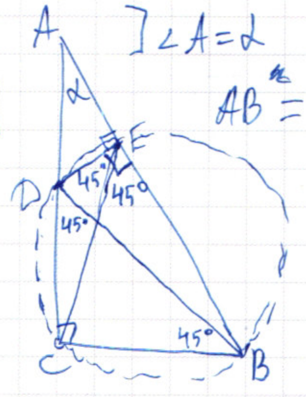
$\frac{AB}{CH} = \frac{2S_{ABD}}{\frac{R^2 \cdot CH^2}{AB^2}}$

$1 = \frac{2S_{ABD}}{R^2} \cdot \frac{AB}{CH}$

$\Rightarrow \frac{AB}{CH} = \frac{R^2}{2S_{ABD}} = \frac{36}{30} = \frac{6}{5}$

Ответ: $\frac{AB}{CH} = 1{,}2$

$\boxed{5}$



] $\angle A = \alpha$

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \frac{29}{2}$ $\qquad AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

$BC = \sqrt{29}$

$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{29}}$

$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

4хугольник $EBCD$ – вписанный $\Rightarrow \angle CED = \angle DBC = 45°$

$\angle CDB = \angle CEB = 90° - 45° = 45°$

$\Rightarrow CD = CB \Rightarrow AD = AC - CD = 1{,}5\sqrt{29}$ и $\frac{AD}{AC} = \frac{1{,}5\sqrt{29}}{\frac{5\sqrt{29}}{2}} = \frac{3}{5}$

$S_{\triangle AED} = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot AD \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot AD \cdot \overbrace{\cos\alpha \cdot AD}^{AE} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{29}} \cdot 1{,}5\sqrt{29} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot 1{,}5\sqrt{29} =$

$= \overset{11{,}25}{2{,}25 \cdot 5} = 11{,}25$ Ответ: $\frac{3}{5}$; $11{,}25$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

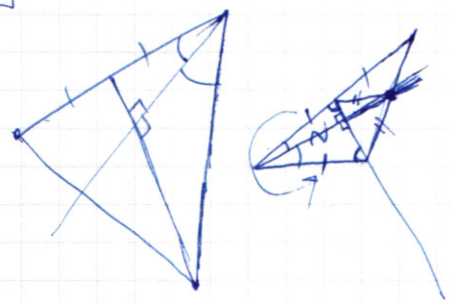
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

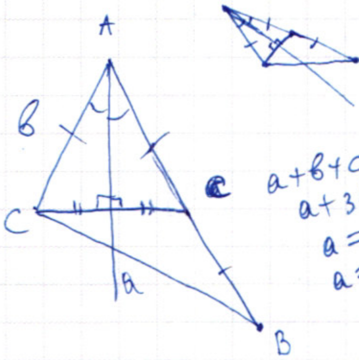
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

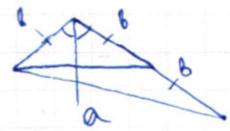
$\boxed{2}$ $P = 300$ $k - ?$





$a+b+c=300$
$a+3b=300$
$a=300-3b$
$a=3(100-b)$
$\Downarrow$
$b<100$

$a<b+c$
$c<a+b \Rightarrow a>c-b$
$\Downarrow$
$a>b$



$\begin{cases} a>b \\ a<3b \\ a=3(100-b) \end{cases}$

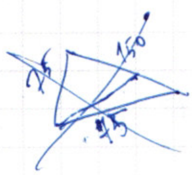
$300/4 = 75$

$\exists b=50,\ a=150,\ c=100$

$\begin{cases} a+b+2b=300 \\ a<3b \end{cases} \Rightarrow 300<6b,\ b>50$

$\Downarrow$

$\exists b=51$
$a=3\cdot 49=147$
$c=102$



$\begin{cases} a+3b=300 \\ a>b \end{cases} \Rightarrow 300>4b,\ b<\frac{300}{4},\ b<75$

$b\in(50;75)$
в ц. числах это 51~74 — 24 зн.

