МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 18$, $1\leqslant y\leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leq 0$$

	$x<0$	$0<x<2$	$2<x<3$	$x>3$
x	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$-$	$+$

Случай 1 и 3 ($x \leq 0$ или $2<x\leq 3$)

$$\left[\begin{cases}\dfrac{x^2-6x+10+2(x-3)}{2x^2-4x+(-x)\cdot(2-x)} \leq 0 \\ x\leq 0\end{cases}\right. \qquad \Rightarrow \text{одинаковы.}$$

$$\left.\begin{cases}\dfrac{x^2-6x+10+2(x-3)}{2x^2-4x+x\cdot(x-2)} \leq 0 \\ 2<x\leq 3\end{cases}\right.$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-6x+2x+10-6}{2x^2+x^2-4x-2x} \leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x\leq 0 \\ 2<x\leq 3\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x} \leq 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \leq 0$$

$$\frac{x-2}{3x} \leq 0$$

$\neq 0$

(не уд.)

Случай №2 $(0 < x \le 2)$

$$\frac{x^2-6x+10+2(x-3)}{2x^2-4x-x(x-2)} \le 0$$

$$\frac{x^2-6x+2x+10-6}{2x^2-x^2-4x+2x} \le 0$$

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x} \le 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{x(x-2)} \le 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\overset{<0}{x-2}}{\underset{>0}{x}} \le 0 \quad (\text{уд}) \\ x \ne 2 \\ x \ne 0 \end{cases}$$

Случай №4 $(3 < x)$

$$\frac{x^2-6x+10-2(x-3)}{2x^2-4x+x(x-2)} \le 0$$

$$\frac{x^2-6x-2x+10+6}{2x^2-4x+x^2-2x} \le 0$$

$$\frac{x^2-8x+16}{3x^2-6x} \le 0$$

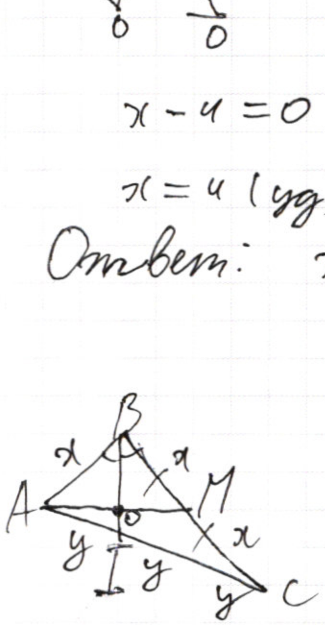
$$\frac{(x-4)^2}{\underset{>0}{3x}\,\underset{>0}{(x-2)}} \le 0$$

$x-4=0$

$x=4$ (уд)

Ответ: $x \in [0;2] \cup \{4\}$

№2



AM – мед.

BI – бисс.

$AM \perp BI$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Расм $\triangle ABM$.

BO – высота и биссектриса $\Rightarrow \triangle ABM$ - р/б. $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = BM$.

т.к. AM - мед. $\Rightarrow BM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow BC = 2AB$.

пусть. $AB = x$, $AI = y$.

т.к. BI - бисс:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AI}{IC} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow IC = 2AI = 2y$.

$P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 3x + 3y = 3(x+y)$.

по неравенствам треугольника:

$$\begin{cases} 3x > 3y \\ 2x + 3y > x \\ 3y + x > 2x \\ 3(x+y) = 600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > y \\ \underset{>0}{3y} > \underset{<0}{-x} \text{ (всегда уд.)} \\ 3y > x \\ x + y = 200 \end{cases}$$

$x = 200 - y$.

$$\begin{cases} 200 - y > y \\ 3y > 200 - y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 200 > 2y \\ 4y > 200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100 > y \\ y > 50 \end{cases}$$

$y \in \cancel{\mathbb{Z}}\ N$

$\Downarrow$

49 вариантов. $(100-50-1)$

Ответ: 49 вариантов.

№ 7

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = p$, p – простое число.

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0.$

$f(2) = 2.$

$f(2) = f\left(\frac{21}{y} \cdot y2\right) = f(2y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(2) + f(y) +$

$* \ f\left(\frac{1}{y}\right) = 2 + f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 2$

$f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

$\Downarrow$

$f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y)$

т. к. $1 \le x \le 18$ и $1 \le y \le 18$.

