МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED=45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\le 0$$

① 0 ② 1 ③ 3 ④ x

① $\dfrac{x^2-2x+5+4(x-1)}{4x^2-12x-x(3-x)}\le 0$

$x<0$

$$\frac{x^2-2x+5+4x-4}{4x^2-12x-3x+x^2}\le 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{5x(x-3)}\le 0$$

Решаю методом интервалов

$+$ $+$ $-$ $+$

-1 0 3

(При $x=-1$ нер-во верно)

$x\in\{-1\}\cup(0;3)$

$x\in(0;3)$ – не входит в усл.

② $x\in[0;1)$

$$\frac{x^2-2x+5+4(x-1)}{4x^2-12x+x(3-x)}\le 0$$

$$\frac{x^2-2x+5+4x-4}{4x^2-12x+3x-x^2}\le 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{3x(x-3)}\le 0$$

$+$ $+$ $-$ $+$

-1 0 3

$x=-1$ не входит в рассм. интервал

$x\in\{-1\}\cup(0;3)\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in(0;1)$

③ $x\in[1;3)$

$$\frac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+x(3-x)}\le 0$$

$$\frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x+3x-x^2}\le 0 \quad \frac{(x-3)^2}{3x(x-3)}\le 0$$

$+$ $-$ $+$

0 3

$x\in(0;3)$

$x\in[1;3)$ $\Rightarrow$ $x\in[1;3)$

④ $x\in[3;+\infty)$

$$\frac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+x(x-3)}\le 0$$

$$\frac{x^2-6x+9}{5x^2-15x}\le 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{5x(x-3)}\le 0$$

$+$ $-$ $+$

0 3

$x=3$ не входит в ОДЗ (знаменатель обр. в 0)

$x\in(0;3)$ – не входит в инт.

$\Rightarrow$

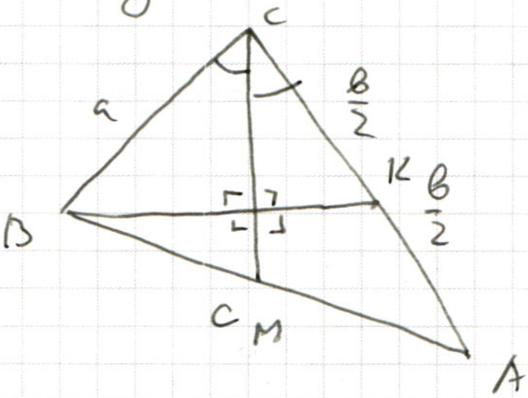
$$\left[\begin{array}{ll} ① & x\in\varnothing \\ ② & x\in(0;1) \\ ③ & x\in[1;3) \\ ④ & x\in\varnothing \end{array}\right.\Rightarrow x\in\{1\}\cup(0;3)$$

$$\boxed{\text{Ответ: } x\in\{-1\}\cup(0;3)}$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 2.



Пусть стороны a, b, c

$a+b+c=300$

$a+b>c$

$b+c>a$

$a+c>b$

CM - бисс. $\Rightarrow$ $BC=a$, $AB=c$, $AC=b$

BK - мед

т.к. BK - мед

$CK=AK=\frac{b}{2}$

$\angle BCO=\angle OCK \Rightarrow \triangle BCO=\triangle OCK$ по 2 углам и стороне

$a=\frac{b}{2} \Rightarrow b=2a$

$$\begin{cases} 3a+c=300 \\ 3a>c \\ 2a+c>a \\ a+c>2a \Rightarrow a>c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a+c=300 \\ 3a>c \\ a<c \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3}c<a<c$$

$c<3a$	$a<c$
$3a+c<3a+3a$	$a+3a<c+3a$
$300<6a$	$4a<300$
$a>50$	$a<75$

$\Downarrow$

$50<a<75$

$a_n=51+(n-1)<75$

$n-1<24$

$n<25 \Rightarrow n=24$

Ответ: 24 треугольника.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3.

