МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

© МФТИ, 2022

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leq 0$$

Заметим, что при $x=0$ в выражение знаменатель равен $2\cdot0^2-4\cdot0+|0|\cdot|0-2|=0$ и выражение недействительно; при $x=2$ знаменатель равен $2\cdot2^2-4\cdot2+|2|\cdot|2-2|=8-8+0=0$ и выражение недействительно; при $x=3$ выражение принимает значение $\frac{3^2-6\cdot3+10-2|3-3|}{2\cdot3^2-4\cdot3+|3|\cdot|3-2|}=$

~~Раскроем модули:~~

$=\frac{9-18+10-0}{18-12+3}=\frac{1}{9}$, что больше 0, поэтому числа 0; 2 и 3 не являются решением неравенства.

Раскроем знак модуля:

При $x<0$ $|x-3|=-(x-3)$ $|x|=-x$ $|x-2|=-(x-2)$

То есть $\frac{x^2-6x+10-2(-x+3)}{2x^2-4x+(-x)(-x+2)}\leq0 \Rightarrow \frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x}\leq0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x}\leq0 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)}\leq0$ При $x<0$ $3x<0$ $x-2<0$

и $(x-2)^2\geq0 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)}\geq0$, но равенство достигается лишь

при $x=2$, но по предположению $x<0 \Rightarrow$ ~~при $x<0$~~

выражение не имеет решений при $x<0$

При $x\in(0;2)$ $|x-3|=-(x-3)=-x+3$ $|x|=x$ $|x-2|=-(x-2)$

То есть $\frac{x^2-6x+10-2(-x+3)}{2x^2-4x+x(-x+2)}\leq0 \Rightarrow \frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x-x^2+2x}\leq0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^2-4x+4}{x^2-2x}\leq0 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{x(x-2)}\leq0$ При $x\in(0;2)$ $(x-2)^2\geq0$

~~(равенство недостигается т.к $x=2$ не является решением)~~

$x>0$ $(x-2)<0 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{x(x-2)}$ будет ≤0 при любом $x\in(0;2)$

При $x \in (2;3)$ $|x|=x$ $|x-2|=x-2$ $|x-3|=-(x-3)=-x+3$

То есть $\frac{x^2-6x-2(-x+3)+10}{2x^2-4x+x(x-2)} \leq 0$ $\frac{x^2-6x+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x} \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x} \leq 0$ $\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \leq 0$ При $x \in (2;3)$ $3x>0$

и $x-2>0 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)}$ будет $>0 \Rightarrow$ решений при $x \in (2;3)$ нет.

При $x \in (3;+\infty)$ $|x|=x$ $|x-2|=x-2$ $|x-3|=x-3$

То есть $\frac{x^2-6x-2(x-3)+10}{2x^2-4x+x(x-2)} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2-6x-2x+6+10}{2x^2-4x+x^2-2x} \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^2-8x+16}{3x^2-6x} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \leq 0$. При $x \in (3;+\infty)$ $3x>0$ и

$x-2>0$ $(x-4)^2>0 \Rightarrow \frac{(x-4)^2}{3x(x-2)}>0$. Значит решений при $x \in (3;+\infty)$ нет

Ответ: $x \in (0;2)$

Задача 3

$$\begin{cases} x-2y=2\sqrt{xy} & (1) \\ x+y^2=5 & (2) \end{cases}$$

Т.к и левая и правая часть неотрицательны в (1), то возведем его в квадрат:

$(x-2y)^2=(2\sqrt{xy})^2$

$x^2-4yx+4y^2=xy$ $(xy \geq 0)$ $\Big| -xy$

$x^2-5yx+4y^2=0$ разложим на множители:

$(x-4y)(x-y)=0$ произведение равно 0, если один из множителей равен 0.

То есть $x=4y$ или $x=y$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Разберем 2 варианта: $x=4y$ $x=y$ (в обоих случаях $xy\geq 0$)

Если $x=4y$, то из $x+y^2=5$ следует: $4y+y^2=5 \Rightarrow y_1=1$ и $y_2=-5$, тогда $x_1=4\cdot1=4$ и $x_2=4\cdot(-5)=-20$.

*Проверка x_1 и y_1: $4-2\cdot1=\sqrt{4\cdot1}$ и $4+1^2=5$, верно

Если $x=y$, то (2): $x+x^2=5 \Rightarrow x^2+x-5=0$ $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+20}}{2}$,

Но из (1) следует, что $x-2x=\sqrt{x\cdot x} \Rightarrow -x=\sqrt{x^2}$, то есть $-x\geq0 \Rightarrow x\leq0$, значит $x=\frac{-1+\sqrt{1+20}}{2}$ не является решением т.к больше 0. тогда $x=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$ и $y=x$

~~Проверка y_1 и y~~ *Проверка x_2 и y_2: $-20-2\cdot(-5)=\sqrt{(-20)(-5)} \Rightarrow -10=\sqrt{100}$, неверно

~~Ответ:~~

Для $x=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}=y$ $x-2y=-x$ и $\sqrt{xy}=\sqrt{x^2}=(-x)$ (т.к $x<0$) и для (2) $x=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}=y$ подходит, т.к мы узнали корень с помощью дискриминанта.

Ответ: $x_1=4$ $y_1=1$ и $x=y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$

Задача №6

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4 & (1)\\ x^2-2x-4y+y^2\leq0 & (2)\end{cases}$$

$x^2-2x-4y+y^2\leq0$

$(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)\leq5$

$(x-1)^2+(y-2)^2\leq5$ — график окружности с центром $(1;2)$ и радиусом $\sqrt5$ и её внутренней области.

$|2x|+|y|+|4-2x-y|>4$

При $2x<0$ $y>0$ имеем $-2x+y+|4-2x-y|>4$

$|4-2x-y|>4+2x-y$

$|4-2x-y|>\overset{\text{~~имеем~~}}{(4-2x-y)}+\overset{\text{~~отрицат~~}}{4x}$, т.к $4x$ отрицательно, а

$4-2x-y\le|4-2x-y|$, то равенство выполняется

при любых $2x<0$ $y>0$

При $2x>0$ $y<0$ имеем $2x-y+|4-2x-y|>4$

$|4-2x-y|>4-2x+y$

$|4-2x-y|>(4-2x-y)+2y$, т.к $2y$ отрицательно, а

$4-2x-y\le|4-2x-y|$, то равенство выполняется при любых

~~$2x<0$ $y>0$~~ $2x>0$ и $y<0$

При $2x>0$ и $y>0$ имеем $2x+y+|4-2x-y|>4$

$|4-2x-y|>4-2x-y$, что выполняется при $4-2x-y<0$,

т.к при $4-2x-y>0$ $|4-2x-y|=4-2x-y$.

