МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED=45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

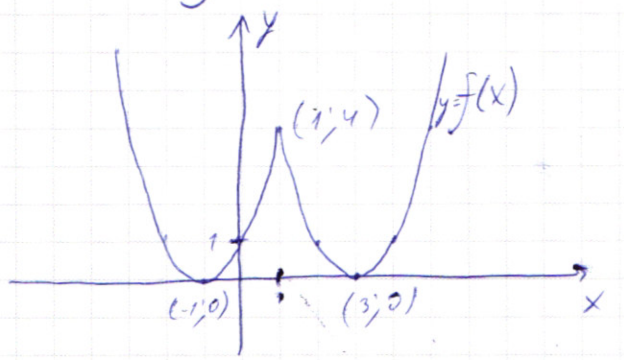
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

Пусть $f(x) = x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|$, $g(x) = 4x^2 - 12x + |x|\cdot|x-3|$

при $x \geq 1$: $f(x) = x^2 - 2x + 5 - 4x + 4 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

при $x < 1$: $f(x) = x^2 - 2x + 5 + 4x - 4 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

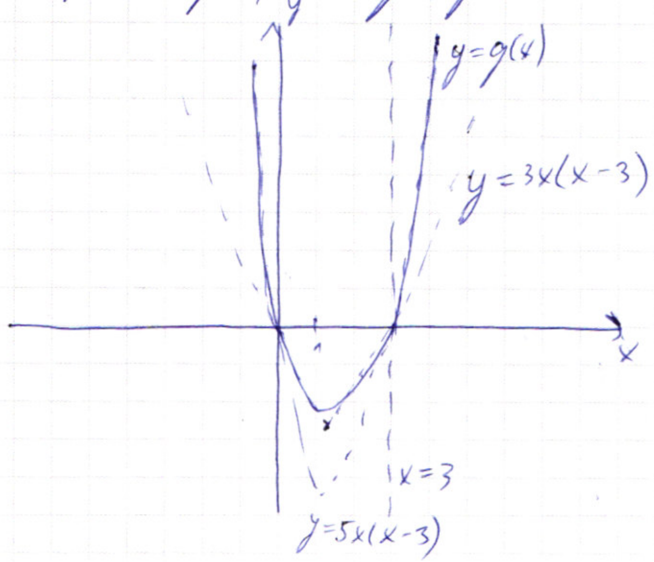


при $x \geq 3$: $g(x) = 4x^2 - 12x + x(x-3) = 5x^2 - 15x = 5x(x-3)$

при $0 \leq x < 3$: $g(x) = 4x^2 - 12x + x(3-x) = 3x^2 - 9x = 3x(x-3)$

при $x < 0$: $g(x) = 4x^2 - 12x - x(3-x) = 5x^2 - 15x = 5x(x-3)$

Примерный график $y = g(x)$:



$$\frac{f(x)}{g(x)} \le 0 \iff \begin{cases} g(x) \ne 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ f(x) = 0 \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \end{array} \right. \end{cases}$$

$g(x) \ne 0$ при $x \notin \{0; 3\}$

$f(x) > 0$ при $x \notin \{-1; 3\}$

$g(x) < 0$ при $x \in (0; 3)$

$f(x) = 0$ при $x \in \{-1; 3\}$

$f(x) < 0$ при $\varnothing$

$g(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \iff x \in (0; 3)$$

$$\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \varnothing \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \varnothing$$

Итак, $x \notin \{0; 3\}$, а также ($x \in (0; 3)$ или $x \in \{-1; 3\}$)

Таким образом, $x \in (0; 3) \cup \{-1\}$

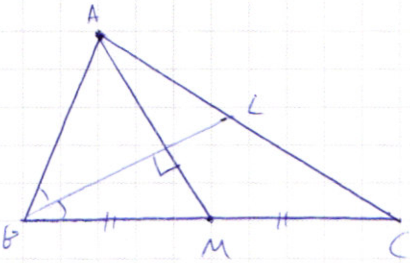
Ответ: $x \in \{-1\} \cup (0; 3)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2



Если $BL \perp AM$, то $\triangle ABM$ - равнобедренный (бисс. совп. с высотой), и $AB = BM = \frac{1}{2}BC$

И обратно: если $BA = \frac{1}{2}BC$, $BL \perp AM$.

Т.е. нужно найти Δ-и, у к-рых одна из сторон меньше другой в 2 раза. Пусть, это n и $2n$. 3-я ст. $= 300-n-2n = 300-3n$

Проверим нер-во Δ-а:

$$\begin{cases} n+2n > 300-3n \\ n+(300-3n) > 2n \\ 2n+(300-3n) > n \end{cases} \qquad \begin{cases} n>50 \\ n<75 \\ n<150 \end{cases}$$

т.к. n - целое, $n = 51, 52, \dots, 74$.

$2n$ и $300-3n$ тогда тоже целые и неотрицательные: $300-3n>0$ т.к. $n<100$.