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$ - возв. в квадрат

$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$ $\begin{cases} y(y-x)-4x(y-x)=0 \\ x^2+2y=9 \end{cases}$ $\begin{cases} (y-4x)(y-x)=0 \\ x^2+2y=9 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-x=0 \\ x^2+2y=9 \end{cases} \\ \begin{cases} y-4x=0 \\ x^2+2y=9 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=x \\ x^2+2x-9=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=4x \\ x^2+8x-9=0 \end{cases} \end{array}\right.$

1) $x^2+2x-9=0$

$D=40$

$x_{12}=\frac{-2\pm\sqrt{40}}{2}$ =>

=> $x_1=-1+\sqrt{10}$

$x_2=-1-\sqrt{10}$

(т.к. $x=y$

$y_1=\sqrt{10}-1$

$y_2=-1-\sqrt{10}$)

Сделаем проверку

$y-2x\geq 0$

1) $\sqrt{10}-1-2(\sqrt{10}-1)=\sqrt{10}-1-2\sqrt{10}+2=$

$=1-\sqrt{10}<0$

т.е. $(-1+\sqrt{10};-1+\sqrt{10})$ не подходит

2) $-1-\sqrt{10}-2(-1-\sqrt{10})=-1-\sqrt{10}+2+2\sqrt{10}=1+\sqrt{10}>0$ (верно)

2) $x^2+8x-9=0$

$D=64-4\cdot(-9)=100$

$x_1=-9$

$x_2=1$ т.к $y=4x$ $y_1=-36$

$y_2=4$

Проверка: $y-2x\geq 0$: $4-2\geq 0$

т.е. $(1;4)$ - верно

$-36-2\cdot(-9)=-36+18<0$ => $(-9;-36)$ не явл. реш.

=> Ответ: $(1;4)$; $(-1-\sqrt{10};-1-\sqrt{10})$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

Задача 6

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6 & (1) \\ x^2-2x-3y+y^2\le 0 & (2) \end{cases}$$

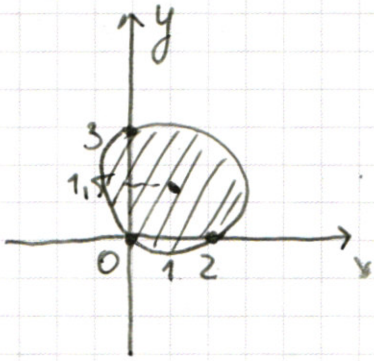
Рассмотрим (2)

$x^2-2x-3y+y^2\le 0$ можно записать как $x^2-2x+1+y^2-2\cdot\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}-1-\frac{9}{4}\le 0$

$(x-1)^2+(y-\frac{3}{2})^2\le\frac{13}{4}$ — это окружность

Решением данного неравенства является точки круга с ц. в т. $(1;\frac{3}{2})$ и $R=\frac{\sqrt{13}}{2}$

Точки окружности также являются решением неравенства.



Теперь рассмотрим (1)

1) $x>0$ $y>0$

(Рассм. I четверть)

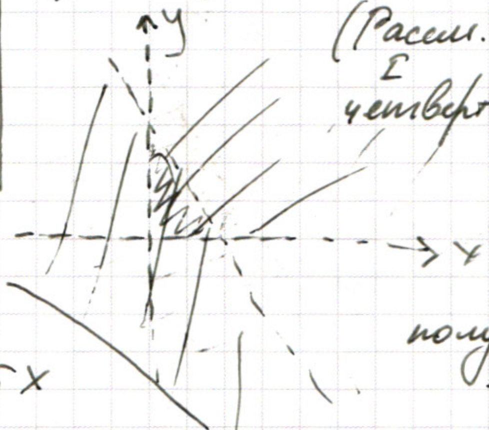
Пусть $6-3x-2y>0$

$-2y>3x-6$

$y<3-1,5x$

$3x+2y+6-3x-2y>6$

$6>6$ (не верно



Т.к. у нас получилось что $6>6$ этот случай решений не имеет

2) $x>0, y>0$

(Тоже I четв.)