То есть при $2x>0$ и $y>0$ и $4-2x-y>0$, а это

часть плоскости ограничена прямой $4-2x-y$ и

осями координат.

При $2x<0$ $y<0$ имеем $-2x+(-y)+|4-2x-y|>4$

$|4-2x-y|>4+2x+y \Rightarrow |4-2x-y|>(4-2x-y)+4x+y$ ~~что~~

так как $4x+y<0$, а ~~[illegible]~~ $4-2x-y\le|4-2x-y|$, то

~~в~~ неравенство выполняется при любых $2x<0$ и $y<0$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При $2x=0$, $y\neq 0$ имеем $|y|+|4-y|>4$; $|4-y|>4-|y|$, при $y>0$ имеем $|4-y|>4-y$, что верно, когда $4-y<0 \Rightarrow y>4$, при $y<0$ $|4-y|>4+y$ т.к $|4-y|>(4-y)+2y$, ведь $|4-y|\geq 4-y$ и $2y$ – отрицательное

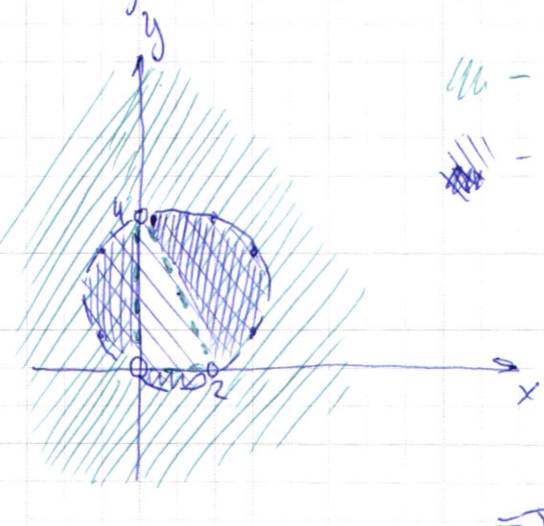
При ~~2x~~ $y=0$, $2x\neq 0$ имеем $|2x|+|4-2x|>4$ $|4-2x|>4-|2x|$,

при $2x>0$ имеем $|4-2x|>4-2x$, что верно при $4-2x<0$

при $2x<0$ имеем $|4-2x|>4-(-2x)$, что верно, т.к.

$|4-2x|\geq 4-2x$, а $4x$ отрицательно $\Rightarrow |4-2x|\geq 4-2x+4x$.

Тогда нарисуем график системы:



– график $|2x|+|y|+|4-2x-y|>4$

– график $x^2-2x-4y+y^2\leq 0$

То есть искомая площадь это площадь круга без прямоугольного треугольника с катетами 2 и 4, тогда

$S_{иск} = S_{окр} - S_{треуг} = \pi R^2 - \frac{2\cdot 4}{2} =$

$= \pi\cdot(\sqrt{5})^2 - \frac{8}{2} = 5\pi - 4$

Ответ $5\pi-4$

Задача №7

Для $a=1$ и $b=1$ имеем $f(1\cdot 1)=f(1)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

Определим значение $f(1)$; $f(2)$; .... $f(18)$:

Значок p обозначает что значение этого $f(x)$ определено условием $f(p)=p$. Воспользуемся также $f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(1)=0$

p $f(2)=2$

p $f(3)=3$

$f(4)=f(2\cdot 2)=f(2)+f(2)=2+2=4$

p $f(5)=\cancel{6}\ 5$

$f(6)=f(3\cdot 2)=f(3)+f(2)=5$

p $f(7)=7$

$f(8)=f(4\cdot 2)=f(4)+f(2)=6$

$f(9)=f(3\cdot 3)=f(3)+f(3)=6$

$f(10)=f(5\cdot 2)=f(5)+f(2)=5+2=7$

p $f(11)=11$

$f(12)=f(3\cdot 4)=f(3)+f(4)=3+4=7$

p $f(13)=13$

$f(14)=f(7\cdot 2)=f(7)+f(2)=7+2=9$

$f(15)=f(5\cdot 3)=f(5)+f(3)=5+3=8$

$f(16)=f(8\cdot 2)=f(8)+f(2)=6+2=8$

p $f(17)=17$

$f(18)=\cancel{f(9}\ f(9\cdot 2)=f(9)+f(2)=6+2=8$

То есть числа от $f(1)$ $f(18)$ это ряд чисел:

$0\ 2\ 3\ 4\ \begin{matrix}5\\5\end{matrix}\ \begin{matrix}6\\6\end{matrix}\ \begin{matrix}7\\7\\7\end{matrix}\ \begin{matrix}8\\8\\8\end{matrix}\ 9\ 11\ 13\ 17.$

~~Когда мы выб~~ Найдем что такое $f(x/y)$:

При $a=y$ $b=\frac{1}{y}$ имеем $f(y\cdot\frac{1}{y})=f(y)+f(\frac{1}{y})\Rightarrow$

$0=f(1)=f(y)+f(\frac{1}{y})\Rightarrow f(\frac{1}{y})\cancel{+f(y)}=-f(y)$

При $a=\frac{1}{y}$ и $b=x$ имеем $\cancel{f(}$ $f(\frac{1}{y}\cdot x)=f(\frac{1}{y})+f(x)=$

$=f(x)+(-f(y))=f(x)-f(y)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

То есть мы знаем что $f(x/y) = f(x) - f(y)$
и какие значения принимают ~~о~~ от $f(1)$ до $f(18)$.