Кажется, всего троек $\langle n, 2n, 300-3n\rangle$ 24 шт.: при $n = 51, \dots, 74$.

Проверим, что никакие тройки не посчитаны дважды.

Пусть, $\langle a, 2a, 300-3a\rangle = \langle b, 2b, 300-3b\rangle$, где $b>a$.

$b>a$, $2b>a \Rightarrow 300-3b = a$.

$\Rightarrow \langle 2a, 300-3a\rangle = \langle b, 2b\rangle$

либо $300-3a = 2\cdot 2a \Rightarrow 7a = 300$, но $300 \not\vdots\, 7$. противоречие

либо $2a = 2\cdot(300-3a) \Rightarrow a = 300-3a \Rightarrow a = 75$. Но $a \le 74$. Противоречие.

Значит, все 24 тройки различны.

Ответ: 24

Задача 3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2x\geq 0 \\ (y-2x)^2=xy \\ x^2+2y-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 2x \\ y^2+4x^2-5xy=0 \\ x^2+2y-9=0 \end{cases}$$

$y^2+4x^2-5xy=0$

$(y-4x)(y-x)=0$

а) $y=x$

б) $y=4x$

а): $x^2+2y-9=0$. $x^2+2x-9=0$ | $y\geq 2x$

$D/4=1+9=10$ | $x\geq 2x$

$x=-1\pm\sqrt{10}$ | $x\leq 0$

$\sqrt{10}>1 \Rightarrow -1+\sqrt{10}>0$

подходит $x=-1-\sqrt{10}\leq 0$

$y=-1-\sqrt{10}$

б) $x^2+2y-9=0$. $x^2+8x-9=0$ | $y\geq 2x$

$(x+9)(x-1)=0$ | $4x\geq 2x$

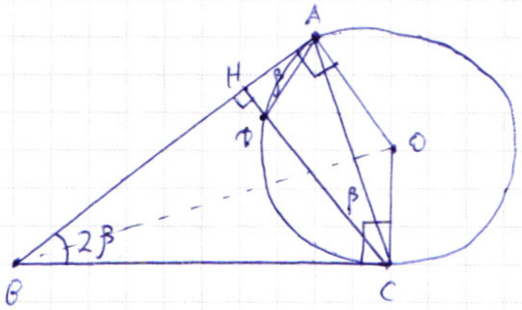
$x=-9$ или $x=1$. | $x\geq 0$. подходит $x=1$.

$y=4$.

Ответ: $(-1-\sqrt{10}; -1-\sqrt{10})$, $(1; 4)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4



$S_{ABD} = 15$, $OA = 6$. $\frac{AB}{CH} = ?$

решение.

Пусть $\angle ABC = 2\beta$

$BA = BC$ (отрезки касат. из т. B)

$\Rightarrow \triangle BAC$ - равнобедр., и $\angle BAC = \angle BCA = 90^\circ - \beta$

Из $\triangle ACH$, $\angle ACH = 90^\circ - \angle CAH = \beta$

по т. об углу между хордой и касат., $\angle DAB = \angle ACD = \beta$.

$\angle ABO = \angle CBO = \beta$. Из $\triangle AOB$, $\cancel{AB}$ $tg\,\beta = \frac{AO}{AB} \Rightarrow \boxed{AB = \frac{AO}{tg\,\beta} = \frac{6}{tg\,\beta}}$

$S_{ABD} = \frac{1}{2} DH \cdot AB = 15 \Rightarrow DH \cdot AB = 30 \Rightarrow \boxed{DH = \frac{30}{AB} = 5\,tg\,\beta}$

Из $\triangle ADH$, $tg\,\beta = \frac{DH}{AH} \Rightarrow \boxed{AH = \frac{DH}{tg\,\beta} = 5}$

По т. о произведении отрезков секущей и квадрате касательной,

$HA^2 = HD \cdot HC = 25$. Также $DH \cdot AB = 30$. $\Rightarrow \frac{AB}{CH} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5} = 1,2$

Ответ: 1,2

Задача 6

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6 & (1) \\ x^2-2x-3y+y^2\le 0 & (2) \end{cases}$$

Известно, что $\forall a, b$ $|a|+|b|\ge|a+b|$, причём равенство достигается при $a,b\ge 0$ или $a,b\le 0$.

Значит, $\forall a,b,c$ $|a|+|b|+|c|\ge|a+b|+|c|\ge|a+b+c|$, причём рав-во при $a,b,c\ge 0$ или $a,b,c\le 0$.

р/м (1). Возьмём $a=3x$, $b=2y$, $c=6-3x-2y$.