$6-3x-2y<0$

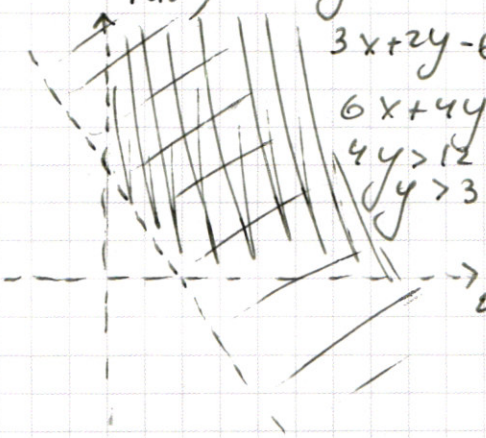
$\Rightarrow y>3-1,5x$

$3x+2y-6+3x+2y>6$

$6x+4y>12$

$4y>12-6x$

$y>3-1,5x$



(Заштрих обл — мн-во решени

3) $x>0, y<0$

Рассм. 4 четверть

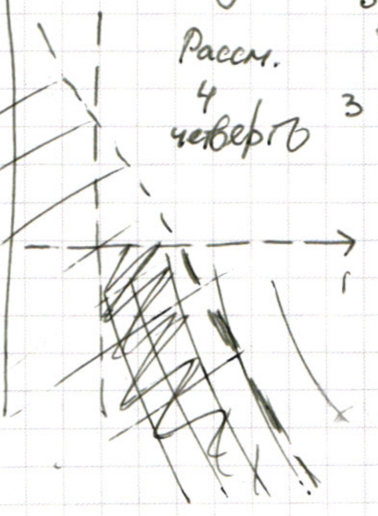
$6-3x-2y>0$

т.е. $y<3-1,5x$

$3x-2y+6-3x-2y>6$

$-4y>0$

$y<0$



Решение — заштрих. обл.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6 (продолжение)

4) $x>0, y<0$

$6-3x-2y<0$ т.е. $y>3-1{,}5x$

$3x-2y-6+3x+2y>6$

$6x>12$

$x>2$

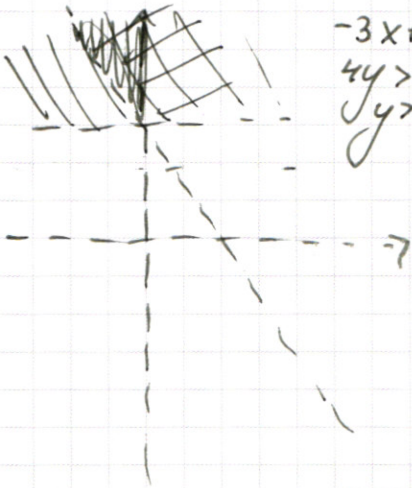
(Решение — заштрих. обл.)

5) $x<0, y>0$ $6-3x-2y<0$ т.е. $y>3-1{,}5x$

$-3x+2y-6+3x+2y>6$

$4y>12$

$y>3$



(Заштрих. обл. — решение)