$\boxed{1}$ $\dfrac{\sqrt{x^2-2x+5}-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\le 0$

$\dfrac{x^2-2x+5}{4(x^2-3x)+|x|\cdot|x-3|} - \dfrac{4|x-1|}{4(x^2-3x)+|x|\cdot|x-3|}\le 0$

$4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|$ $\quad 4x(x-3)$

$x^2-2x+5>0$
$\cancel{x_1x_2=5}$
$\cancel{x_1+x_2=2}$
$\cancel{D=4-20}$

$\begin{cases} x^2-2x+5-4|x-1|\ge 0 \\ 4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|<0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2-2x+5-4|x-1|\le 0 \\ 4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|>0 \end{cases}$

при $x<0$:
$\begin{cases} x^2-2x+5-4(1-x)\ge 0 \\ 4x^2-12x+(-x)\cdot(3-x)<0 \end{cases}$
т.е. $\begin{cases} x^2+2x+1\ge 0 \ (\forall x) \\ 5x^2-15x<0 \end{cases}$

~~при $0\le x<1$:~~

при $x<0$:
$\dfrac{x^2-2x+5+4x-4}{5x^2-15x}\le 0$
т.е. $\dfrac{x^2+2x+1}{5x(x-3)}\le 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^2}{5x(x-3)}\le 0$

при $0\le x<1$:
$\dfrac{x^2+2x+1}{4x^2-12x+x(3-x)}\le 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^2}{3x^2-9x}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^2}{3x(x-3)}\le 0$

при $1\le x<3$:
$\dfrac{x^2-6x+9}{4x^2-12x+x(3-x)}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-3)^2}{3x(x-3)}\le 0$

при $x\ge 3$:
$\dfrac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+x(x-3)}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-3)^2}{5x(x-3)}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$x\neq 0$
$y\neq 0$

$y=\sqrt{xy}+2x$

$2(\sqrt{xy}+2x)+x^2=9$

$x^2+4x+2\sqrt{xy}=9$

$\cancel{y-2x\geq 0}$

$\cancel{xy\geq 0}$

$$\begin{cases} (y-2x)^2=xy \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2-xy=0 \\ x^2+2y=9 \end{cases}$$

$x^2=9-2y$

$y^2+4x^2=5xy$

$y^2+4(9-2y)=5xy$

$y^2-8y+36=5xy$

(2): $y=\dfrac{9-x^2}{2}$

(1): $\dfrac{9-x^2}{2}-2x=\sqrt{xy}\ |\cdot 2$

$9-x^2-4x=2\sqrt{xy}$

$(3-x)(3+x)=2(\sqrt{xy}+2x)$

or maybe

$\cancel{x=\dfrac{y-\sqrt{xy}}{2}}$

$$\begin{cases} 2y-4x-2\sqrt{xy}=0 \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$x^2+4x+2\sqrt{xy}=9$

$x^2+4x-9=-2\sqrt{xy}$

$$\begin{cases} y-2x\geq 0 \\ xy=y^2-4xy+4x^2 \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x\leq y \\ y^2-5xy+4x^2=0 \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$\left(\dfrac{9-x^2}{2}\right)^2-5x\left(\dfrac{9-x^2}{2}\right)+4x^2=0\ |\cdot 4$

$$\begin{cases} 16x^2-10x(9-x^2)+(9-x^2)^2=0 \\ 2x\leq y \end{cases}$$

$81-18x^2+x^4-90x+10x^3+16x^2=0$

$x^4+10x^3-2x^2-90x+81=0$

$x=1$ – корень

$(x-1)(x^3+11x^2+9x-81)=0$

$-9\cdot 81+11\cdot 81-81-81$

$x=-9$ – корень

$(x-1)(x+9)(x^2+2x-9)=0$

$x(x^2+11x+9)=81$

$D=4+36=40$

$x_{3,4}=\dfrac{-2\pm 2\sqrt{10}}{2}=-1\pm\sqrt{10}$

т.к. $y=\dfrac{9-x^2}{2}$:

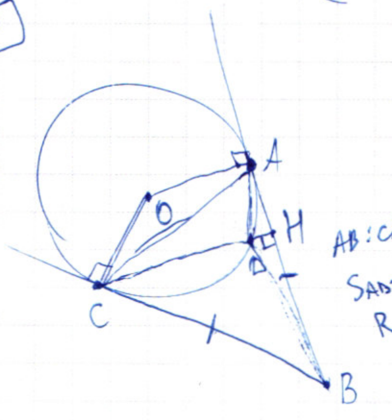
$$\begin{cases} (x;y)=(1;4)\cup(-9;-36)\cup(-1+\sqrt{10};-1+\sqrt{10})\cup(-1-\sqrt{10};-1-\sqrt{10}) \\ y\geq 2x \end{cases}$$

$-3\cdot 9+11\cdot 9$

$-3\cdot 9-9\cdot 9$

Ответ: $(1;4)\cup(-1-\sqrt{10};-1-\sqrt{10})$

(4)



$AB:CH$ – ?