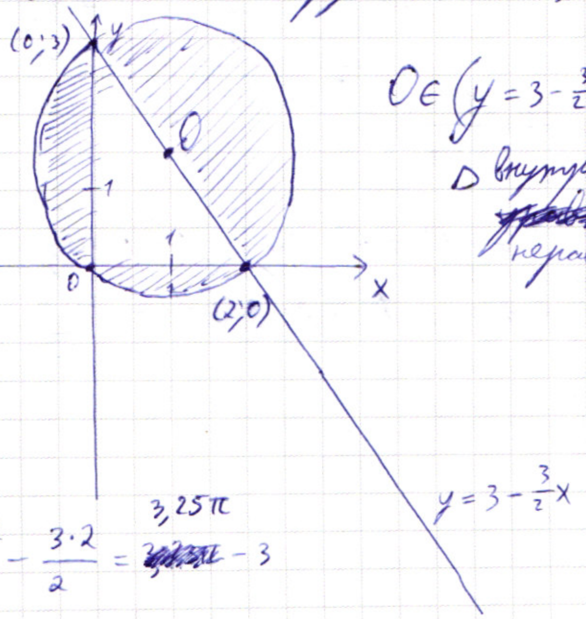
$|3x|+|2y|+|6-3x-2y|\ge 6$. А нужно строго $>$. Плохо, если $=$:

$$\left[\begin{array}{l} 3x\ge 0,\ 2y\ge 0,\ 6-3x-2y\ge 0 \\ 3x\le 0,\ 2y\le 0,\ 6-3x-2y\le 0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x\ge 0,\ y\ge 0,\ y\le 3-\frac{3}{2}x \\ x\le 0,\ y\le 0,\ y\ge 3-\frac{3}{2}x \end{array}\right.$$

р/м (2): $(x-1)^2+(y-1{,}5)^2\le 3{,}25$

Это внутренность круга с центром $O(1;\ 1{,}5)$ и $R=\sqrt{3{,}25}$.

Точка $(0;0)$ лежит на окружности $x^2-2x-3y+y^2=0$.



$O\in\left(y=3-\frac{3}{2}x\right)$

Δ внутри запрещён (2) неравенством.

$$S=S_O-S_\Delta=\pi R^2-\frac{3\cdot 2}{2}=3{,}25\pi-3$$

Ответ: $S=3{,}25\pi-3$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7

$f(ab)=f(a)+f(b) \Rightarrow f(a_1 a_2 \ldots a_k)=f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_k)$

$\Rightarrow \forall b_i \in \mathbb{N} \quad f(a_1^{b_1}\ldots a_k^{b_k})=b_1 f(a_1)+\ldots+b_k f(a_k)$

Заметим, что $f(a\cdot 1)=f(a)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$.

Заметим, что $f(a\cdot \frac{1}{a})=f(a)+f(\frac{1}{a}) \Rightarrow f(\frac{1}{a})=f(1)-f(a)=-f(a)$

Т.к. $f(a^{-1})=(-1)\cdot f(a)$, а $f(a^0)=0\cdot f(a)$,

формулу выше можно обобщить:

$\forall b_i \in \mathbb{Z} \quad f(a_1^{b_1}\ldots a_k^{b_k})=b_1 f(a_1)+\ldots+b_k f(a_k)$

В частности, если $a_i=p_i$ (простое)

$f(p_1^{b_1}\ldots p_k^{b_k})=b_1p_1+b_2p_2+\ldots+b_kp_k$ (из $f(p_i)=p_i$)

Заметим, что $f(x/y)<0 \Leftrightarrow f(x\cdot\frac{1}{y})<0 \Leftrightarrow f(x)-f(y)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(y)$

$f(x/y)=0 \Leftrightarrow f(x)=f(y)$

$f(x/y)>0 \Leftrightarrow f(x)>f(y)$.

Т.о., нужно найти кол-во пар $(x;y)$: $f(x)<f(y)$.

Понятно, что $x\neq y$ иначе $f(x)=f(y)$. Каждой такой паре соответствует другая пара $(y;x)$: $f(y)>f(x)$. И наоборот.

Значит, кол-во ~~пар~~ пар вида $f(x)<f(y)$ и вида $f(x)>f(y)$ равно.

Если N-общее число пар, n-число пар $f(x)=f(y)$, то ответ $=\frac{N-n}{2}$.

$N=17^2=289$. Найти n чуть сложнее.

Выпишем $x = 3, 4, \dots, 19$ и найдём $f(x)$

x	разложение	$f(x)$
3	3^1	3
4	2^2	4
5	5^1	5
6	$2^1 \cdot 3^1$	5
7	7^1	7
8	2^3	6
9	3^2	6
10	$2^1 \cdot 5^1$	7
11	11^1	11
12	$2^2 \cdot 3^1$	7
13	13^1	13
14	$2^1 \cdot 7^1$	9
15	$3^1 \cdot 5^1$	8
16	2^4	8
17	17^1	17
18	$2 \cdot 3^2$	8
19	19^1	19

Посчитаем кол-во пар $(x; y)$ таких, что $f(x) = f(y)$.
Пусть $\#_c$ – кол-во $x : f(x) = c$.
Тогда для $f(x) = f(y) = c$, есть ровно $(\#_c)^2$ пар.