аргумент функции будет либо простым, либо ~~составным~~ сложным числом ~~[число, у которого~~

пусть x' – некое ~~составное~~ сложное число.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x' = a \cdot b \cdot c \cdot d$, a, b, c, d – простые числа.

$f(x') = f(abcd) = f(ab) + f(cd) = f(a) + f(b) + f(c) + f(d) =$

$= a + b + c + d \Rightarrow$ эта функция возвращает сумму делителей ~~числа~~ для целого натурального числа.

вот таблица:

число	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
делители	1	2	3	2·2	5	2·3	7	2·2·2	3·3	2·5	11	2·2·3	13	2·7	3·5	2·2·2·2	17	2·3·3
сумма делителей	1	2	3	4	5	5	7	6	6	7	11	7	13	9	8	8	17	6.

суммы делителей	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	13	17
кол-во. в табл.	1	1	1	1	2	2	3	3	1	1	1	1.

~~нужно~~ что бы выполнялось неравенство $f(x) < f(y)$, нужно, что бы сумма делителей числа x была меньше суммы делителей числа y.

путём перебора выясним кол-во вариантов. числа x под каждое число y.

$y=17$. $1 \cdot (1 \cdot 7 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3) = 7 + 4 + 6 = 17$.

$y = 13$ $1 \cdot (1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3) = 16$

$y = 11$ $1 \cdot (1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3) = 15$

$y = 9$ $1 \cdot (1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3) = 14$.

$y = 8$ $3 \cdot (1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1) = 11 \cdot 3 = 33$

$y = 7$ $3 \cdot (1 \cdot 4 + 2 \cdot 2) = 8 \cdot 3 = 24$

$y = 6$ $2 \cdot (1 \cdot 4 + 2) = 6 \cdot 2 = 12$

$y = 5$ $2 \cdot (1 \cdot 4) = 4 \cdot 2 = 8$

$y = 4$ $1 \cdot (1 \cdot 3) = 3$

$y = 3$ $1 \cdot (1 \cdot 2) = 2$

$y = 2$ $1 \cdot (1 \cdot 1) = 1$

$y = 1$ $1 \cdot (1 \cdot 0) = 0$.

$\sum = 17 + 16 + 15 + 14 + 33 + 24 + 12 + 8 + 3 + 2 + 1 =$

$= (17 + 33) + (16 + 14) + (24 + 1) + (12 + 8) + (15 + 3 + 2) = 50 + 30 + 25 + 20 = 125$.

Ответ: 125 пар.

№6

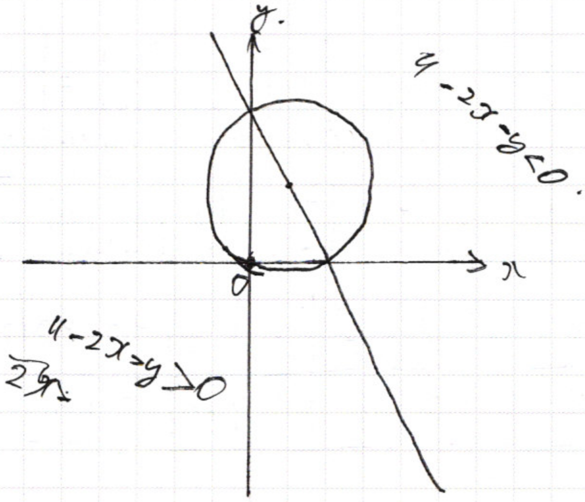
$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4 \\ x^2-2x-4y+y^2\le 0 \end{cases}$$

$x^2-2x+1+y^2-4y+4\le 5$

$(x-1)^2+(y-2)^2\le 5.$

$4-2x-y=0$

$y=2x+4.$



Случай №1.

$2x\ge 0$

$y\ge 0$

$4-2x-y\ge 0.$

$2x+y+4-2x-y>4$

$4>4$ (не уд;

Случай №2.

$2x\ge 0$

$y\ge 0$

$4-2x-y<0$ $\quad 2x+y>4.$

$2x+y-4+2x+y>4$

$4x+2y>8$

$2x+y>4$ (уд).

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Случай № 3. $2x<0$

$y>0$

$4-2x-y>0.$

$-2x+y+4-2x-y>4$

$4+(-4x)>4$ (уд)

$\to 0$

Случай № 4. $x>0$

$y<0$

$4-2x-y>0$

$2x-y+4-2x-y>4$

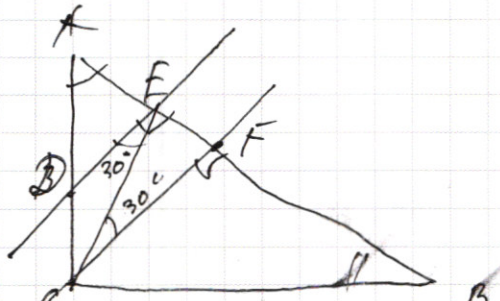
$4+(-2y)>4$ (уд).

