МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

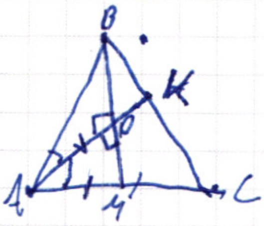
$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 18$, $1\leqslant y\leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0$; $\frac{(x-3)^2+1-2|x-3|}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|}\le 0$;

$\frac{(|x-3|-1)^2}{|x(x-2)|+2x(x-2)}\le 0$; в знаменателе если $x(x-2)\ge 0$ значение $3x(x-2)\ge 0$; то есть в этом случае знаменатель неотрицательный; также при $x(x-2)<0$, в знаменателе $-x(x-2)\ge 0$; то есть знаменатель неотрицательный; а также $x\ne 2$; $x\ne 0$, ведь он ещё и ~~неотрицательный~~ не может быть 0; в числителе $(|x-3|-1)^2$ ~~то~~ ≥ 0 тоже ~~есть это свойство~~ неотрицательного значения; значит условие соблюдается при только при $(|x-3|-1)^2=0$; $|x-3|-1=0$; $|x-3|=1$; x не может быть 2, вне ОДЗ; $x=4$

2. 

см. рисунок, на нем видно, что $\triangle AOM=\triangle AOB$ по двум углам и стороне между ними; значит $AM=AB$; ~~Пусть~~ Поскольку AK - биссектриса, $CK:KB=AC:AB=2$; Пусть $AB=a$; $BK=b$. Тогда $3a+3b=P=600$; По неравенству треугольника $3a>3b>2a-a$; т.е. $3a>3b>a$; ~~Тогда~~ $300>3b>150$; $100>a>50$; a может быть любым натуральным числом в этом множестве, всего таких чисел 49; значит вариантов треугольника тоже

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$

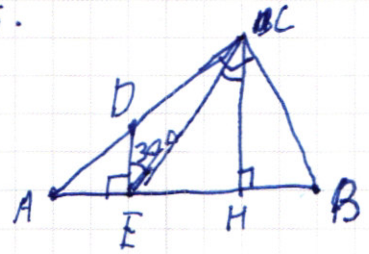
~~ОДЗ~~ $x-2y\geq 0$; $(x-2y)^2 = xy$; $x^2-4xy+4y^2=xy$;

$x^2-5xy+4y^2=0$; $(x-y)(x-4y)=0$; $x=y$, ведь $x-2y\geq 0$;

$x=4y$; $4y+y^2=5$; $y^2+4y-5=0$; $(x-1)(x+5)=0$;

$x_1=1$; $x_2=-5$; но $x-2y\geq 0$; значит $x\neq -5$;

тогда единственное решение $x=1$

5. 

CH − высота; тогда $AH\cdot AB=AC^2$;

где $AB=\sqrt{CB^2+AC^2}=\sqrt{7+\frac{28}{3}}=\frac{7}{\sqrt{3}}$;

$AH=\frac{AC^2}{AB}=\frac{7\cdot\sqrt{3}}{7}=\sqrt{3}$;

$CH=\sqrt{AC^2-AH^2}=\sqrt{7-3}=2$;

$EH=tg\,30^\circ\cdot CH=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}$;

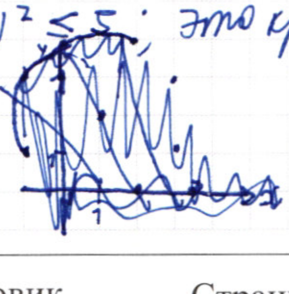
$\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AH}=\frac{AH-EH}{AH}=\frac{\frac{1}{3}\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$; $S_{AED}=S_{AHC}\cdot\left(\frac{AE}{AH}\right)^2=$

$=\frac{1}{9}\cdot\frac{AH\cdot HC}{2}=\frac{\sqrt{3}\cdot 2}{18}=\frac{\sqrt{3}}{9}$;

$\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$; $S_{AED}=\frac{\sqrt{3}}{9}$

6. $\begin{cases} x^2-2x-4y+y^2\leq 0 \\ |2x|+|y|+|4-2x-y|>4 \end{cases}$ если $4-2x-y\geq 0$, то $|2x|+|y|+|4-2x-y|\leq 4$ в любом случае, так что $4-2x-y<0$; $y>4-2x$

$x^2-2x-4y+y^2\leq 0 \to (x-1)^2+(y-2)^2\leq 5$; это круг центром в $(1;2)$ и $R=\sqrt{5}$. Видно, что

часть круга, которая может быть решением  находится в

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2 (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