$$n = \sum_c (\#_c)^2$$

Выпишем все встреченные $f(x)$.

c	$\#_c$ (числа)	$(\#_c)^2$
3	1 (3)	1
4	1 (4)	1
5	2 (5, 6)	4
6	2 (8, 9)	4
7	3 (7, 10, 12)	9
8	3 (15, 16, 18)	9
9	1 (14)	1
11	1 (11)	1
13	1 (13)	1
17	1 (17)	1
19	1 (19)	1

$n = 33$.

$$\frac{N - n}{2} = \frac{289 - 33}{2} = \frac{256}{2} = 128$$

Ответ: 128

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

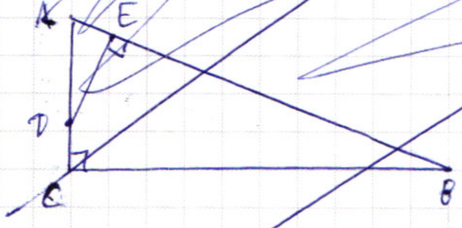
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5



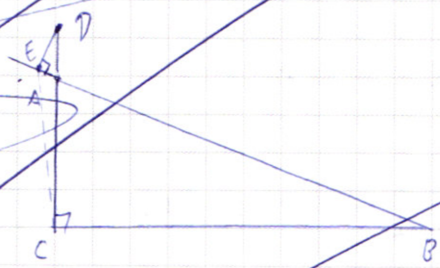
$\angle DEB = \angle DCB = 90^\circ \Rightarrow CDEB$ — вписанный

$\angle CBD = \angle CED = 45^\circ \Rightarrow$ из $\triangle CBD$ $CD = CB$

но $CD = CB = \frac{5}{2}\sqrt{20} > CA$.

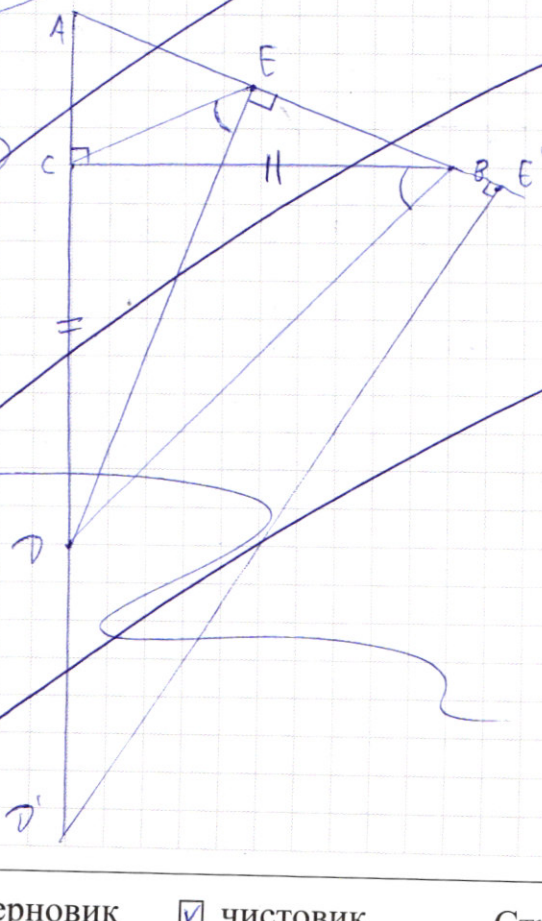
Значит, точки D и E необязательно лежат на отрезках AC, AB.

Случай 2: D „выше" A:



Но тогда $\angle CED > \angle DEB = 90^\circ$ противоречие.

Случай 3: D „ниже" C:



E либо на отрезке AB, либо „ниже" B (см. E')

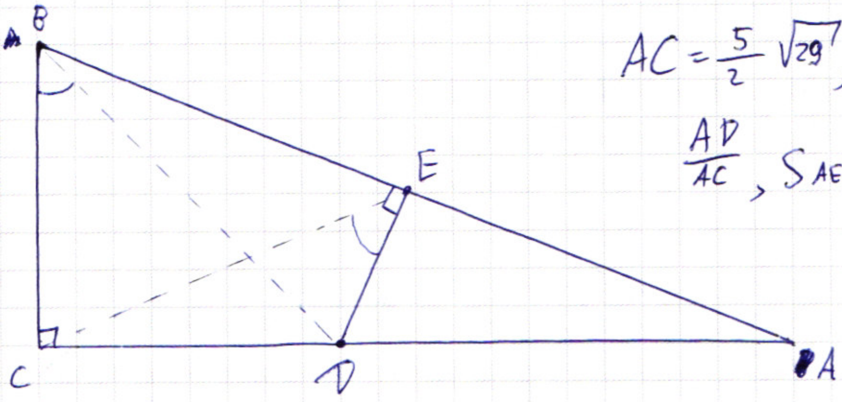
В любом случае, C, E, B, D лежат на одной окружности, и $\angle CED = \angle CBD = 45^\circ$

Значит, из $\triangle CBD$ $CD = CB$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 5



$AC=\frac{5}{2}\sqrt{29}$, $BC=\sqrt{29}$, $\angle CED=45^\circ$

$\frac{AD}{AC}$, S_{AED} — ?