$S_{ABD}=15$

$R=6$

- [x] черновик
- [ ] чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

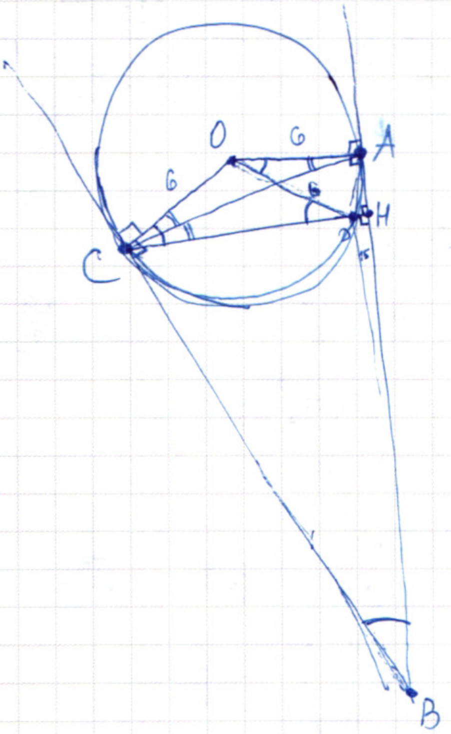
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

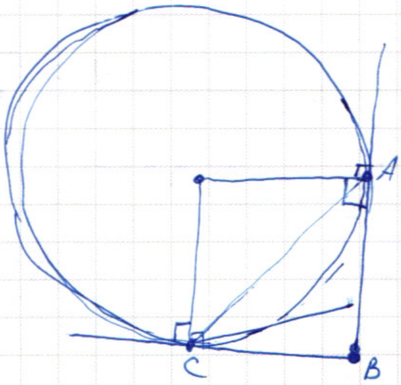
ШИФР

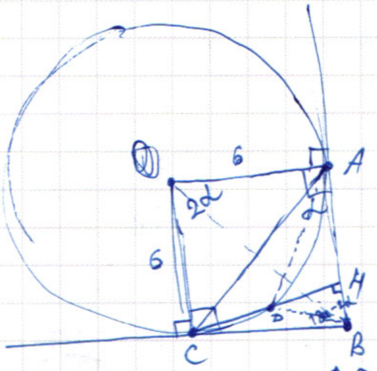
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4







AB : CH - ?

$S_{ABD} = 15$

$R = 6$

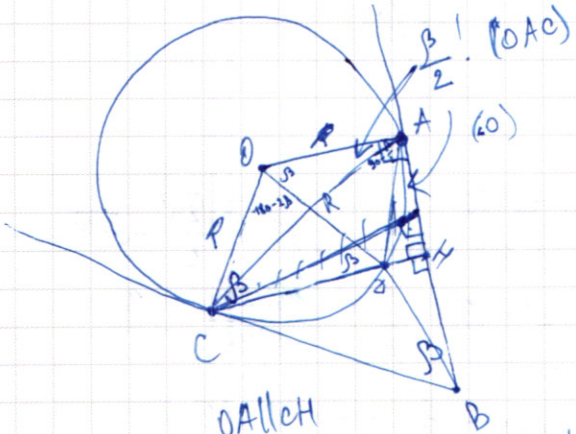
$\Delta OAB = \Delta OCB$ по гипотенузе и катету

$\Rightarrow BC = BA$

$\Rightarrow \Delta ABC$ - р/б

$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DH \quad AB = \frac{S_{ABD}}{DH} \cdot 2$

$\frac{AB}{CH} = \frac{2S_{ABD}}{DH \cdot CH} = \frac{30}{DH \cdot CH}$



OA || CH

$\exists \angle OCD = \beta$

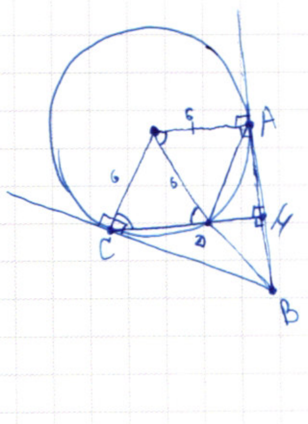
CA - бисс!