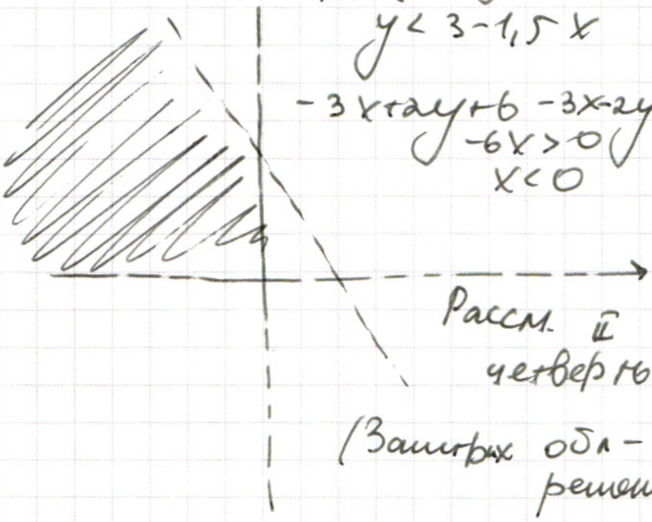
6) $x<0, y>0$

$6-3x-2y>0$ т.е. $y<3-1{,}5x$

$-3x+2y+6-3x-2y>6$

$-6x>0$

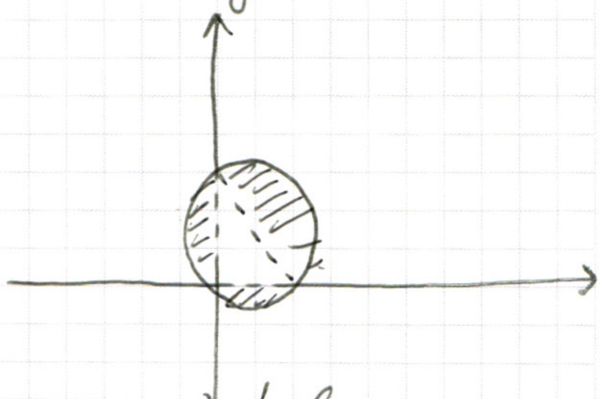
$x<0$



Рассм. II четверть

(Заштрих обл — решение)

7) $x<0, y<0$ можно не рассматривать потому что точки круга туда не попадают.



$S=\pi R^2-\frac{1}{2}ab$

$R=\frac{\sqrt{13}}{2}$ $a=3$ $b=2$

$\Rightarrow S=\frac{13}{4}\pi-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=$

$=\frac{13\cdot 3{,}14}{4}-3=7{,}205$

$$\begin{array}{r} 3{,}14 \\ \times\ 13 \\ \hline 942 \\ 314\ \ \\ \hline 40{,}82 \end{array}$$

Ответ: $S=7{,}205$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

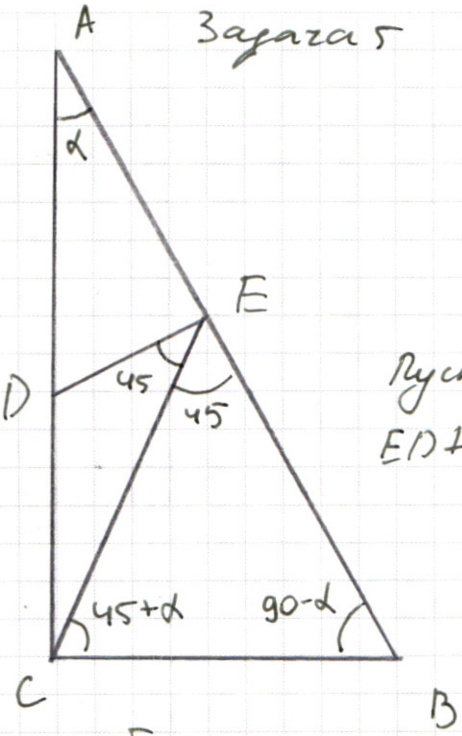
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Задача 5

Дано: ABC-прямоуг
$DE \perp AB$, $\angle CED = 45^\circ$

$\frac{AD}{AC}$ - ? $\quad S_{AED}$ - ?