Тогда задача сводится к тому, что у нас есть
ряд 0 2 3 4 5 5 6 6 7 7 7 8 8 8 9 11 13 17 из которого
мы выбираем 2 неравных числа ~~(если $x=y$, то $f(x/y)=f(1)=0$ не подходит) (мы представляем что выбрали значе~~
и смотрим на их разность. Необходимо найти кол-во пар отрицательной разностью (так происходит потому что выбрав различные x и y мы знаем $f(x)$ и $f(y)$ — числа из данного ряда, чью разность мы желаем узнать по знаку) Теперь мы выбираем не x и y, а лишь значения $f(x)$ и $f(y)$. ~~Если мы выберем 0, то~~

Если ~~я~~ выбрать первым какое-то число ~~0~~, то разность будет отрицательной если вторым выбрать любое из тех что правее его (то есть больше), значит кол-во пар $(x;y)$ это ~~кол-во~~ сумма, чисел ~~правее~~ (больше) каждого из этой последовательности: ~~То есть число пар это~~
~~$11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1+0=66$~~

(Для чисел, которые повторяются, например 5 мы учитываем те число, что больше, для этого мы написали их в один столбик):

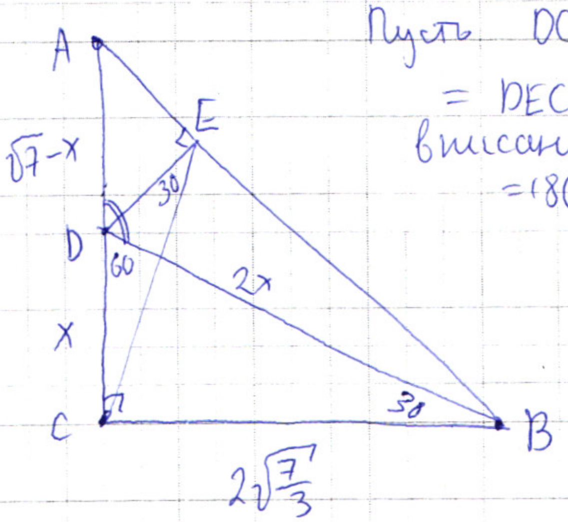
Значит число пар это:

$11+10+9+8+(7+7)+(6+6)+(5+5+5)+(4+4+4)+$

$+3+2+1+0=97$ пар.

Ответ 97 пар.

Задача 5



Пусть $DC=x \Rightarrow AD=\sqrt{7}-x$, также $\angle DBC=$ $=DEC=30°$, т.к четырехугольник BEDC вписанный (так как $\angle DEB+\angle DCB=90+90=$ $=180°$). Т.к в $\triangle BCD$ $\angle BCD=90$, а ~~угол~~ угол $\angle DBC=30°$, то $BD=2\cdot CD=$ $=2x$. По т. пифагора для $\triangle ABC$

$AC^2+BC^2=AB^2 \Rightarrow AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$

$AB=\sqrt{(\sqrt{7})^2+\left(2\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2}=\sqrt{7+\frac{4\cdot7}{3}}=$

$=\sqrt{\frac{21+28}{3}}=7\sqrt{\frac{1}{3}}$

Также по т. косинусов в $\triangle ABD$ $AB^2=AD^2+DB^2-2\cdot$ $\cdot AD\cdot DB\cdot\cos\angle ADB$. ~~со~~ угол $\angle ADB=180-\angle BDC=180-60°=120°$. (угол $BDC=90-\angle DBC=90-30=60°$) То есть ($\cos 120°=-\frac{1}{2}$):

$AB^2=(\sqrt{7}-x)^2+(2x)^2-2\cdot(\sqrt{7}-x)(2x)\cdot\cos 120=$

$=7-2x\sqrt{7}+x^2+4x^2-2\cdot(\sqrt{7}-x)2x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=$

$=7+5x^2-2x\sqrt{7}+2x(\sqrt{7}-x)=5x^2+7-2x\sqrt{7}+2x\sqrt{7}-$ $-2x^2=3x^2+7+2x\sqrt{7}-2x\sqrt{7}=3x^2+7$

То есть $AB^2=\left(7\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2$ и $AB^2=3x^2+7 \Rightarrow$

$\left(7\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2=3x^2+7 \Rightarrow \frac{49}{3}=3x^2+7 \Rightarrow 49=9x^2+21 \Rightarrow$

$9x^2=28 \Rightarrow x=\sqrt{\frac{28}{9}}=\sqrt{7\cdot\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}\sqrt{7}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда $AD = \sqrt7 - \frac23\sqrt7 = \frac13\sqrt7$, $AC = \sqrt7 \Rightarrow$

$\frac{AD}{AC} = \frac{\frac13\sqrt7}{\sqrt7} = \frac13$.

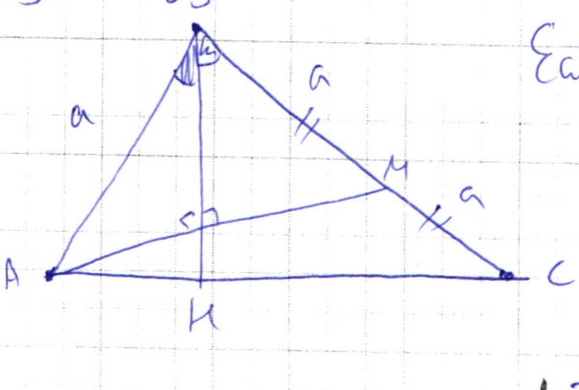
Т.к у прямоугольных треугольников $\triangle AED$ и $\triangle ACB$ есть общий непрямой угол $\angle DAE$, то они подобны с коэффициентом подобия: $\cancel{\frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt7}{\frac23\sqrt7} = \frac{1}{\frac23} = \frac32}$

$$k = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac13\sqrt7}{7\sqrt{\frac13}} = \frac{3\sqrt7}{21\sqrt{\frac13}} = \frac{\sqrt7}{21\sqrt{\frac13}}$$

Тогда их площади соотносятся как $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ACB}} = k^2 = \left(\frac{\sqrt7}{21\sqrt{\frac13}}\right)^2 = \frac{7}{21^2\cdot\frac13} = \frac{7}{21\cdot7} = \frac{1}{21}$. $S_{\triangle ACB} = \frac{AC\cdot BC}{2} = \frac{\sqrt7\cdot2\sqrt{\frac73}}{2} = \sqrt7\cdot\sqrt{\frac73} = \frac{7}{\sqrt3}$, тогда $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{21}S_{\triangle ACB} = \frac{1}{21}\cdot\frac{7}{\sqrt3} = \frac{7}{21\sqrt3} = \frac{1}{3\sqrt3}$

Ответ $\frac{AD}{AC} = \frac13$ $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{3\sqrt3}$

~~Зад~~ Зад 2



Если в треугольнике $BH \perp AM$
То $AB = BM$ (т.к в $\triangle ABM$ высота совпадает с биссектрисой)
$\Rightarrow BC = 2BM = 2a$.
То есть если в $\triangle$ одна сторона $2a$, другая — a, то всем $BH \perp AM$,
т.к тогда $BM = \frac12 BC = 2a\cdot\frac12 = a$.