решение.

р/м $CBED$. $\angle DCB+\angle DEB=180^\circ \Rightarrow CBED$ - впис.

$\angle CBD=\angle CED=45^\circ \Rightarrow$ из $\triangle CBD$, $CD=CB=\sqrt{29}$

$AD=AC-DC=1{,}5\sqrt{29}$

$$\frac{AD}{AC}=\frac{1{,}5\sqrt{29}}{2{,}5\sqrt{29}}=\frac{3}{5}=0{,}6$$

Заметим, что $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ по углам: $\angle A$ - общий, $\angle AED=\angle ACB=90^\circ$

Коэф. подобия $k=AD/AB$.

Найдём AB. $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{29}\cdot\sqrt{1^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{29}\cdot\sqrt{\frac{29}{4}}=\frac{29}{2}$

$$k=AD/AB=\frac{1{,}5\sqrt{29}\cdot 2}{29}=3/\sqrt{29}$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}CB\cdot CA=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{29}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{29}=\frac{5}{4}\cdot 29$$

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=k^2 \Rightarrow S_{ADE}=k^2\cdot S_{ABC}=\frac{9}{29}\cdot\frac{5\cdot 29}{4}=\frac{45}{4}=11{,}25$$

Ответ: $\frac{AD}{AC}=0{,}6$, $S_{ADE}=11{,}25$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

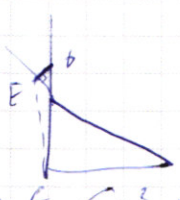
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

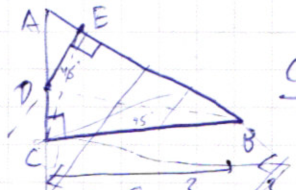
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$



$\sqrt{29}$



CD = CB

но CA<CB ???

~~ОДЗ~~ $y-2x\geq 0$

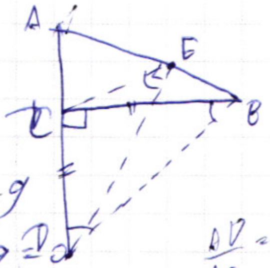
$$\begin{cases} y^2+4x^2-4xy=xy \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$\frac{5\sqrt{29}}{2}$

$$\begin{cases} y^2+4x^2-5xy=0 \quad (1) \\ 2y+x^2=9 \quad (2) \end{cases}$$

(1): $(y-x)(y+5x)=0$ $(y-4x)(y-x)$

$$\begin{cases} y=x \\ y=-5x \end{cases}$$



$y=x \xrightarrow{(2)} 2x+x^2=9$

$x^2+2x-9=0$

$D/4=1+9=10$

$x=-1\pm\sqrt{10} \approx -1\pm 3$

2 ии - 4

$y=-5x \xrightarrow{(2)} -10x+x^2=9$

$x^2-10x-9=0$

$D/4=25+9=34$

$x=5\pm\sqrt{34} \approx 5\pm 6$

11 ии - 1

$\frac{AD}{AC}=\frac{3\sqrt{29}}{\sqrt{29}}=3$

$AD=3\sqrt{29}$

$\boxed{y\geq 2x}$

$x\geq 2x$

$x\leq 0 \Rightarrow x=-1-\sqrt{10}$

$\frac{S_{ADE}}{S_{ACB}}=\left(\frac{AE\cdot AD}{AB\cdot AC}\right)^2$

$-5x\geq 2x$

$0\geq 7x$

$x\leq 0$

$\Rightarrow x=5-\sqrt{34}$

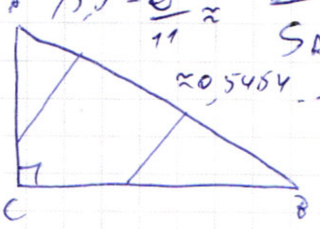
$1^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{29}{4}$

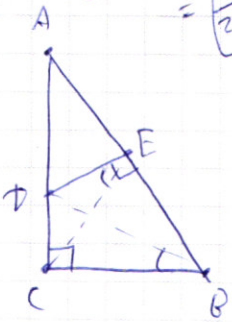
$AB=\sqrt{29}\cdot\frac{\sqrt{29}}{2}=\frac{29}{2}$

$\frac{S_{ADE}}{S_{ACB}}=k^2=\left(\frac{AD}{AB}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{29}\cdot 2}{29}\right)^2=\boxed{\frac{36}{29}}$

$3/5{,}5\approx\frac{6}{11}\approx 0{,}5454...$

$S_{ACB}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{29}\cdot\frac{5\sqrt{29}}{2}=\frac{5\cdot 29}{4}$





