МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 16

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\left(\frac{(x-1)^2+9}{|x-1|}-6\right)(|x-3|+|x|-3)\leqslant 0.$$

2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2-16y^2}=32, \\ 4y+\sqrt{x^2-16y^2}=23. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN, касается стороны AB в точке A. Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь треугольника ABN, если известно, что $AB=\sqrt{5}$, $BM=2$.

4. [5 баллов] Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается сторон AC и AB в точках E и D. Точка Y – основание перпендикуляра, опущенного из точки E на AB, а X – вторая точка пересечения EY со вписанной окружностью треугольника ABC. Найдите радиус этой окружности, если площадь треугольника AXD равна 5, а $2AD=3EY$.

5. [5 баллов] На доске выписано $6n$ последовательных натуральных чисел ($n\in\mathbb{N}$). Из них выбираются три попарно различных числа, среди которых ровно одно кратно 2 и ровно одно кратно 3. Известно, что можно составить ровно 5 900 таких троек. Чему равно n?

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} 4y+7x\geqslant|4y-7x|, \\ y\leqslant-3x+15, \\ x^2-10y+y^2+15\geqslant 0 \end{cases}$$

7. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые две последовательные степени числа десять равна 1356.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2-16y^2}=32 \\ 4y+\sqrt{x^2-16y^2}=23 \end{cases}$$

1) $(x+\sqrt{x^2-16y^2})-(4y+\sqrt{x^2-16y^2})=32-23$

$x-4y=9$

$x=9+4y$

2) Подставим выраженный через y x в первое уравнение системы:

$x+\sqrt{x^2-16y^2}=32$; $9+4y+\sqrt{(9+4y-4y)(9+4y+4y)}=32$

$9+4y+\sqrt{9\cdot(9+8y)}=32$

$\sqrt{9\cdot(9+8y)}=32-9-4y$; Возведем выражение в квадрат

$$\begin{cases} 9\cdot(9+8y)=(23-4y)^2 \\ \cancel{9\cdot(9+8y)\geqslant 0} \\ 23-4y\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\cdot 9+8\cdot y\cdot 9=23^2-2\cdot 4\cdot 23y+16y^2 \\ \cancel{9+8y\geqslant 0}\ 23-4y\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -16y^2+8y(9+23)+9^2-23^2=0 \\ \cancel{9+8y\geqslant 0}\ 23-4y\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y^2+16y-14\cdot 2=0 \ (*) \\ \cancel{9+8y\geqslant 0}\ 23-4y\geqslant 0 \end{cases}$$

$(*)$ $-y^2+16y-14\cdot 2=0$

$y^2-16y+14\cdot 2=0$

$D>0$

По т. Виета:

$y_1+y_2=16$

$y_1\cdot y_2=28$

$y_1=14$

$y_2=2$

$$\cancel{\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=14 \\ y=2 \end{array}\right. \\ 9+8y\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=14 \\ y=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=14 \\ x=9+4y \end{cases} \\ \begin{cases} y=2 \\ x=9+4y \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} y=14 \\ x=65 \end{cases}}$$

См. на след. стр.

n - число

x^2 - $n < 10^2 \to$ ост ≥ 100000

x^{2+1} $n < 10^{2+1} \to$ ост ≥ 100000

$|x-3| + |x| \geq 3$

1 2 3 4 5 6 | 7 8 9 | 1

$n > 10^2$

$n < 10^{2+1} \to$ ост ≥ 100000

$6n - 2n - 3n + n$

$n \cdot (6n-1) \cdot (6n-2) = 5900$

$\Downarrow$

$n > 10^2$

$n > 10^{2+1}$

$\frac{xyz}{+ \; yz}$

≥ 100

$999 + 99 = 1$

n

ост 1

ост

$z = 4, 3, 2, 1, 0$

1356 | 2 = 678

$\frac{yz}{+ \; z}$

$n \equiv_{100000} k$ $k = \underline{xyzpq}$ 0, 1

$\frac{xyzp}{+ \; yzp}$

$n \equiv_{1000} v$ $v = \underline{yzpq}$

59 | 7 $8 \cdot 7 = 4 \cdot 14$ $69 \cdot 2^2 \cdot 5^2$

$1\,0\,\underbrace{2\,3\,6\,1}$ $2361 + 2361$

$1356 :$

1356 | 2 = 678

100678 678 $59 \cdot 4$

5 25

$\underline{yzpq} \cdot 2 = 1356$ $\frac{xyzpq}{+ \; yzpq}$ $n^2(14n-1)$

$25 \cdot 69$ $\frac{6900}{4}$ $14n - 1 = 15$

$100 \cdot$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. продолжение

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 14 \\ y = 2 \end{array} \right. \\ 23 - 4y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 9 + 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 17 \end{cases}$$