Решение:

Пусть $\angle CAB = \alpha \Rightarrow \angle ABC = 90 - \alpha$

$ED \perp AB$, $\angle DEC = 45^\circ \Rightarrow \angle CEB = 180 - 90 - 45 = 45^\circ$

в $\triangle CEB$ $\angle ECB = 180 - 90 + \alpha - 45 = 45 + \alpha$

из $\triangle ABC$: $\frac{AC}{\sin(90-\alpha)} = \frac{CB}{\sin\alpha}$ (по теор. синусов)

$\Rightarrow \frac{\frac{5\sqrt{29}}{2}}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{29}}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{5}{2\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} \Rightarrow tg\alpha = \frac{2}{5}$

$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha \Rightarrow 1 + \frac{4}{25} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{29}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$

Из $\triangle ECB$ (по теор. синусов) $\frac{EB}{\sin(45+\alpha)} = \frac{CB}{\sin 45}$

$EB = \frac{(\sin 45 \cdot \cos\alpha + \cos 45 \cdot \sin\alpha) \cdot CB}{\sin 45} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right) \cdot \sqrt{29}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$

$= (\cos\alpha + \sin\alpha) \cdot \sqrt{29} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}} + \frac{5}{\sqrt{29}}\right) \cdot \sqrt{29} = 7 \quad \boxed{EB = 7}$

$AB^2 = AC^2 + CB^2 = \left(\frac{5\sqrt{29}}{2}\right)^2 + (\sqrt{29})^2 = \frac{25}{4} \cdot 29 + 29 = \frac{29 \cdot 29}{4} \Rightarrow AB = \frac{29}{2}$

$AE = AB - ED = \frac{29}{2} - 7 = 7{,}5$. Из $\triangle ADE$ по теор. синусов.

$\frac{AD}{\sin 90} = \frac{AE}{\sin(90-\alpha)} \Rightarrow AD = \frac{AE}{\cos\alpha} = \frac{7{,}5}{\frac{5}{\sqrt{29}}} = \frac{15}{2} \cdot \frac{\sqrt{29}}{5} = \frac{3\sqrt{29}}{2}$

$\frac{AD}{DC} = \frac{3\sqrt{29}}{2} : \frac{5\sqrt{29}}{2} = \frac{3\sqrt{29}}{2} \cdot \frac{2}{5\sqrt{29}} = \frac{3}{5} \longrightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

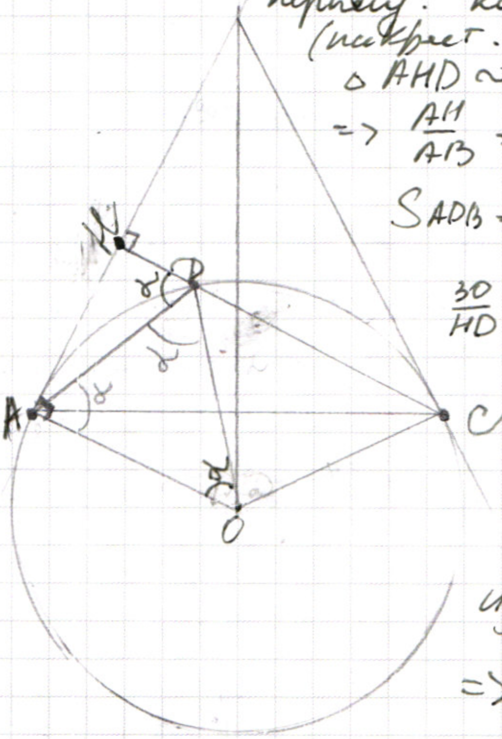
Задача 5 (продолжение)

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} AD \cdot AE \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{45}{4}$$

Ответ: $\frac{AD}{DC} = \frac{3}{5}$

$S_{ADE} = 11\frac{1}{4}$

Задача 4



Пусть $\angle HDA = \alpha$, $\angle HAD = 90-\alpha$, $OA \perp AB$ (радиус перпенд. касательной) $CH \perp AB$, $OA \parallel HC \Rightarrow \angle OAD = \angle ADH$ (накрест. леж.