$\frac{AD}{AC}$, S_{AED} - ?, $S_{ADE}=\frac{36\cdot 5\cdot 29}{4\cdot 29}=45$

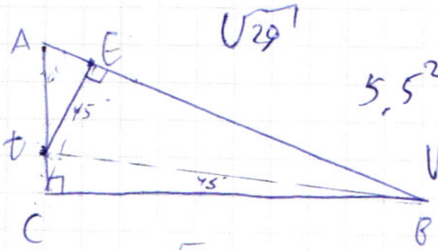
$AC=\sqrt{29}$

$BC=\frac{5}{2}\sqrt{29}$

$\angle CED=45$

$\angle CBD=\angle CED=45$

$\Rightarrow CD=CB=2{,}5\sqrt{29}$



$\sqrt{29}$

$5{,}5^2=30{,}25$

$\sqrt{29}\approx 5{,}5$

$\frac{5\sqrt{29}}{2}$

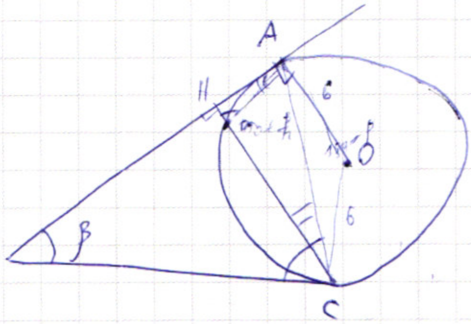
CD = CB > CA. что???

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

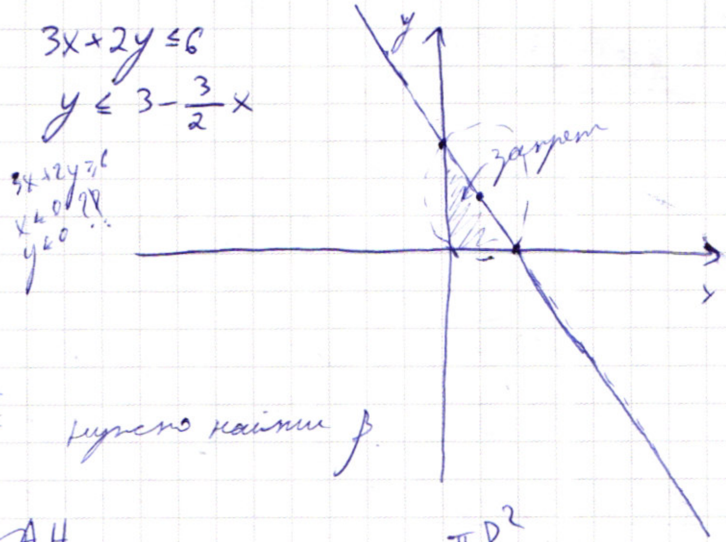
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$3x+2y\le 6$

$y\le 3-\frac{3}{2}x$



$S_{ABD}=15,\ R=6.$

$\frac{AB}{CH}=?$

$\frac{AB}{CH}=\frac{BC}{CH}$ нужно найти β

$\cancel{\frac{AD}{AC}=\frac{AH}{CH}}$

$S=\frac{\pi R^2}{2}=$

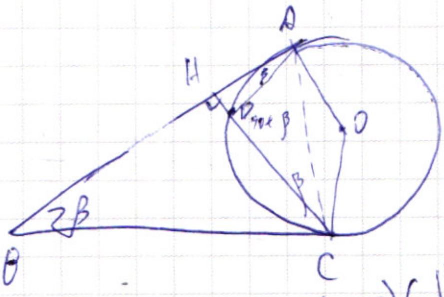
$=\boxed{\frac{13}{8}\pi}$

$S_{ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot DH=15$

$AB\cdot DH=30$

$\begin{cases} HD\cdot HC=HA^2 \\ HD\cdot AB=30. \end{cases}$ $HA=?$

$\frac{AC}{\sin(90+\frac{\beta}{2})}=\frac{AD}{\sin(\cancel{90}\ \frac{\beta}{2})}=12$



$AB=6\,ctg\,\beta$

$DH=\frac{30}{6\,ctg\,\beta}=5\,tg\,\beta$

$\cancel{AH=DH\,ctg\,\beta=5}$

$\frac{AB}{CH}=\frac{30}{25}=1{,}2$

$|a|+|b|+|c-a-b|\le c?$

$|a|+|b|+|c-a-b|\ge$

$\ge|a+b+(c-a-b)|=|c|=$

$=c$ при $c\ge 0$.

$(c=6)$

$=$ только при $a,b,6-a-b\ge 0$

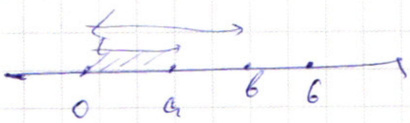
или $a,b,6-a-b\le 0$.