То есть это условие необходимо и его достаточно.
То есть стороны треугольника эта a $2a$ и x
, где $x > a$ и $x < 3a$, т.к $x < a + 2a$ и ~~x~~ $a + x > 2a$.

При $a \geq 150$ периметр ~~ем~~ будет $> 150 + 2 \cdot 150 + 150$
То есть больше 600, значит $a < 150$.

~~Для любого a от 1 до 15 149~~ Если $a \leq 100$, то
~~р~~ периметр будет $<$ ~~180~~ $100 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 100$, то
есть меньше 600, значит $a > 100$ и $a < 150$.

~~Для~~ Для любого $a > 100$ и $a < 150$ другие две
стороны определяются единственным образом
То есть $a \to 2a \to$ остальное $600 - 3a$.

Ответ 49 вида a $2a$ $600 - 3a$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница №10
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

Если $x \in (2;3)$ $\qquad x \neq 0 \quad x \neq 2$

$$\frac{x^2-6x+10-2(-x+3)}{2x^2-4x+x(x-2)} \leq 0$$

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x} \leq 0$$

$66+7+6+5+5+4+4=$

$=66+10+15+6=$

$=76+21=97$

$$\frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x} \leq 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \leq 0$$

>0

$$\frac{x-2}{3x} \leq 0$$ Нет решений

>0

Если $x \in [3;+\infty)$

$$\frac{x^2-6x+10-2(x-3)}{2x^2-4x+x(x-2)} \leq 0$$

$$\frac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x} \leq 0$$

>0

$$\frac{x^2-8x+16}{3x^2-6x} \leq 0 \qquad \frac{(x-4)(x-4)}{3x(x-2)} \leq 0$$ Нет решен.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

Ответ: $x\in(0;2)$

Если $x<0$:

$$\frac{x^2-6x-2(-x+3)}{2x^2-4x+(-x)(-x+2)}\le 0$$

$$\frac{x^2-6x+2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x}\le 0$$

$$\frac{x^2-4x+6}{3x^2-6x}\le 0$$

$18-12-13$

$$\frac{\overset{<0}{(x-3)}\overset{<0.}{(x-1)}}{\cancel{3x(x-3)}\ 3\underset{<0}{x}\underset{<0}{(x-2)}}\le 0$$ Решений нет

Если $x\in[0;2)$

$$\frac{x^2-6x+10-2(-x+3)}{2x^2-4x+x(-x+2)}\le 0$$

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x-x^2+2x}\le 0$$

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x}\le 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{x(x-2)}\le 0$$

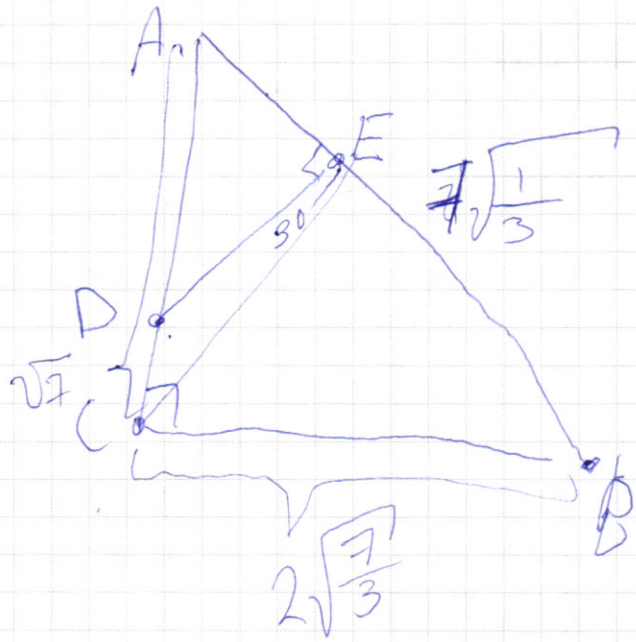
$$\frac{\overset{<0}{x-2}}{\underset{>0}{x}}\le 0$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



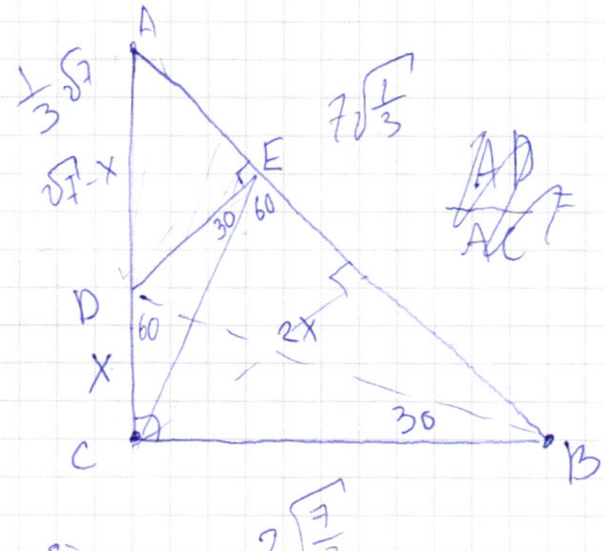
$\frac{AB}{CB} = \frac{7\sqrt{\frac{1}{3}}}{2\sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{7\sqrt{\frac{1}{3}}}{2\sqrt{7}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

$AB = \sqrt{(\sqrt{7})^2 + (2\sqrt{\tfrac{7}{3}})^2} = \sqrt{7 + 4\cdot\frac{7}{3}} =$