$\triangle AHD \sim \triangle OAB$ (по двум углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{HD}{AO} \Rightarrow AB = \frac{AH \cdot AO}{HD} = \frac{6AH}{HD}$ (1)

$S_{ADB} = \frac{1}{2} HD \cdot AB \Rightarrow AB = \frac{30}{HD} \Rightarrow$ в (1)

$\frac{30}{HD} = \frac{6AH}{HD} \Rightarrow AH = 5$, $\triangle AOD$ р.б. т.к. $AO = OD$ потому что радиусы

$\triangle AOD$: по теор. син

$\frac{AD}{\sin(180-\alpha\cdot 2)} = \frac{AD}{\sin\alpha} \cdot \frac{AD}{2\sin\alpha} = \frac{6}{\sin\alpha} \Rightarrow$

$AD = \frac{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot 6}{\sin\alpha} = 12 \cdot \cos\alpha$

Из $\triangle AHD$: $\frac{AD}{\sin 90} = \frac{AH}{\sin\alpha}$ (по теор. син)

$\Rightarrow \frac{12\cos\alpha}{1} = \frac{5}{\sin\alpha} \Rightarrow 6\sin 2\alpha = 5 \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{5}{6}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{11}}{6}+1}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{11}+6}{12}}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{6-\sqrt{11}}{12}}$ Из $\triangle AHC$ $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2}$ (2)

$\triangle AOC$: $AC^2 = AO^2 + OC^2 - 2AO \cdot OC \cdot \cos 2\alpha$ (по теор. косинусов)

$AC^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cos 2\alpha = 72(1-\cos 2\alpha) = 2 \cdot \sin^2\alpha \cdot 72$, из (2) $\Rightarrow$

$CH = \sqrt{144\sin^2\alpha - 25} = \sqrt{144 \cdot \left(\frac{6-\sqrt{11}}{12}\right) - 25} = \sqrt{47 - 12\sqrt{11}}$

$AD = 12\cos\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{11}+6}{12}} = \sqrt{12(\sqrt{11}+6) - 25} = \sqrt{12\sqrt{11}+47}$

$AB = \frac{30}{HD} = \frac{30}{\sqrt{12\sqrt{11}+47}}$ $\frac{AB}{CH} = \frac{30}{\sqrt{12\sqrt{11}+47}\sqrt{47-12\sqrt{11}}} = \frac{30}{\sqrt{47^2 - 12 \cdot 12 \cdot 11}} =$

$= \frac{30}{\sqrt{625}} = \frac{6}{5}$

Ответ: $\frac{AB}{CH} = \frac{6}{5}$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

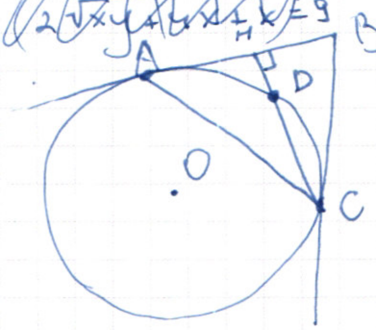
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

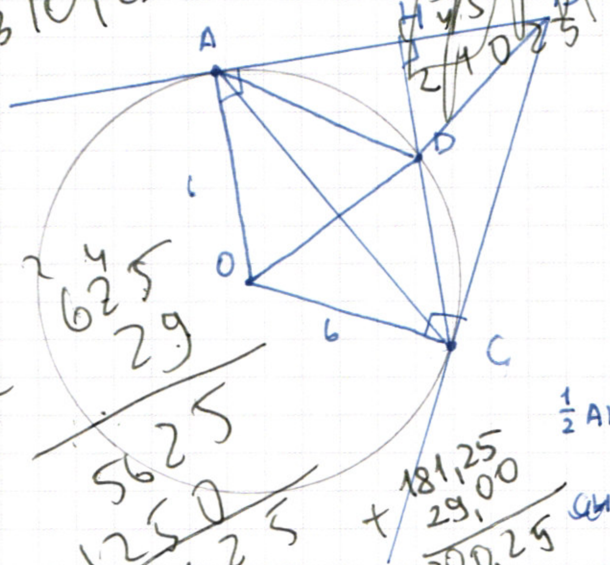
$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$y = \sqrt{xy} + 2x$