$\left[\begin{array}{l} x\ge 0, y\ge 0, 3x+2y\le 6 \\ x\le 0, y\le 0, 3x+2y\ge 6 \end{array}\right.$

$(0;0)\in\omega$

$x^2-2x-3y+y^2\le 0$

$(x-1)^2+(y-1{,}5)^2\le 3{,}25=\frac{13}{4}$

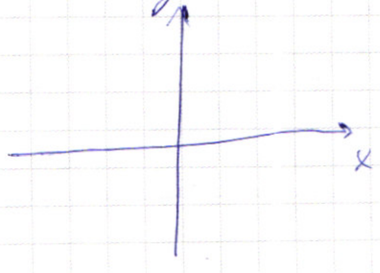


$|3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6$

$|a|+|b|+|6-a-b|>6$

когда $|a|+|b|+|6-a-b|\le 6$?

$|6-a-b|$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

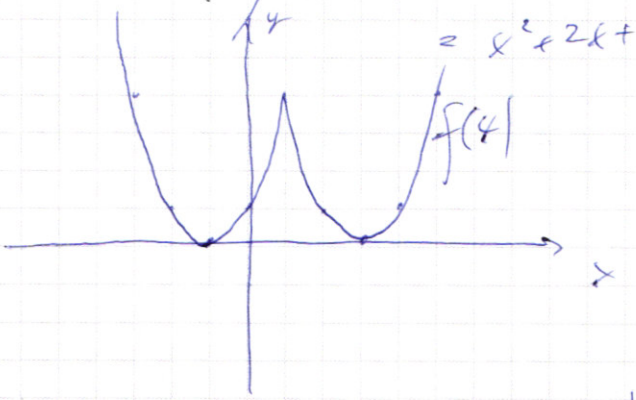
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

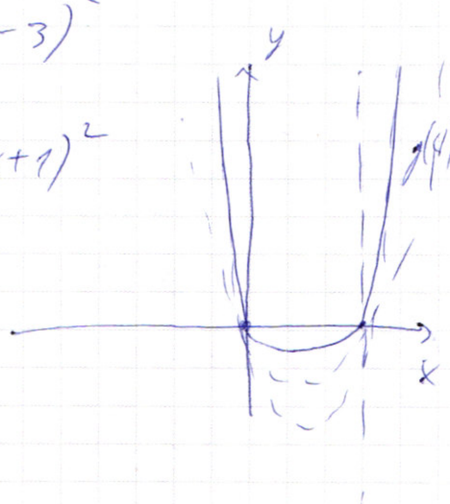
$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\le 0 \qquad \frac{f(x)}{g(x)}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ne 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x)>0,\ g(x)<0 \\ f(x)=0 \\ f(x)<0,\ g(x)>0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$f(x)>0:\ x^2-2x+5-4|x-1|>0$

при $x\ge 1$: $f(x)=x^2-2x+5-4x+4=$
$=x^2-6x+9=(x-3)^2$

при $x<1$: $f(x)=x^2-2x+5+4x-4=$
$=x^2+2x+1=(x+1)^2$





$g(x):\ 4x^2-12x+|x||x-3|$

$\lvert x\rvert$	$-$	$+$	$+$
$\lvert x-3\rvert$	$-$	$-$	$+$
	0	3	x

1) $x<0$. $4x^2-12x+(-x)(3-x)=$
$=4x^2-12x-3x+x^2=$
$=5x^2-15x$

~~$g(x)\ne 0$~~ $\begin{cases} x\ne 0, x\ne 3 \\ \left[\begin{array}{l} x\ne -1, x\ne 3, x\in(0;3) \\ x=-1 \text{ или } x=3 \\ \varnothing \end{array}\right. \end{cases}$

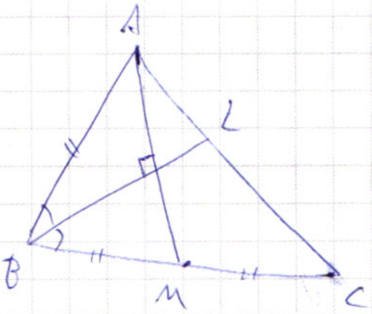
$4x^2-12x+|x||x-3|=$

при $x\ge 3$: $4x^2-12x+x(x-3)=5x^2-15x=5x(x-3)$
при $0\le x<3$: $4x^2-12x+x(3-x)=3x^2-9x=3x(x-3)$
при $x<0$: $4x^2-12x-x(3-x)=5x^2-15x=5x(x-3)$

$4x(x-3)\pm x(x-3)=0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$\Rightarrow AB = \frac{1}{2} BC$

$BA = \frac{1}{2} BC \Leftrightarrow BL \perp AM.$

нужно: одна сторона в 2 раза меньше другой.