$= \sqrt{7 + \frac{28}{3}} =$

$= \sqrt{\frac{21+28}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} =$

$= 7\sqrt{\frac{1}{3}}$



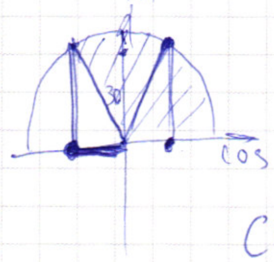
$\cancel{\frac{AD}{AC}}$ $\frac{AD}{AB} =$

1 3 6 7 5

$3+4+5+5+5 = 22$

$\frac{22}{31}$

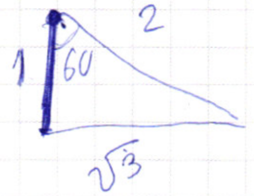
$AB = 7\sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow AB^2 = \frac{49}{3}$



$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2\cdot AD\cdot BD\cdot \cos_{ADB}$

$\cos(120) = -\cos(60) = -\frac{1}{2}$

$\cancel{AB^2}$



$\frac{49}{3} = (\sqrt{7}-x)^2 + (2x)^2 - 2\cdot(\sqrt{7}-x)(2x)\cdot\cos 120$

$\frac{49}{3} = 7 - 2x\sqrt{7} + x^2 + 4x^2 - 4x(\sqrt{7}-x)\cdot(-\frac{1}{2})$

$\frac{49}{3} = 7 - 2x\sqrt{7} + 5x^2 + 2x(\sqrt{7}-x) =$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(1)=0$
$f(2)=2$
$f(3)=3$
$f(4)=f(2)+f(2)=4$
$f(5)=5$
$f(6)=f(3)+f(2)=5$
$f(7)=\cancel{7}$
$f(8)=f(4)+f(2)=\cancel{6}$
$f(9)=f(3)+f(3)=\cancel{6}$
$f(10)=f(5)+f(2)=\cancel{7}$
$f(11)=11$
$f(12)=f(3)+f(4)=\cancel{7}$
$f(13)=13$
$f(14)=f(7)+f(2)=9$
$f(15)=f(3)+f(5)=\boxed{8}$
$f(16)=f(8)+f(2)=\boxed{8}$
$f(17)=17$
$f(18)=f(9)+f(2)=\boxed{8}$

x и y, такие что $x\neq y$
$f(x)-f(y)<0$

$\frac{18\cdot 17}{2}=9\cdot 17=153$ вариант

$x_1 \ y_1$

153 −

$\geq \quad \leq$

0 2 3 4 5 5 5 6 6 7 7 7 8 8 8 9 11 13 17

12.

$11+10+9+8+\ldots+1+0$

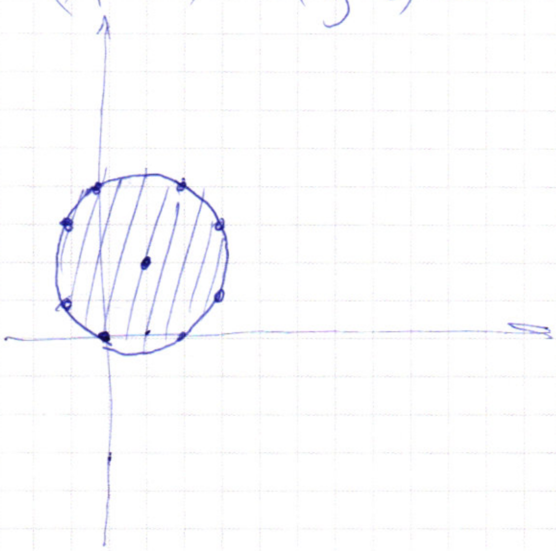
$11\cdot 6=66$

$$(1)\ \begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4 \\ x^2-2x-4y+y^2 \le 0 \end{cases}\ (2)$$

$a < b+c$
$b < a+c$
$c <$

$(2)\ x^2-2x+1+y^2-4y+4 \le 5$

$(x-1)^2+(y-2)^2 \le 5$



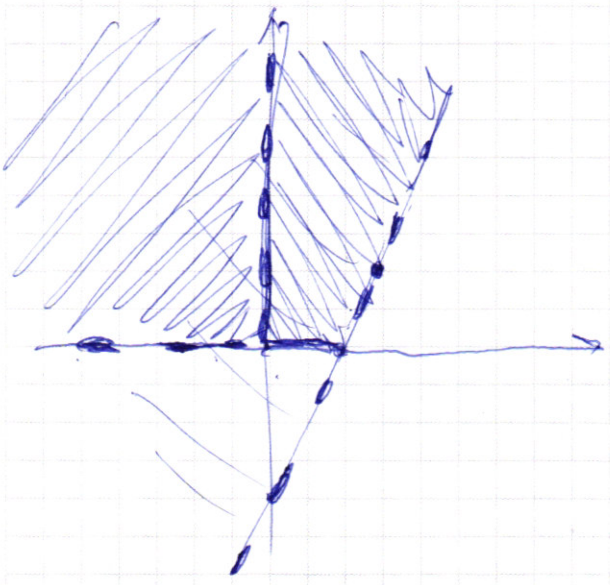
$\underline{2x>0\ \ y>0}$

$2x+y+|4-2x-y| > 4$

$|4-2x-y| > 4-2x-y$

$4-2x-y < 0$

$2x-y > 4$



$2x<0\ \ y>0$

$-2x+y+|4-2x-y| > 4$

$|4-2x-y| > 4+2x+y$

$|4-2x-y| > (4-2x+y)+\overset{<0}{4x}$

$\cancel{|4-2x+y| > 4-2x+y}+4x$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

17/31

$\frac{49}{3} = 7 - \cancel{2x\sqrt{7}} + 5x^2 + \cancel{2x\sqrt{7}} - 2x^2 = 7 + 5x^2 - 2x^2 = 7 + 3x^2$