Ответ: $(17; 2)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$x - 4y = 9$

$x = 9 + 4y$

$8 \cdot 32^{2} + (9-23) \cdot 32^{2}$

$\sqrt{(4y+9)^2 - 16y^2} =$

$= (4y + 9 - 4y)(4y + 9 + 4y)$

$= \sqrt{9(8y+9)}$

$14 \cdot 4 = 40 + 16 = 56$

$56 + 9 = 65$ $20 \cdot 15$

$\frac{15 \cdot 4}{19} \cdot \frac{5}{5}$

$3 \cdot \sqrt{8y+9} + 4y - 23 = 0$

$x - 4y = 9$

$\sqrt{x = 9 + 4y}$

$9 - 23 = 14$ $\frac{300}{95}$

$14 \cdot 32$

$\frac{300}{95} ? 10$

$9 + 4y + \sqrt{9 \cdot (9 + 8y)} = 32$

$14 \cdot 2$

$49 \cdot 2 = 98$

$\sqrt{9 \cdot}$

$\frac{300}{95} > 3$

$49 + 9$

$9^2 + 8 \cdot 9y - 23^2 - 16y^2 + 23 \cdot 8y$ $3^2 = 9$

$-16y^2 + 8 \cdot 32y + (9-23) \cdot 32^2$

$49 \cdot (19 \cdot 7 - 1)$

$-y^2 + 16y = -14$

$8^2 (14 \cdot 8 - 1)$

$14 \times 8 = 116$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ $64 \cdot$

$9 \cdot 8$

$xy + yx$

$115 \times 64 = 460 + 696$

$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 ? 2 \cdot 5 \cdot 19^2$

113

$\frac{(15 \cdot 4)^2}{19^2} ? 10$

$2^3 \cdot 3^2 ? 19^2$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

По условию, ровно одно число кратно 2 и ровно 1 число кратно 3. Тогда у нас может быть два случая в тройках чисел:

1) Одно число кратно двум и трем, т.е. $\vdots 6$.

Посчитаем количество таких троек. Чисел $\vdots 6$ у нас n (т.к. разделим $6n$ чисел на последоват. группы по 6: $\underbrace{1,\dots,6}, \dots \underbrace{x, x+1, x+2, \dots, x+5}, \underbrace{x+6, \dots x+11}, \dots$; и в каждой группе будет только 1 число $\vdots 6$.) А оставшиеся 2 числа должны не делиться на 2 и на 3. Таких чисел $2n$ ~~(т.к. среди любых трех последоват. чисел~~ (т.к. $\underset{\text{все числа}}{6n} - \underset{\vdots 3}{2n} - \underset{\vdots 2}{3n} + \underset{\vdots 6}{n} = 2n$ (т.к. числа, кратные 6, были посчитаны 2 раза)).

Тогда способов выбрать тройку: $n \cdot \frac{2n\cdot(2n-1)}{2} = n\cdot n\cdot(2n-1) = 2n^3 - n^2$

2) Одно число $\vdots 2$, а другое $\vdots 3$. ~~Чисел $\vdots 2$ у нас $3n$ (каждое второе число); чисел $\vdots 3$ у нас $2n$ (каждое третье), а чисел ни кратных ни 3 ни 2 у нас $2n$ (считали выше). Тогда способов выбрать набор $3n\cdot(2n)\cdot(2n)$.~~

~~Также, из условия: $12n^3 + 2n^3 - n^2 = 5900$.~~

~~$14n^3 - n^2 = 5900$~~ Чисел $\vdots 2$, но не $\vdots 3$ у нас $2n$ (каждое второе число четное, а из этих четных $\frac{2}{3}$ не кратные 3, т.е. $6n:2\cdot\frac{2}{3} = 2n$); Чисел $\vdots 3$, но не $\vdots 2$ у нас n (каждое 3 кратно 3, а каждое 2 из $\vdots 3$ еще и кратно 2, т.е. $\frac{6n}{3}\cdot\frac{1}{2} = n$)

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5. продолжение

~~Ана~~

А чисел, не кратных ни 2 не 3 у нас $2n$ (считали выше). Тогда всего троек чисел, одно из которых $\vdots 3$, а другое $\vdots 2$, у нас: $2n \cdot n \cdot 2n = 4n^3$.