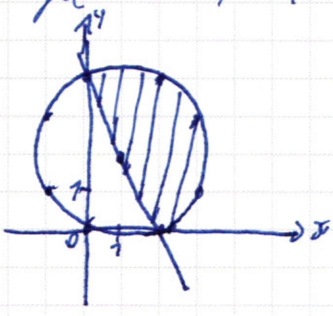
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

зоне, где $x \geq 0$; $y \geq 0$; тогда $2x + y - 4 + 2x + y \geq 4$; $2x + y \geq 4$;

~~[illegible]~~



значит, ГМТ — половина круга, ведь $y = 4 - 2x$ проходит через центр круга;

а площадь тогда $S = \pi R^2 : 2 = \pi \cdot (\sqrt{5})^2 : 2 = 2,5\pi$

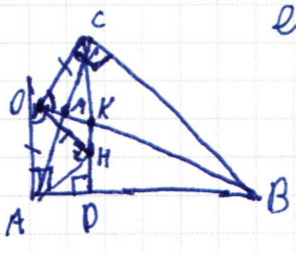
7. $f(ab) = f(a) + f(b)$; $f(p) = p$; тогда чтобы $f(x:y) < 0$;
$f(x) = f(y) + f(x:y)$; тогда $f(y) > f(x)$ рассмотрим значения функции в числах от 1 до 18. $f(1 \cdot x) = f(x) + f(1)$
$\Rightarrow f(1) = 0$; $f(2) = 2$; $f(3) = 3$; $f(4) = f(2) + f(2) = 4$ и так далее, см. табл.

K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
f(k)	0	2	3	4	5	5	7	6	6	7	11	7	13	9	8	8	17	8
	0	1	2	3	4	4	8	6	6	8	15	8	16	14	11	11	17	11

$f(y)$ может иметь в паре только том x, для ~~то~~ которого $f(x) < f(y)$; поэтому для в третьей строке написано кол-во возможных x с $f(x)$ меньше данного. Тогда всего ~~пар~~ вариантов пар x, y — сумма чисел в третьей строке — 145

Ответ: 145.

4.



если $\angle AOB = \alpha$; то $\angle AHC = 180° - \alpha$; для $\triangle AHC$ по теореме синусов $AC = 2R \sin 180 - \alpha =$
$= 8 \sin \alpha$; в $\triangle AHB$ $AB = \sin \alpha \cdot \frac{AC}{\sin 90 - 2\alpha} =$
$= \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha}$ $AD = \sin 90° \cdot \frac{1}{2} AC : \sin 90° - \alpha =$

☐ черновик ☒ чистовик Страница № 3

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$= 4\sin\alpha : \cos\alpha$; ~~AP~~ AP в $\triangle$ APC катет против $\angle 90-\alpha$;

~~$AP = \sin 90-\alpha \cdot \frac{AC}{\sin 90-\alpha} = 8\sin\alpha : \cos\alpha$~~ $AP = AC \cdot \cos\alpha =$

$= 8\sin\alpha \cdot \cos\alpha$; ~~tha~~ =

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~1 2 3 4 5 6 7~~

1. $\frac{(x-3)^2+1-2|x-3|}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|} \le 0$

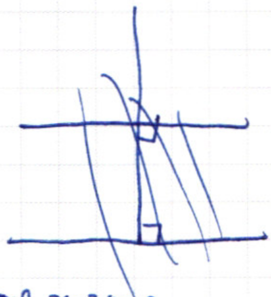
$\frac{(|x-3|-1)^2}{|x(x-2)|+2x(x-2)} \le 0$; $(|x-3|-1)^2 \ge 0$; 0 при

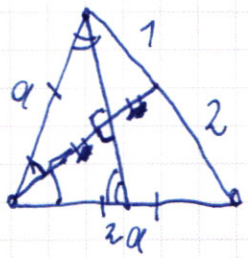
$x=4$; $x=2$; но снизу не $x \ne 2$, $x \ne 0$; если $x(x-2) \ge 0$;

$3x(x-2) \ge 0$ если $x(x-2)<0$; $-x(x-2) \ge 0$; решение

$x=4$

2.





600;

~~400+200~~;

~~3 сторона~~

$a \le 3$ сторона $3a$

$\overset{2a}{300}; \overset{a}{150}; \overset{3}{150}$

$200; 100; 390$

49

3. $x-2y=\sqrt{xy}$
$x+y^2=5$

$xy \ge 0$ $x-2y \ge 0$

$x^2-4xy+4y^2=xy$; $x^2-5xy+4y^2=0$

$(x-y)(x-4y)=0$

$x=y \to x-2y<0$; прот.