$7 + 3x^2 = \frac{49}{3} \quad | \cdot 3$

Ответ (5) $= \frac{1}{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}}$

~~27/80~~

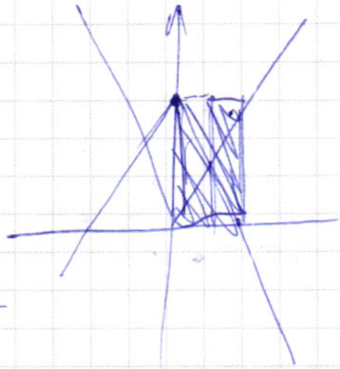
$21 + 9x^2 = 49$

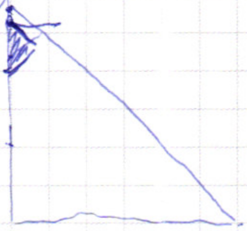
24/31

$9x^2 = 28$

$x^2 = \frac{28}{9}$

$x = \sqrt{\frac{28}{9}} = \frac{\sqrt{28}}{3} = \sqrt{7} \cdot \frac{2}{3}$

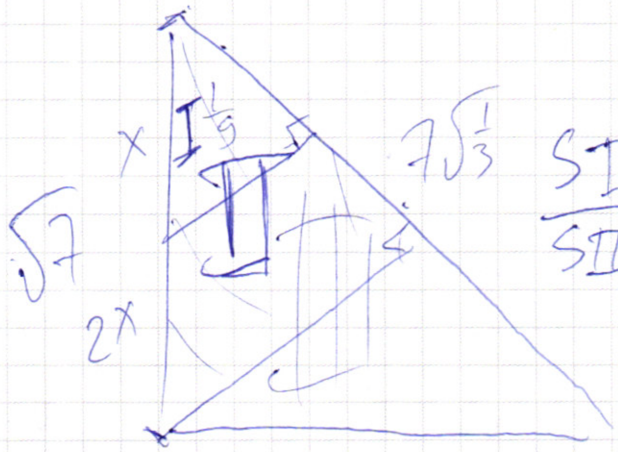




Зал 1 3 6

$\frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{7} - x}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{7} \cdot \frac{2}{3}}{\sqrt{7}} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{1} = \frac{1}{3}$

Рем 1 3 5 6 7

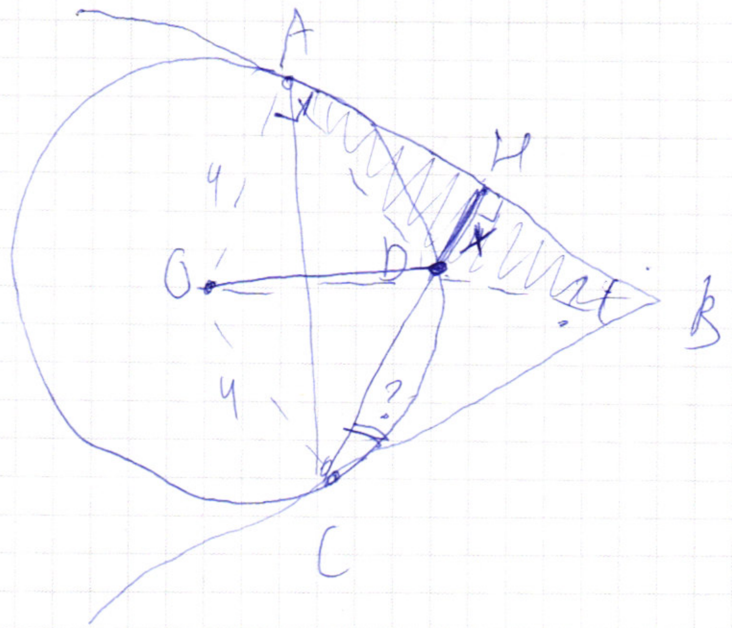


$\frac{S_{II}}{S_{III}} = \left(\frac{3x}{7\sqrt{\frac{1}{3}}}\right)^2 = \frac{9x}{\frac{49}{3}} = \cancel{27}$

$= \left(\frac{\sqrt{7}}{7\sqrt{\frac{1}{3}}}\right)^2 = \frac{7}{49:3} = \cancel{\frac{1}{21}}$

$\frac{S_I}{S_{III}} = \frac{S_I}{S_{II}} \cdot \frac{S_{II}}{S_{III}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{21} \Rightarrow S_I = \frac{1}{21} \cdot \sqrt{7} \cdot 2\sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{21} \cdot \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{3}{7:3} = \frac{3}{7}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{S_I}{S_{II}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