3) Тогда всего троек: $4n^3 + 2n^3 - n^2 = 6n^3 - n^2 = n^2(6n-1)$

Тогда легко заметить, что $n = 10$; действительно, $10^2(60-1) = 100 \cdot 59 = 5900$. Также заметим, что существует только одно решение, ведь, т.к. $n > 0$, то n^2 растет и $6n-1$ растет, ~~тогда~~ также $n^2 > 0$ и $6n-1 > 0$, значит при $n > 10$, $n^2(6n-1) > 5900$ а при $n < 10$, $n^2(6n-1) < 5900$.

Ответ: $n = 10$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

Пусть ~~чи~~ S – ~~степень~~ меньшая из степеней 10, по модулю которых мы сравниваем наше шестизначное число, пусть ~~чи~~ шестизначное число $n = x\cdot10^5 + y\cdot10^4 + z\cdot10^3 + g\cdot10^2 + v\cdot10^1 + k$ ($x, y, z, g, v, k < 10$ и $x>0; y, g, v, k, z \geq 0$)

Тогда $n \pmod{10^5} + n \pmod{10^{S+1}} = 1356$.

Заметим, что $S \leq 5$, т.к. иначе сумма остатков была бы хотя бы шестизначным числом.

1) $S=5$. Тогда $x\cdot10^5 + 2(y\cdot10^4 + \cancel{y\cdot10^3} + z\cdot10^3 + g\cdot10^2 + v\cdot10 + k) = 1356$. Заметим, что $x, y, z = 0$, иначе эта сумма хотя бы 2000. ~~Тогда, $2(\cancel{z\cdot10^3} + g\cdot10^2 + v\cdot10 + k) = 1356$, $\cancel{z\cdot10^3} + g\cdot10^2 + v\cdot10 + k = 678$, уравнение имеет единственные ко~~ Но $x > 0$, противоречие.

2) $S=4$. Тогда $y\cdot10^4 + 2(z\cdot10^3 + g\cdot10^2 + v\cdot10 + k) = 1356$. Заметим, что $y, z = 0$, иначе эта сумма хотя бы 2000. Тогда $g\cdot10^2 + v\cdot10 + k = 678$. $g=6, v=7, k=8$
$1 \leq x \leq 9$. ~~Всего~~ Тогда всего случаев 9. (для x от 1 до 9)

3) $S=3$. Тогда ~~$y\cdot10^3 + 2($~~ $z\cdot10^3 + 2(g\cdot10^2 + v\cdot10 + k) = 1356$. ~~Случаи, когда~~

a) $z=0$. Тогда. $2(g\cdot10^2 + v\cdot10 + k) = 1356$, $g=6$, $v=7, k=8$. $1 \leq x \leq 9$; $1 \leq y \leq 9$ ($y \neq 0$, т.к. этот случай посчитали раньше). Всего чисел $9\cdot9 = 81$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7. Продолжение

б) $z=1$. Тогда $2(g\cdot 10^2+v\cdot 10+k)=356$, $g=1, v=7, k=8$

~~Всего случаев~~ $1\le x\le 9, 0\le y\le 9$. Всего случаев:

$9\cdot 10=90$.

4) $S=2$. Тогда $g\cdot 10^2+2(v\cdot 10+k)=1356$. Но такого быть не может, ведь $g\cdot 10^2\le 900$; $2(v\cdot 10+k)\le 99\cdot 2$, тогда $g\cdot 10^2\cdot 2(v\cdot 10+k)\le 900+99\cdot 2<1356$.

5) $S=1$. Также такого быть не может, т.к. $\cancel{g}\, v\cdot 10+2k<1356$.

6) $S=0$. Такого быть не может, т.к. $k<1356$.

7) Тогда всего чисел: $9+81+90=180$.

Ответ: 180.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$$\begin{cases} 4y+7x \geq |4y-7x| \\ y \leq -3x+15 \\ x^2-10y+y^2+15 \geq 0 \end{cases}$$

а) $\begin{cases} 4y-7x \geq 0 \\ 4y+7x \geq 4y-7x \\ y \leq -3x+15 \\ x^2+(y-5)^2-10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{7}{4}x \\ x > 0 \\ y \leq -3x+15 \\ x^2+(y-5)^2-10 \geq 0 \end{cases}$

Найдем ~~после каких~~ при каких x решений точно не будет. $\frac{7}{4}x = -3x+15$; $\frac{7}{4}x+3x=15$

$\frac{7+12}{4}x=15$; $\frac{19}{4}x=15$ $\quad x=\frac{15\cdot 4}{19}$. При $x > \frac{15\cdot 4}{19}$, т.к. $y=\frac{7}{4}x$ – возрастающая, а $y=-3x+15$ – убывающая, то решений не будет.