$\to 0$

$\Downarrow$

$$S = \pi\cdot(\sqrt{5})^2 - \frac{2\cdot 4}{2} = 5\pi - 4.$$

Ответ: $5\pi - 4$.



№ 5.

$AC=\sqrt{7}$

$BC = 2\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

$\angle CED = 30°$.

т.к. $\triangle ABC$ – п/у.

по теор. Пифагора:

$AB = \sqrt{AC^2+CB^2} = \sqrt{7+\frac{4\cdot 7}{3}} = \sqrt{\frac{7(3+4)}{3}}$

$= \frac{7}{\sqrt{3}}$

Расм. $\triangle ABC$ и $\triangle ADE$:

$\angle ACB = 90° = \angle AED$ }

$\angle A$ - общий } $\Rightarrow$ ~~$\triangle ABC \sim \triangle ADE$~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{AC}{AB}$

Пусть $CF \perp AB$.

Расм. $\triangle ABC$ и $\triangle ACF$

$\angle A$ общий.

$\angle ACB = \angle AFC = 90°$ } $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ACF \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{AC}{AB} = \frac{CF}{CB}$

т.к. $DE \perp AB$ и $CF \perp AB$, то $DE \parallel CF$,

~~зна по теор. П~~

$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AF} = \frac{AF - EF}{AF}$

$DE \parallel CF$, CE - сек $\Rightarrow \angle DEC = \angle ECF = 30°$.

$ctg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$AF = \frac{AC^2}{AB} = \frac{\sqrt{3} \cdot 7 \sqrt{7}}{2\sqrt{7}}$

черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

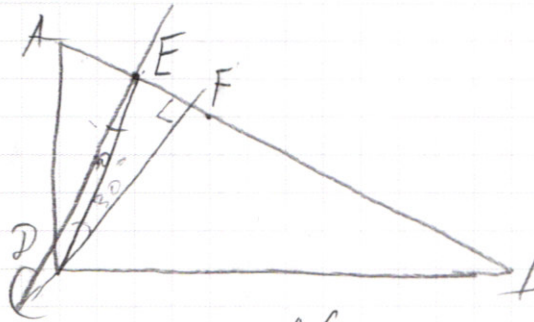
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$AC = \sqrt7$

$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$AB = \frac{7}{\sqrt3}$

$\angle CED = 30^\circ$

$\frac{AD}{AC} - ?$

$S_{\triangle AED} - ?$

$$\frac{AF}{AC} = \frac{AC}{AB} = \frac{CF}{CB} = \frac{AC^2}{AB} = \frac{7\sqrt3}{7} = \sqrt3$$

$$\cancel{AF = \frac{CB\cdot AC}{AB} = \frac{2\frac{\sqrt7}{\sqrt3}\cdot\sqrt7\cdot\sqrt3}{7} = \frac{2\cdot\frac{7}{3}}{7} = \frac{2}{3}}$$

$$\sin 30 = \frac{1}{2} = \frac{EF}{CF}$$

$$\cos 30^\circ = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt3}{2}$$

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \frac{1\cdot 2}{2\sqrt3} = \frac{1}{\sqrt3} \quad ctg\,\alpha = \sqrt3$$

$$CF = \frac{AC\cdot CB}{AB} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AF} = \frac{AF - EF}{AF} = \frac{\sqrt3 - \frac{2}{3}\cdot\sqrt3}{\sqrt3} = \frac{1}{3}$$

$$AE = \frac{\sqrt3}{3}$$

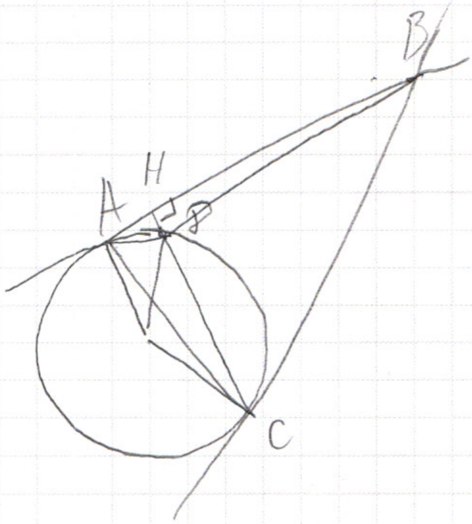
$$\frac{AE}{DE} = \frac{AC}{CB} = \frac{\sqrt7\cdot\sqrt3}{2\sqrt7} = \frac{\sqrt3}{2}$$