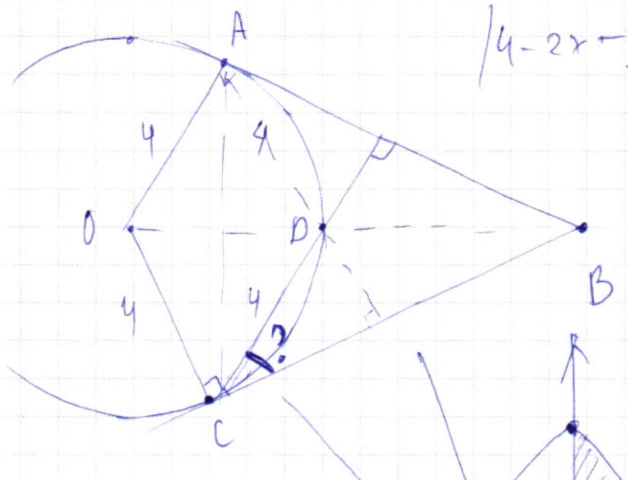


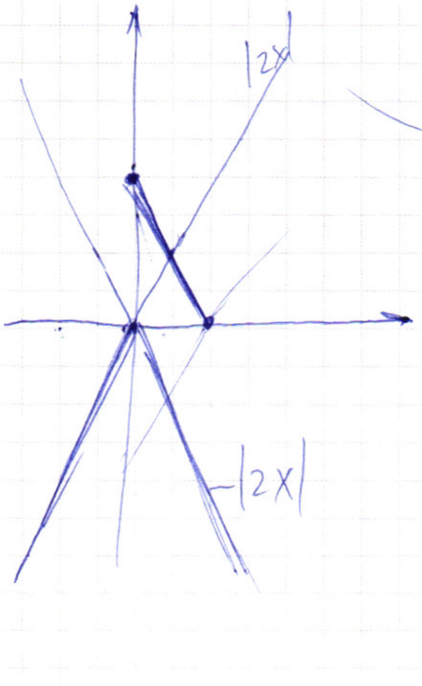
$\frac{AB}{CH} - ?$

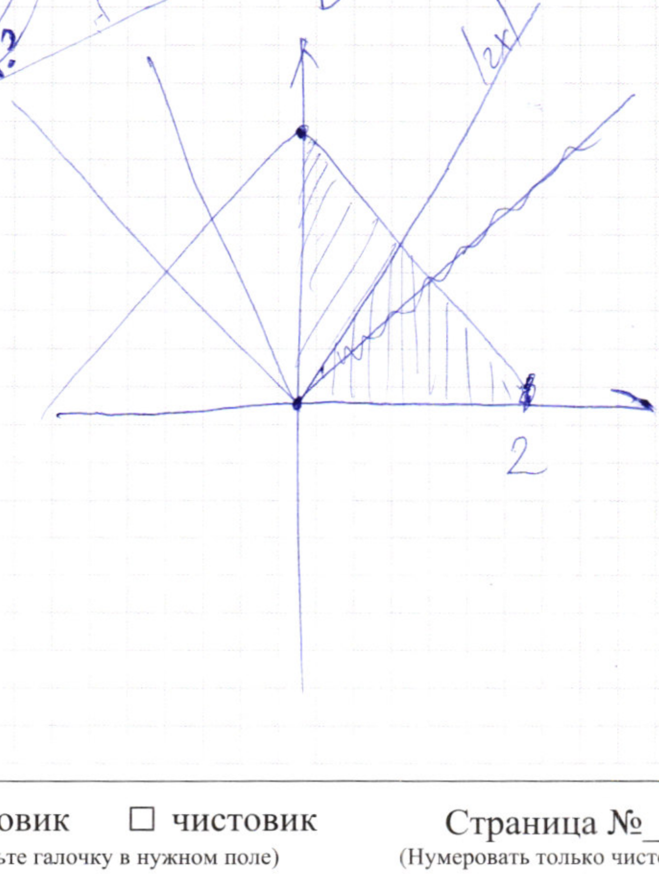
$\frac{BC}{CH} - ?$

$|y| = 4 - |2x| - |4 - 2x - y|$

$|4-2x-y|| = 0$







ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

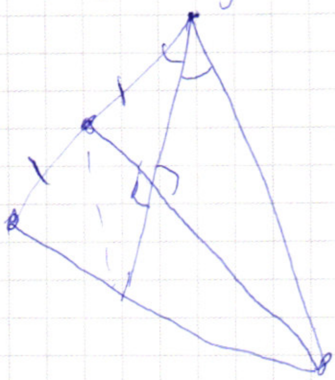
(заполняется секретарём)

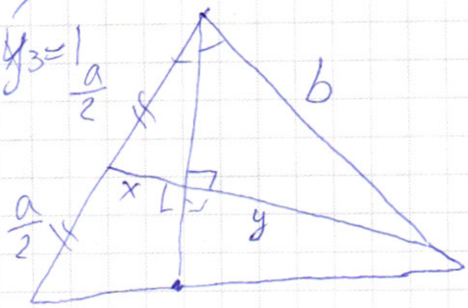
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ (3): $x_1 = y_1 = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$ a, b, e

$x_2 = -20\ y_2 = -5\quad x_3 = 4\ y_3 = 1$

$l = \sqrt{ab - a_1 b_1}$





$\frac{a}{2} = \cdot$

$x \le 0$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} & (1) \\ x + y^2 = 5 & (2) \end{cases}$$

$x = 5 - y^2$

$(5-y^2) - 2y = \sqrt{(5-y^2)y}$

$\cancel{5 - y^2 - 2y = \sqrt{5}}$

$(1)^2$: $x^2 - 2yx - 2yx + 4y^2 = xy$

$x^2 - 5yx + 4y^2 = \cancel{xy}\ 0$

$x^2 - 5yx + 4y^2 = 0$

$(x-4y)(x-y) = 0$

I: $x = y \Rightarrow -x = \sqrt{x^2}$

II $x = 4y$

I: $x + x^2 = 5 \quad x \le 0$

$x^2 + x - 5 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+20}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$

$y = x = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$

II $4y - 2y = \sqrt{4y \cdot y}$

$-xy$

$4y + y^2 = 5$

$y^2 + 4y - 5 = 0$

$(y+5)(y-1) = 0$

$y = -5\quad y = 1$

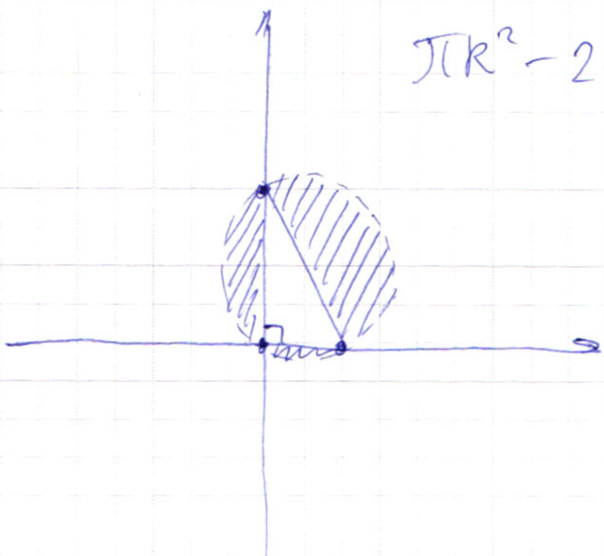
$x = -20\quad x_3 = 4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$\pi R^2 - 2\cdot 4 : 2 = \pi \cdot 5 - 4 =$
$5\pi - 4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

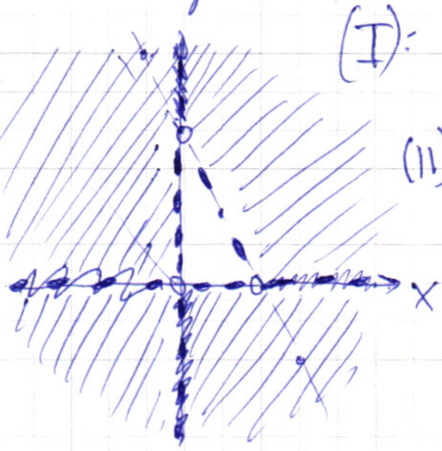
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(I) $2x>0$ $y>0$