т.е: 1 2 c

2 4 c

3 6 c

⋮

99 198 c

~~100 200 c~~

$\langle 2, 4, a \rangle = \langle t, 2t, b \rangle$

$t > 2$

$t > 2,\ 2t > 2 \Rightarrow b = 2.$

$\langle t, 2t \rangle = \langle 4, a \rangle$

либо $t = 4$, $2t = a$?! $2 \cdot 4 = 8$

либо

$n \quad 2n \quad 300 - 3n$

$$\begin{cases} n + 2n > 300 - 3n \\ \quad a + b > c \\ \quad P > 2c \end{cases}$$

$P >$
$$\begin{cases} 300 > 2n \\ 300 > 2(2n) \\ 300 > 2(300 - 3n) \end{cases} \qquad \begin{cases} n < 150 \\ n < 75 \\ n > 50 \end{cases} \quad n = 51..74.$$

$6n > 300$

$n > 50$

предположим, $\Delta(a, 2a, 300 - 3a) = \Delta(b, 2b, 300 - 3b)$

при $b > a$.

$b > a,\ 2b > a \Rightarrow 300 - 2b = a$

$\Rightarrow \langle 2a, 300 - 2a \rangle = \langle b, 2b \rangle$

т.к. $a < 75$, $2a < 300 - 2a \Rightarrow 2a = b$

$300 - 2a = 2b$

$300 - 2a = 4a$

$300 = 6a$

$a = 50$?!

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a)+f(b)$, $D(f) = \mathbb{Q}>0$

Наверное, $f(x) = \log_c x$, где $c = const$.

если так: $f(p) = \log_c p = p$

$\log_c p \log_p c = 1$

$p \log_p c = 1$

$f(a\cdot 1) = f(a)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$.

$f(4) = f(2)+f(2) = 2f(2)$

$f(abc\ldots) = f(a)+f(b)+f(c)+\ldots$

$f(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots) =$

$= \alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) + \ldots + \alpha_k f(p_k) =$

$= \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_k p_k$.

$f(\frac{1}{2}\cdot 4) = f(1/2) + f(4) = f(1/2) + 2f(2)$

$f(2) = f(\frac{1}{2}) + 2f(2)$

$f(\frac{1}{2}) = -f(2)$

$\alpha_1 = -2..2$ 5
$\alpha_2 = -1..1$ 3
$\alpha_3 = -1..1$ 3
$\alpha_4 = -1..1$ 3
$\alpha_5 = -1..1$ 3
$\alpha_6 = -1..1$ 3
$\alpha_7 = -1..1$ 3

$f(x/y) < 0$

$\alpha_1\cdot 3 + \alpha_2\cdot 5 + \alpha_3\cdot 7 + \alpha_4\cdot 2 + \alpha_5\cdot 11 + \alpha_5\cdot 13 + \alpha_6\cdot 17 + \alpha_7\cdot 19 < 0$

$f(\frac{1}{p}\cdot p) = f(\frac{1}{p}) + f(p)$

$0 = f(\frac{1}{p}) + p \Rightarrow f(\frac{1}{p}) = -p$.

$\Rightarrow \forall \mathbb{Z}\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ $\boxed{f(p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}) = \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_k p_k}$.

$19 - 2 = 17$.

n	v_2	v_3	v_5	v_7	v_{11}	v_{13}	v_{17}	v_{19}	f(n)
3	0	1	0	0	0	0	0	0	3
4	2	0	0	0	0	0	0	0	4
5	0	0	1	0	0	0	0	0	5
6	1	1	0	0	0	0	0	0	5
7	0	0	0	1	0	0	0	0	7
8	3	0	0	0	0	0	0	0	6
9	0	2	0	0	0	0	0	0	6
10	1	0	1	0	0	0	0	0	7
11	0	0	0	0	1	0	0	0	11
12	2	1	0	0	0	0	0	0	$\boxed{7}$
13	0	0	0	0	0	1	0	0	13
14	1	0	0	1	0	0	0	0	9
15	0	1	1	0	0	0	0	0	8
16	4	0	0	0	0	0	0	0	8
17	0	0	0	0	0	0	1	0	17
18	1	2	0	0	0	0	0	0	8
19	0	0	0	0	0	0	0	1	19

если $f(x/y)<0$, то $f(y/x)>0$.

$f(x/y)=0$ при $f(x)=f(y)$

Всё разб. на пары, кроме $f(x/y)=0$.

$p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+\dots+p_8\alpha_8=0$.

$f\left(\frac{6}{5}\right)=2+3-5=0$

$17 \times 17 = 289$

y \ x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3	0																
4																	
5																	
6																	
7																	
8																	
9																	
10																	
11																	
12																	
13																	
14																	
15																	
16																	
17																	
18																	
19																	

всего $17^2=289$ пар.

Отв: $\frac{289-33}{2}=\frac{256}{2}=\boxed{128}$

3 : 1р. 1
4 : 1р. 1 — 2
5 : 3р. 9 — 11
6 : 2р. 4 — 15
7 : 2р. 4 — 19
8 : 3р. 9 — 28
9 : 1р. 1 — 29
11 : 1р. 1 — 30
13 : 1р. 1 — 31
17 : 1р. 1 — 32
19 : 1р. 1 — 33

17 шт.

33

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)