$$DE = \frac{AE\cdot 2}{\sqrt3} = \frac{\sqrt3\cdot 2}{3\sqrt3} = \frac{2}{3}$$

$$S_{\triangle ADE} = \frac{AE\cdot DE}{2} = \frac{\sqrt3\cdot \cancel{2}}{3\cdot 3\cdot \cancel{2}} = \frac{\sqrt3}{9}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



$\frac{AB}{CH} - ?$

$\triangle ABD = 6.$

$R = 4.$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$$

$x - \sqrt{xy} - 2y = 0$

$x - \sqrt{xy} + \frac{1}{4}y - 2\frac{1}{4}y = 0$

$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{y}\right)^2 = \frac{9}{4}y.$

$x - 2$

$-y^2 - 2y + 5 = \sqrt{(-y^2+5)y}$

$y^2 + 2y + 1 + 6 = -\sqrt{(-y^2+5)y}.$

$(y+1)^2 + 6 = -\sqrt{(5-y^2)y}$

$(x - 2y)^2 = xy.$

$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0.$

$x + y^2 = 5.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$0 \quad 2 \quad x$

x, $x-2$, $x-3$

$$\frac{x^2-6x+10-2(x-3)}{2x^2-4x+x(x-2)} \le 0$$

$$\frac{x^2-6x-2x+10+6}{2x^2+x^2-4x-2x} \le 0$$

$$\frac{x^2-8x+16}{3x^2-6x} \le 0$$

$$\frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \le 0$$

$[0, 2] \cup \{4\}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = p$ (p - простое)

$1 \le x \le 18$

$1 \le y \le 13$

$x, y \in N$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f(x) - f(y) < 0$

$f\left(\frac{1}{y} \cdot 2y\right) = f(2y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 2 = f(2) + f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 2$

$2 - f(2y)$

$f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$

$f(x) < f(y)$

$$\frac{x^2-6x+10+2(x-3)}{2x^2-4x+x(x-2)} \le 0$$

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x} \le 0$$

$$\frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x} \le 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{3x(\cancel{x-2})} \le 0$$

$$\frac{x-2}{3x} \le 0$$

$\varnothing$

$$\frac{x^2-6x+10+2(x-3)}{2x^2-4x-x(x-2)} \le 0$$

$$\frac{x^2-6x+2x+10-6}{2x^2-x^2-4x+2x} \le 0$$

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x} \le 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{x(x-2)} \le 0$$

$$\frac{x-2}{x} \le 0$$

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3$

$2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2$

$3 \cdot 1 = 3$

$4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 8$

$4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 8 \cdot 3 = 32$

$5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 15$

$6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 16$

$7 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 1 + 4 + 6 = 11$

$17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 24 + 8 + 12 + 3 + 2 + 1$

$50 + 30 + 20 + 20 + 25 = 145$

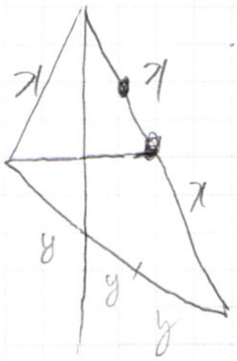
число	делит.	Σ		
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	2^2	4	4	4
5	5	5	5	5
6	$2 \cdot 3$	5	6	6
7	7	7	7	7
8	2^3	6	8	8
9	3^2	6	9	9
10	$2 \cdot 5$	7	11	11
11	11	11	13	13
12	$2^2 \cdot 3$	7	10	10
13	13	13		
14	$2 \cdot 7$	9		
15	$3 \cdot 5$	8		
16	2^4	8		
17	17	17		
18	$2 \cdot 3^2$	8		