$310{,}25$

300





$\frac{AB}{CH}$

$AB = BC$

$S_{ABD} = 15$

$R = 0$

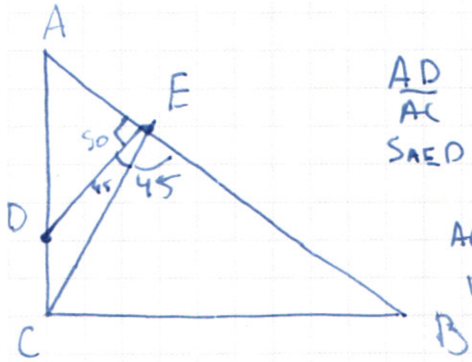
29

$\frac{1}{2} AB \cdot DH = 15$

$2\ 625$, 29, 5625, 1250, 18125

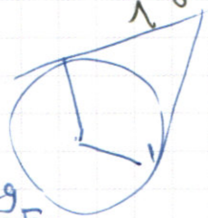
$181{,}25 + 29{,}00 = 300{,}25$

$\frac{3}{8} = \frac{3}{12}$



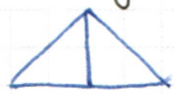
$\frac{AD}{AC}$

S_{AED}



$AC = \sqrt{29}$

$BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$



$AC = \sqrt{29}$

$BC = \frac{5\sqrt{29}}{2} \Rightarrow AB = 29 + \frac{25 \cdot 29}{4} = 6{,}25 \cdot 29$

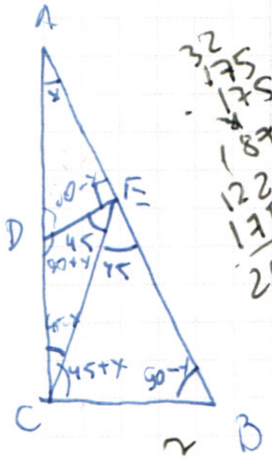
$AB = 181{,}25$

$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$

$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$

$\frac{AB}{AE} =$



$AC = \frac{BC \cdot AE}{DE}$

$AD = \frac{DE \cdot AB}{BC}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{DE \cdot AB}{BC} \cdot \frac{DE}{BC \cdot AE} = \frac{DE^2 \cdot AB}{BC^2 \cdot AE}$

$\frac{AC}{AE} \cdot \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AB}$

$(5 + 2\sqrt{20})^2$

$15 + 20\sqrt{20} + 4 \cdot 20$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \le 0$$

① 0 ② 1 ③ 3 ④ x

① $\frac{x^2-2x+5+4(x-1)}{4x^2-12x-x(3-x)} \le 0$ $x<0$

$\frac{x^2-2x+5+4x-4}{4x^2-12x-3x+x^2} \le 0$

$\frac{x^2+2x+1}{5x^2-15x} \le 0$

$\frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \le 0$

РМИ

$+$ -1 $+$ 0 $-$ 3 $+$

$x \in (0;3)$

но

$x<0 \Rightarrow$

на этом отрезке реш. нет.

④ $x \in [3;+\infty)$

$\frac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+x(x-3)} \le 0$

$\frac{x^2-6x+9}{5x^2-15x} \le 0$

$\frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \le 0$

$+$ 0 $-$ 3 $+$

$x \in (0;3)$ — не входит в усл.