Рассмотрим $x^2+(y-5)^2-10 \geq 0$

$\begin{cases} y \geq \sqrt{-x^2+10}+5 \\ -x^2+10 \geq 0 \end{cases}$ Заметим, что при $x=\frac{15\cdot 4}{19}$

$\cancel{x}\ \frac{15^2\cdot 4^2}{19^2} < 10$, т.к. $15^2\cdot 4^2 < 10\cdot 19^2$ $(5^{\cancel{2}}\cdot 3^2\cdot 2^{\cancel{4}\,3} < \cancel{5}\cdot\cancel{2}\cdot 19^2)$.

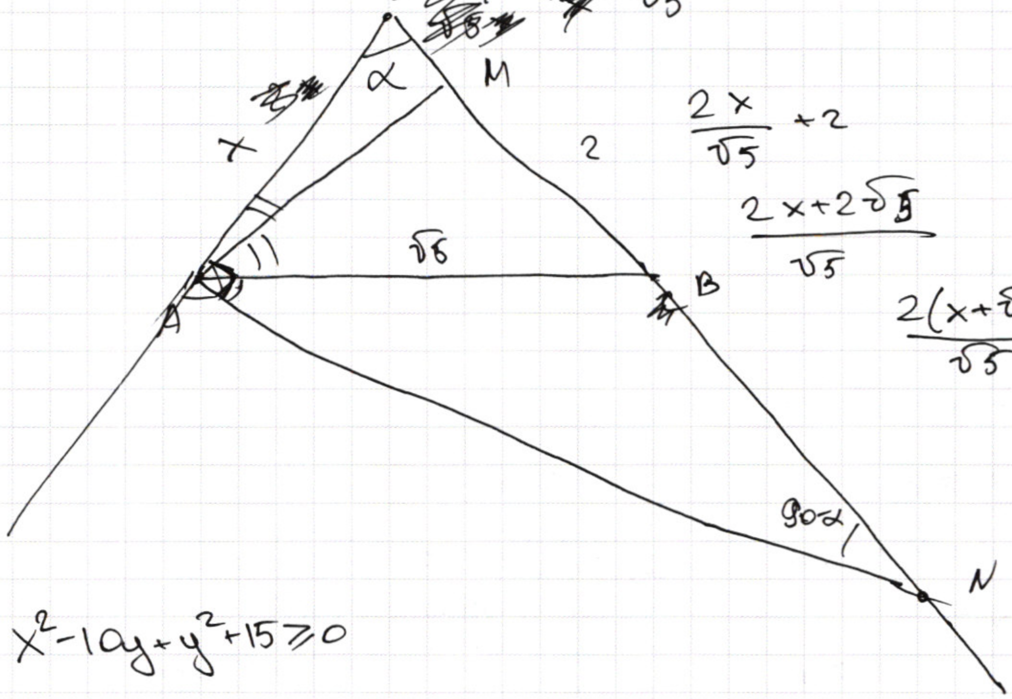
Также заметим, что

$\cancel{\frac{7}{4}x \geq \sqrt{-x^2+10}-5}$

$\cancel{\left(\frac{7}{4}x+5\right)^2 \geq -x^2+10}$

$\cancel{\frac{49}{16}x^2+\frac{35}{2}x+25 \geq -x^2+10}$

$\frac{2x}{\sqrt{5}}$



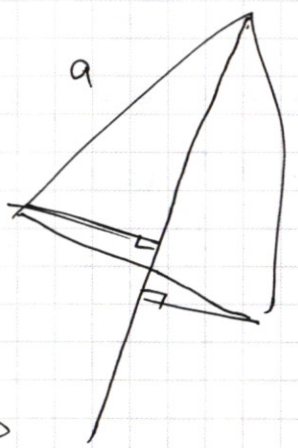
$\frac{2x}{\sqrt{5}} + 2$

$\frac{2x+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$\frac{2(x+\sqrt{5})}{\sqrt{5}}$

$x^2 - 10y + y^2 + 15 \geqslant 0$

$y^2 - 10y + 15 \geqslant$



$x^2 + (y-5)^2 - 10 \geqslant 0$

$(y-5)^2 \geqslant -x^2 + 10$

$y \geqslant \sqrt{-x^2+10} + 5$