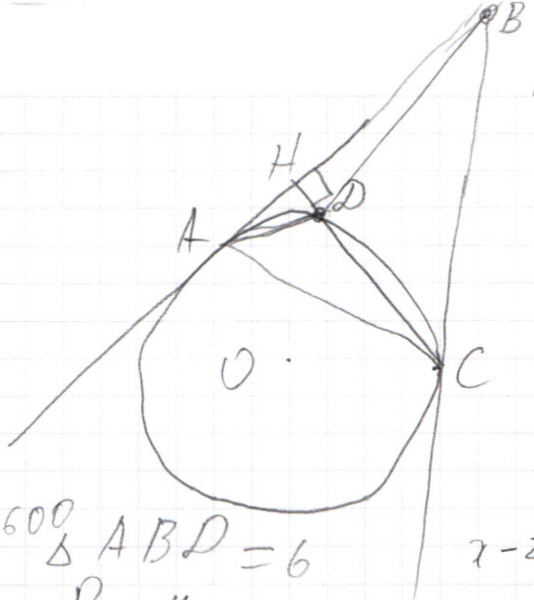
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)





$\frac{AB}{CH}$

$\frac{6}{4}$ и $\frac{3}{2}$

$3x + 3y = 3(x+y) = 600$ $\triangle ABD = 6$

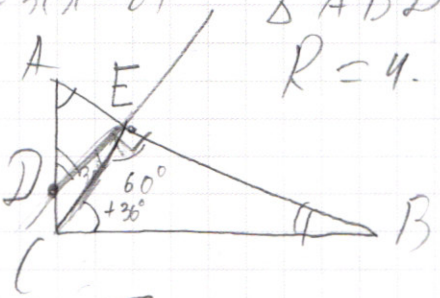
$R = 4.$

$x - 2y = \sqrt{xy}$

$x + y^2 = 5$

$x = -y^2 + 5$

$x + y = 200.$



$\begin{cases} 3x > 3y \\ x + 3y > 2x \\ 2x + 3y > x \end{cases}$ $AC = \sqrt{7}$

$\frac{AD}{AC} - ?$

$-y^2 - 2y + 5 = \sqrt{(-y^2+5)y}$

$\begin{cases} x > y \\ 3y > x \\ 3y > -x \checkmark \end{cases}$

$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\triangle AED - ?$

$AB = \sqrt{7 + \frac{4 \cdot 7}{3}} = \frac{7 \cdot 3 + 7 \cdot 4}{3} = \frac{7 \cdot 7}{3} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}\sqrt{3}}{3}$

$\angle CED = 30^0$

$y > \frac{x}{3}$

$\begin{cases} |2x| + y| + |4 - 2x - y| > 4 \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \le 0 \end{cases}$

$2x + y + 4 - 2x - y > 4$

$4 > 4$

$3y > 200 - y$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 \le 5$

$4 - 2x - y = 0$

$4y > 200$

$y > 50$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 \le 5$

$y = -2x + 4$

$200 - y > y$ $f(ab) = f(a) + f(b) = a + b$

$200 > 2y$ $f(ab) = ab$

$1 \le x \le 18$

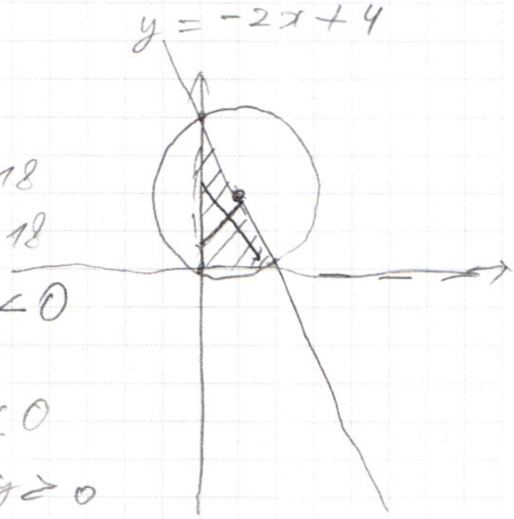
$1 \le y \le 18$

$\begin{cases} y < 100 \\ y > 50 \end{cases}$

$ab = a + b$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{CB}$



$f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\frac{x}{y} < 0$

$x > 0$ $y > 0$

$\Downarrow$

$x > 0$

$y > 0$

$4 - 2x - y < 0$

$2x + y - 4 + 2x + y > 4$

$4x + 2y > 8$

$2x + y > 4$ $\varnothing$

$x < y.$

$y > 0$

$x < 0$

$-2x + y + 4 - 2x - y > 4$

$4(-4x) > 0$

$x > 0$

$y < 0$

$4 - 2x - y > 0$

$2x - y + 4 - 2x - y > 4$

$4 - 2y > 4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)