② $x \in [0;1)$

$\frac{x^2-2x+5+4(x-1)}{4x^2-12x+x(3-x)} \le 0$

$\frac{x^2-2x+5+4x-4}{4x^2-12x+3x-x^2} \le 0$

$\frac{x^2+2x+1}{3x^2-9x} \le 0$

$\frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \le 0$

РМИ

$+$ -1 $+$ 0 $-$ 3 $+$

$x \in (0;3)$

У нас усл., что $x \in [0;1)$ ищем $\cap$ пересеч.

$x \in (0;1)$

③ $x \in [1;3)$

$\frac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+x(3-x)} \le 0$

$\frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x+3x-x^2} \le 0$

$\frac{x^2-6x+9}{3x^2-9x} \le 0$

$\frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \le 0$

$+$ 0 $-$ 3 $+$

$x \in (0;3)$

У нас инт. от $[1;3)$ $\Rightarrow$ весь инт явл. реш.

$1+20-14-9$

20

① $x \in \varnothing$

② $x \in (0;1)$

③ $x \in [1;3)$

④ $x \in \varnothing$

$\Downarrow$

Объединение

$x \in (0;3)$

Ответ: $x \in (0;3)$

$-y^2+3y$

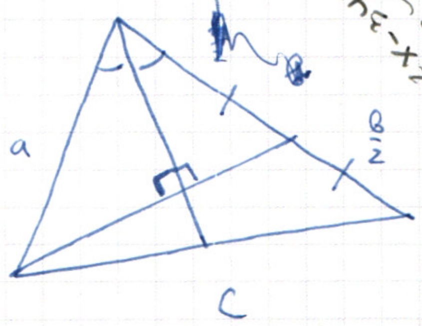
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

N2
$a+b+c=300$



N3

$y-2x=\sqrt{xy}$
$2y+x^2=9$

$x, y \geq 0$
$x, y \leq 0$

x, y одного знака (!)

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$

$y^2-5xy+4x^2=0 \Rightarrow 4x^2=5xy-y^2$

$\begin{cases} y^2-5xy+4x^2=0 \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$

$x^2 \geq 0$

$x^2=9-2y$
$x=\sqrt{9-2y}$

$\Rightarrow y^2-5\sqrt{9-2y}+4(9-2y)=0$

$y^2-5\sqrt{9-2y}+36-8y=0$

$5\sqrt{9-2y}=-y^2+8y-36$

$5\sqrt{9-2y}=-(y^2-8y+16+20)$

$5\sqrt{9-2y}$

$y \geq 2x$

$2y \geq 4x$

$9-x^2 \geq 4x$

$-x^2-4x+9 \geq 0$

$x^2-4x+9=0$ $D=16+36=52$

$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{52}}{-2}$ $\Rightarrow x_1=-2+\sqrt{13}$, $x_2=-2-\sqrt{13}$

$x \in [-2-\sqrt{13}; -2+\sqrt{13}]$

при $x \in (-3;3)$ $y \geq 0$

при $x \in (0;3)$ $y \geq 0$

при $x \in (-\infty;-3)$

$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ x^2-2x-3y+y^2 \geq 0 \end{cases}$

$y-2x=\sqrt{x\frac{(9-x^2)}{2}}$

$\frac{9-x^2}{2}-2x=\sqrt{x\frac{(3-x)(3+x)}{2}}$

$\frac{9-x^2-4x}{2}=\sqrt{\frac{x(3-x)(3+x)}{2}}$

$\frac{(x^2-4x+9)^2}{4}=\frac{x(3-x)(3+x)}{2}$

$(x^2-4x+9)^2=2x(3-x)(3+x)$

$(x^2-4x+9)(x^2-4x+9)=2x(9-x^2)$

$x^4-4x^3+9x^2-4x^3+16x-36x+9x^2-36x+81$

$x^4-8x^3+18x^2-74x+81=0$

$81-8\cdot27+18\cdot9=74\cdot3+81$

81
·136
486
243
2916

·81
18
648
81
1458

81
·81
81
648
6561

$27\cdot6=162$

$81\cdot9=729$