$x=4y$

~~$y^2+y-5=0$~~

~~$\frac{-1\pm\sqrt{1+20}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$~~

$y^2+4y-5=0$

~~$\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}$~~ $=\frac{-4\pm 6}{2}=$

$=-2\pm 3$; 1 либо -5

$y^2+4y-5=0$

$y=1$ либо -5

$x=4$ либо -20

$y=1$; $x=4$

7. $f(ab)=f(a)+f(b)$;

$f(p)=p$; $f(x/y)+f(y)=f(x)$;

$x=y$

$f(x/y)=f(x)-f(y)<0$;

$f(y)>f(x)$

6. $|2x|+|y|+|4-2x-y|\ge 4$

$x^2-2x-4y+y^2\le 0$;

$(x-1)^2-1+(y-2)^2-4\le 0$

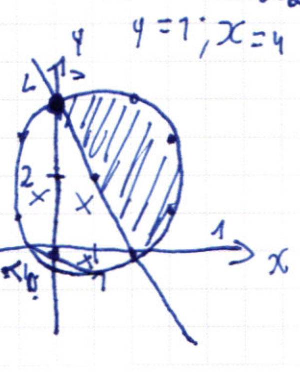
$(x-1)^2+(y-2)^2\le 5$;

$4-2x-y \ge 0$ если $4-2x-y\ge 0$

~~$2x+y=4$~~ $y=4-2x$ $|2x|+|y|-2x-y|\le 4$

не больше

$-4x>4$ $-2y>4$



$\frac{\pi r^2}{2}=2{,}5\pi$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. $f(y) > f(x)$

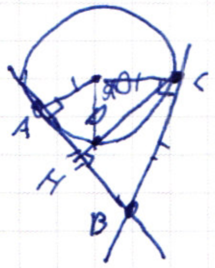
~~a 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16~~

f(a) 0 2 3 4 5 5 7 6 6 7 11 7 13 9 8 8 17 8

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
f	0	2	3	4	5	5	7	6	6	7	11	7	13	9	8	8	17	8
числа меньше	0	1	2	3	4	4	8	6	6	8	15	8	16	14	11	11	17	11

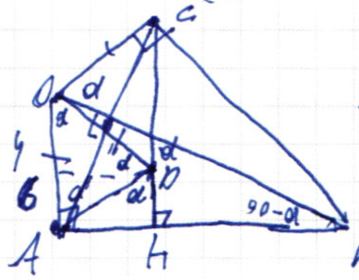
0 1 3 6 10 14 22 34 42 57 65 81 95 106 117 134 145

4.



$S_{ABD} = 6$; $R = 4$

$$\frac{AB \cdot HD}{2} = 6$$



$AC = 2R \cdot \sin(180 - \alpha) = 2R\sin\alpha = 8\sin\alpha$

Из $CH = \frac{AC}{\sin 90°} \cdot \sin\alpha = AC\sin\alpha = 8\sin^2\alpha$

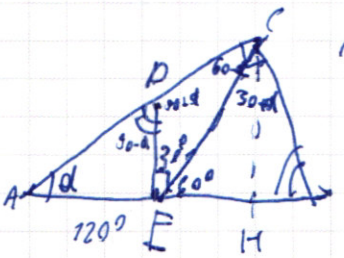
$AH = 8\sin\cos\alpha$;

$DO^2 = (AO - HD)^2 + AH^2$ DH

$0 = HD^2 - 8 \cdot HD + AH^2$

$OC^2 = (CH - AO)^2 + AH^2$

$0 = CH^2 - 8CH + AH^2$



$MD : AC$

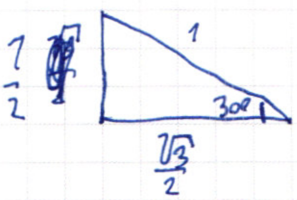
AED

$AC = \sqrt{7}$

$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$ $\quad AB = \frac{7}{\sqrt{3}}$

$\angle CEB = 30°$

$$EC = \frac{AC}{\sin 120°} \cdot \sin\alpha = \frac{CB}{\sin 60°} \cdot \sin 90 - \alpha$$



~~$\frac{CB}{AC} = \operatorname{tg}\alpha =$~~

$$\frac{2 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cdot \sin\alpha = \frac{4 \cdot \sqrt{7}}{3} \cdot \sin 90 - \alpha$$

$AH \cdot AB = AC^2$; $AH = \frac{7 \cdot 3}{49} = \frac{3}{7}$; $CH = \sqrt{}$

$CH = \frac{BC}{AC} \cdot AH = 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} : \sqrt{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7 \cdot \sqrt{3}}$; $EH = \operatorname{tg} 30° \cdot CH = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{6}{7 \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{7}$;

$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AH} = \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\right) = \frac{1}{3}$; $S_{ADE} = \frac{1}{3}$.

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)