$2x+y+|4-2x-y|>4$

$|4-2x-y|>4-2x-y \Rightarrow 4-2x-y<0$

$|4-2x-y|=4-2x-y$ или $|4-2x-y|=-(4-2x-y)$



(I): $2x>0$ $y>0$ $2x+y>4$

(II) $2x>0$ $y<0$

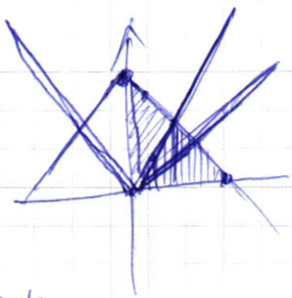
$2x-y+|4-2x-y|>4$

$|4-2x-y|>4-2x+y$

$|4-2x-y|>(4-2x-y)+2y$ отриц

$4-2x-y>0$, то ок

$4-2x-y<0$, то ок



(II) $2x>0$ и $y<0$

(III) $2x<0$ $y>0$

Если $y=0$ $\cancel{|4-2x-y|>4}$ $|2x|+|4-2x|>4$ $|4-2x|>4-|2x|$ $x>0$ $2x>4$

$-2x+y+|4-2x-y|>4$

$|4-2x-y|>4+2x+y$

$4-2x-y+4x+2y$ $x<0$

$|4-2x-y|>4+2x-y$

$|4-2x-y|>4-2x-y+4x$ отриц

$4-2x-y>0$, то ок

Если $x=0$ $|y|+|4-y|>4$

$|4-y|>4-|y|$ $\cancel{|y|<4}$

$y>0$ $y>4$ $4\cancel{y}<0$ $y<0$

$4-2x-y<0$, то ок

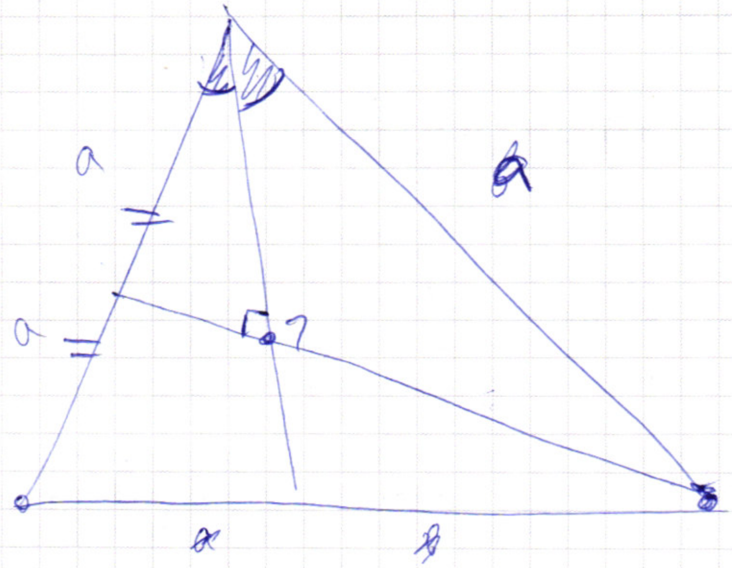
(III): $2x<0$ $y>0$

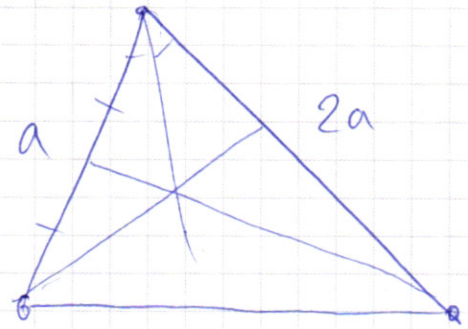
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

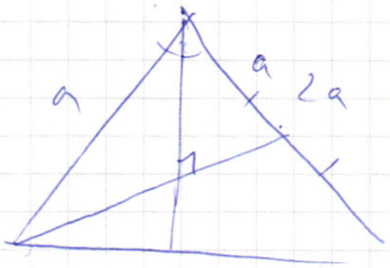




50 30

~~25~~

a 2a 3a



149 - 9°

1 3 6 7 5 ~~4~~ 2

a 2a a >a <3a

a 2a >a <3a

$\cancel{a} < 200$ ~~a>200~~

a<150 ~~a>150~~

~~1992+1894-2~~

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\cancel{f(6)=f(2)+}$

$-f(a)=f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f(p)=p$

$x;y\in N$ $1\le x\le 18$ $1\le y\le 18$ $f(x/y)<0$

$f(1)=0$ $f(4)=4$
$f(2)=2$ $f(5)=5$
$f(3)=3$ $f(6)=f(2)+f(3)=5$
$f(7)=7$
$f(8)=f(4)+f(2)=6$
$f(9)=f(3)+f(3)=6$

~~При $a=0$ и $b=0$~~
$\cancel{f(0)=f(0)+f(0)\Rightarrow f(0)=0}$

~~При $b=0$~~ $\cancel{f(0)=f(a)+f(0)}$

$\cancel{f(a)=0}$

$a=x$ $b=\frac{1}{y}$

$\boxed{f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)}$

При $a=1$ и $b=1$
$f(1)=f(1)+f(1)$

$f(1)=0$

$a=y$ $b=\frac{1}{y}$

$f(1)=f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

При $b=1$ a любом

$\boxed{0=f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)}$

$\cancel{f(a)=f(}$ $a=a$ $b=\frac{1}{a}$

$a=a$ $b=\frac{2}{a}$

$f(1)=f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)$

$\cancel{f(a)+f\left(\frac{2}{a}\right)\ne 2}$

$2=f(2)=f(a)+f\left(\frac{2}{a}\right)$

$f(a)+f\left(\frac{p}{a}\right)=p$

$\boxed{f(a)=-f\left(\frac{1}{a}\right)}$

$f\left(\frac{p}{a}\right)=p-f(a)$

$\boxed{f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)}$ $x\ne y$