~~$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta AOD$~~

$\Rightarrow \angle OAC = \angle HAD = \frac{\beta}{2}$

$\angle ACH =$

$\frac{AH}{DH} = \frac{CH}{AH} \Rightarrow DH \cdot CH = AH^2$



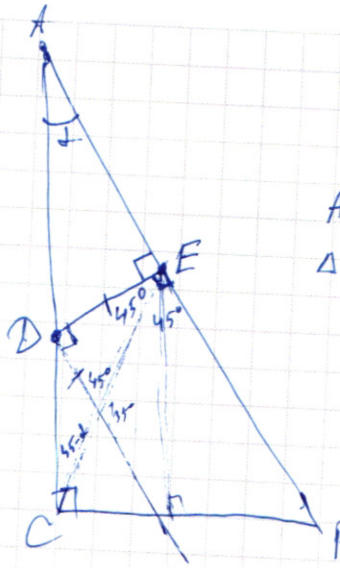
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\boxed{5}$



$AD : AC$ — ?

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

$AD = \frac{AE \cdot AB}{AC} = \frac{DE \cdot AC}{BC} \cdot \frac{AB}{AC}$

$AD = \frac{DE \cdot AB}{BC} = \frac{AE}{AC} \cdot AB$

$29 \cdot 4 = 116$

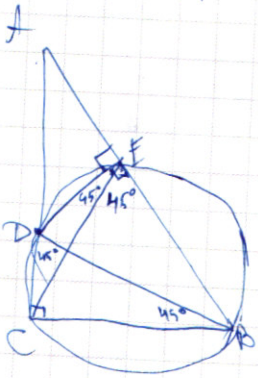
$25 \cdot 29 = 725$; $725 + 116 = 841$

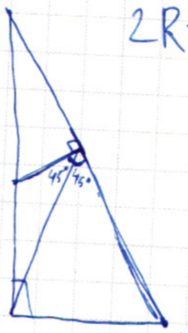
$AB^2 = 29 + \frac{25 \cdot 29}{4}$

$AB = \sqrt{\frac{841}{4}} = \frac{29}{2} = 14{,}5$

$29 \cdot 29 = 841$

$BC = \sqrt{29}$; $AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$; $\angle CED = 45^\circ$





$2R = AB$

$R = \frac{29}{4}$ $\qquad AB = \frac{29}{2}$

$2R = \frac{BC}{\sin A}$

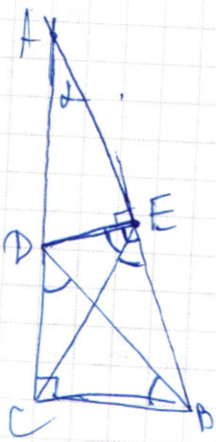
$BC = AB \cdot \sin A$

$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{29}}$

$\cos\alpha = \frac{5\sqrt{29}}{2} : \frac{29}{2} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

AC / AB

$S = \frac{1}{2} hc = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot a \cdot c$



$BC = CD$

$\Rightarrow CD = \sqrt{29} \Rightarrow AD = \frac{5\sqrt{29}}{2} - \sqrt{29} = 1{,}5\sqrt{29}$

$\Rightarrow \cancel{AB}\ \frac{AD}{AC} = \frac{1{,}5\sqrt{29}}{\frac{5\sqrt{29}}{2}} = \frac{3}{5}$

$\frac{AE}{AD} = \cos\alpha$

$AE = \cos\alpha \cdot AD$

$S_{\triangle AED} = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot AD \cdot AE =$

$= \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot AD \cdot \cos\alpha \cdot AD =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} \cdot 1{,}5\sqrt{29} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot 1{,}5\sqrt{29} =$

$= 2{,}25 \cdot 5 = 11{,}25$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА