МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 15

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\left(\frac{(x-5)^2+4}{|x-5|}-4\right)(|x-4|+|x-6|-2) \leqslant 0.$$

2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2-25y^2}=50, \\ 5y+\sqrt{x^2-25y^2}=1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN, касается стороны AB в точке A. Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь треугольника ABN, если известно, что $AB=3$, $BM=1$.

4. [5 баллов] Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается сторон AC и AB в точках E и D. Точка Y – основание перпендикуляра, опущенного из точки E на AB, а X – вторая точка пересечения EY со вписанной окружностью треугольника ABC. Найдите радиус этой окружности, если площадь треугольника AXD равна 12, а $5AD=6EY$.

5. [5 баллов] На доске выписано $10n$ последовательных натуральных чисел ($n \in \mathbb{N}$). Из них выбираются три попарно различных числа, среди которых ровно одно кратно 2 и ровно одно кратно 5. Известно, что можно составить ровно 5 112 таких троек. Чему равно n?

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} 2y+3x \geqslant |2y-3x|, \\ y \leqslant -2x+16, \\ x^2-12y+y^2+16 \geqslant 0 \end{cases}$$

7. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые две последовательные степени числа десять равна 1234.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Заметим, что $a^2 = |a|^2$:

1. $a \geq 0 \quad |a| = a \quad |a|^2 = a^2.$

2. $a \leq 0 \quad |a| = -a \quad |a|^2 = (-a)^2 = a^2.$

$$\frac{(x-5)^2+4}{|x-5|} - 4 = \frac{(x-5)^2 - 4|x-5| + 4}{|x-5|} = \frac{|x-5|^2 - 4|x-5| + 4}{|x-5|} = \frac{(|x-5|-2)^2}{|x-5|}$$

1. Числитель равен нулю $\Rightarrow |x-5| - 2 = 0 \Rightarrow |x-5| = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x-5 = \pm 2 \Rightarrow x_1 = 3; \; x_2 = 7$

2. Числитель больше нуля $\Rightarrow$ т.к. знаменатель больше нуля, вся дробь больше нуля $\Rightarrow$ этот множитель не влияет на знак неравенства.

Тогда:

$|x-4| + |x-6| - 2 \leq 0$

а) $x < 4$

$(4-x) + (6-x) - 2 \leq 0$

$10 - 2x - 2 \leq 0$

$x \geq 4$, но $x < 4 \Rightarrow$ противоречие.

б) $x > 6$

$(x-4) + (x-6) - 2 \leq 0$

$2x - 10 - 2 \leq 0$

$x \leq 6$, но $x > 6 \Rightarrow$ противоречие.

в) $4 \leq x \leq 6$

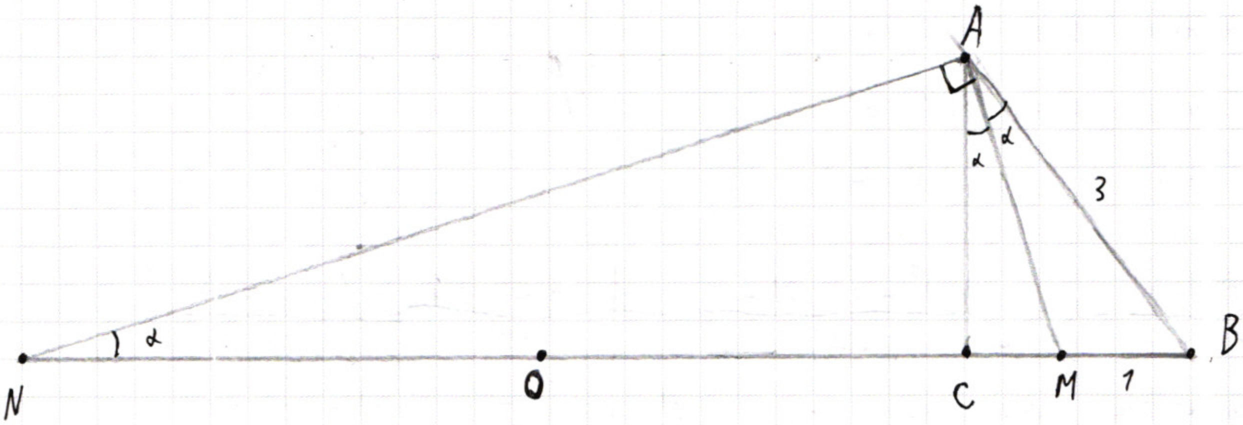
$(x-4) + (6-x) - 2 \geq 0 \qquad 0 \geq 0$ верно при любом x.

Заметим, что в знаменателе стоит $|x-5|$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow |x-5| \neq 0 \Rightarrow x-5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5.$

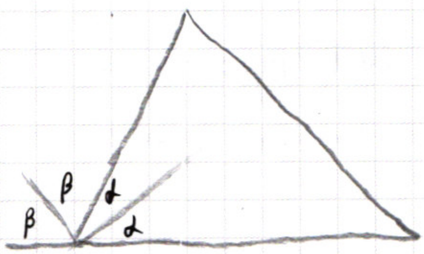
Ответ: $x \in \{3\} \cup [4;5) \cup (5;6] \cup \{7\}$.

№3.



Заметим, что $\angle NAM = 90^\circ$:

$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ.$



Значит, центр описанной окружности лежит на середине MN.

Т. к. AB — касательная, то $\angle ANM = \angle BAM$.

$\triangle BAM \sim \triangle BNA$ ($\angle BAM = \angle BNA$, $\angle B$ — общий) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BA}{BN} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow BN = \frac{BA^2}{BM} = \frac{3^2}{1} = 9.$

$R = \frac{1}{2} MN = \frac{1}{2}(BN - BM) = \frac{1}{2}(9-1) = 4.$

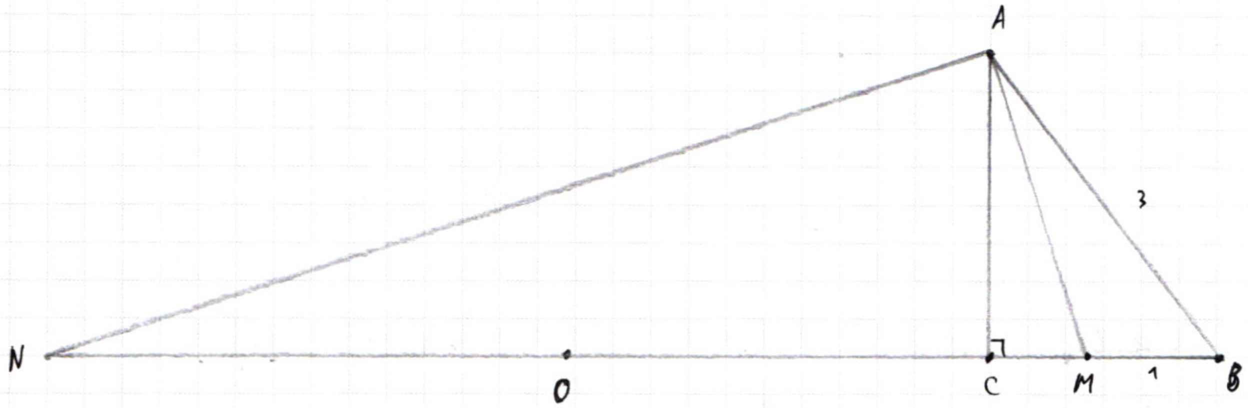
В $\triangle ABN$: $\alpha + (90+\alpha) + \angle B = 180^\circ \Rightarrow (\angle B + 2\alpha) = 90^\circ.$

В $\triangle ABC$: $(\angle B + 2\alpha) + \angle C = 180^\circ \Rightarrow 90 + \angle C = 180^\circ \Rightarrow \angle C = 90^\circ.$

По свойству биссектрисы в $\triangle ABC$, $\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CM} = \frac{3}{1}$.

Пусть $CM = x$, $AC = 3x$. Тогда:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



В $\triangle ABC$ по теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

$(3x)^2 + (x+1)^2 = 3^2$

$9x^2 + x^2 + 2x + 1 = 9$

$5x^2 + x - 4 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 4 \cdot 5 = 81$

$x_1 = -1$, $x_2 = \frac{4}{5}$.

-1 не подходит, $\Rightarrow$ $CM = \frac{4}{5}$, $AC = 3CM = \frac{12}{5}$.

$S_{\triangle ABN} = \frac{1}{2} BN \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{12}{5} = 10{,}8$.

Ответ: $R = 4$, $\angle ACB = 90°$, $S = 10{,}8$.

№2.

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 25y^2} = 50 \\ 5y + \sqrt{x^2 - 25y^2} = 1 \end{cases} \ominus$$

$x - 5y = 49$

$x = 5y + 49$.

Подставим во II уравнение:

$$5y + \sqrt{(5y+49)^2 - 25y^2} = 1$$

$$\sqrt{25y^2 + 490y + 2401 - 25y^2} = 1 - 5y$$

$$490y + 2401 = 1 - 10y + 25y^2$$

$$25y^2 - 500y - 2400 = 0$$

$$y^2 - 20y - 96 = 0$$

$$D = 400 + 4 \cdot 96 = 784 = 28^2$$

$y_1 = -4 \qquad y_2 = 24$

$x_1 = 29 \qquad x_2 = 169$

Поскольку в задаче берётся арифметический корень, вторая пара не подходит.

Ответ: $x = 29, \quad y = -4.$

№ 7.

Пусть число $n = \overline{abcdef}$ подходит. Тогда:

$$\left[\begin{array}{ll} f + 0 = 1234 & (1) \\ \overline{ef} + f = 1234 & (2) \\ \overline{def} + \overline{ef} = 1234 & (3) \\ \overline{cdef} + \overline{def} = 1234 & (4) \\ \overline{bcdef} + \overline{cdef} = 1234 & (5) \\ \overline{abcdef} + \overline{bcdef} = 1234 & (6) \\ \overline{abcdef} + \overline{abcdef} = 1234 & (7) \end{array} \right.$$

Заметим, что (1) ≤ 9, (2) ≤ 108, (3) ≤ 1098; (6) ≥ 100000, (7) ≥ 200000 (т.к. $a \geq 1$).

Значит, подходят только (4) и (5).

1. $\overline{cdef} + \overline{def} = 1234$

$$1000c + \overline{def} + \overline{def} = 1234$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\overline{def} = \frac{1234 - 1000c}{2}$$

$c=0$ $\quad$ $c=1$ $\quad$ $c \geq 2$

$\overline{def} = 617$ $\quad$ $\overline{def} = 117$ $\quad$ $\overline{def} < 0$

$d=6, e=1, f=7$ $\quad$ $d=1, e=1, f=7$

2. $\overline{bcdef} + \overline{cdef} = 1234$

$$\overline{cdef} = \frac{1234 - 10000b}{2}$$

$b=0$ $\quad$ $b \geq 1$

$\overline{cdef} = 617$ $\quad$ $\overline{cdef} < 0$

$c=0, d=6, e=1, f=7.$

Итак, при $b=0$ $n = \overline{a00617}$, $\# n = 9$;
при $b \neq 0$ $n = \overline{ab0617}$ или $\overline{ab1117}$, $\# n = 9 \cdot 9 \cdot 2 = 162$. $162 + 9 = 171$.

Ответ: 171.

№5.

Разобьём числа на n групп по 10 чисел.

1. Пусть одно число $\vdots 2$ и $\vdots 5$. В каждой группе такое число только одно (оно $\vdots 10$), т.е. # способов — n.

нечётных чисел $\underbrace{}_{\text{в группе}}$ — 5, но одно из них $\vdots 5$. Т.е. # способов — $n \cdot 4n \cdot (4n-1)$

2. Пусть одно число $\vdots 2$, а другое — $\vdots 5$. Тогда:

$\#$ способов выбрать I число — $4n$ (5 чётных, но 1 из них кратно 5).

$\#$ способов выбрать II число — $1n$ (2 числа $\vdots\, 5$, но одно из них чётн.)

$\#$ способов выбрать III число — все числа, $\not\vdots\, 2$ и $\not\vdots\, 5$. В каждой группе их 4, значит всего — $4n$.

Всего способов — $n \cdot 4n \cdot (4n-1) + n \cdot 4n \cdot 4n = 5112$

$4n^2(8n-1) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 71$

$n^2 \cdot (8n-1) = 2 \cdot 3^2 \cdot 71$

Пусть у n есть простой делитель p $(p \neq 3)$, тогда $n^2 \vdots\, p^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot 71 \vdots\, p^2$. Противоречие. $\Rightarrow n=1$ или $n=3$.

1) $n=1$

$1^2 \cdot (8-1) = 7 \neq 2 \cdot 3^2 \cdot 71$

2) $n=3$

$3^2 \cdot (24-1) = 3^2 \cdot 23 \neq 2 \cdot 3^2 \cdot 71$.

Ответ: такого быть не может.

N 6.

1) $2y+3x \geq |2y-3x|$ Т. к. обе части ≥ 0, можно возвести в квадрат.

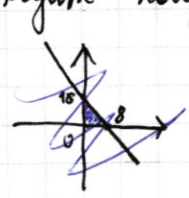
$4y^2+9x^2+12xy \geq 4y^2+9x^2-12xy$

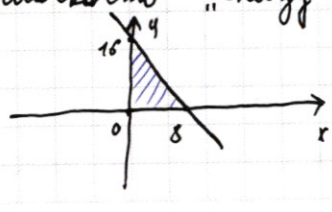
$24xy \geq 0$

$xy \geq 0 \Rightarrow x$ и y одного знака. Если $x<0$ и $y<0$, то $2y+3x<0$, но $2y+3x \geq |...| \Rightarrow 2y+3x \geq 0$. Противоречие.

$\Rightarrow x \geq 0,\ y \geq 0$.

2) $y \leq -2x+16 \Rightarrow$ Подходит полуплоскость „снизу" от прямой $y=-2x+16$.





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\overline{abcdef}$

$$\left[\begin{array}{ll} f + 0 = 1234 & X \\ \overline{ef} + f = 1234 & X \\ \overline{def} + \overline{ef} = 1234 & X \\ \overline{cdef} + \overline{def} = 1234 & V \\ \overline{bcdef} + \overline{cdef} = 1234 & V \\ \overline{abcdef} + \overline{bcdef} = 1234 & X \end{array}\right.$$

1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1

0 1 2 3 4 0 1 2 3 4

$n \cdot 4n \cdot (4n-1)$

$+$

$5n \cdot n \cdot 4n$

$4n^2 \cdot (9n-1) = 5112$

$4n^2 \cdot (9n-1) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 71$

1. $\overline{cdef} + \overline{def} = 1234$

$\overline{def} = \dfrac{1234 - 1000c}{2}$

c	0	1	2
$\overline{def}$	617	117	<0

$b \neq 0$

2. $\overline{bcdef} + \overline{cdef} = 1234$

$\overline{cdef} = \dfrac{1234 - 10000b}{2}$

b	0	1
$\overline{cdef}$	0617	<0

$b = 0$

$$\begin{array}{r|l} 5112 & 2 \\ 2556 & 2 \\ 1278 & 2 \\ 639 & 3 \\ 213 & 3 \\ 71 & 71 \end{array}$$

$9 \cdot 9 \cdot 2 + 9 \cdot 1 \cdot 1 = 9 \cdot 19 = 171$

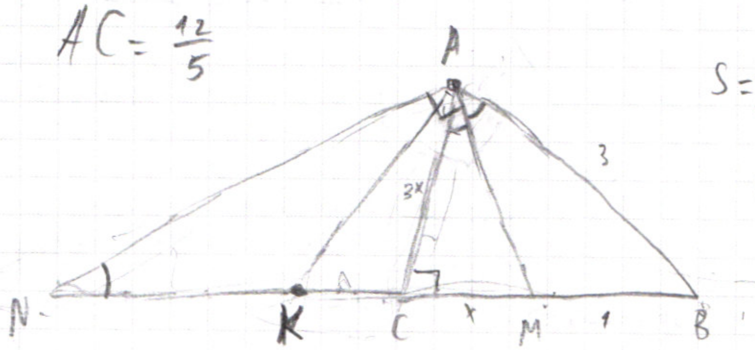
$n^2 \cdot (9n-1) = 2 \cdot 3^2 \cdot 71$

$BN = 9$ $\quad AC = \dfrac{12}{5}$

$\sin\alpha = \dfrac{AM}{8}$

$S = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{12}{5} \cdot 9 = 10,8$

$R = \dfrac{AM}{2} = 4$



$\triangle BAM \sim \triangle BNA$

$\triangle BAC \sim \triangle BKA$

$\dfrac{AB}{BK} = \dfrac{AC}{AK} = \dfrac{BC}{AB}$

$tg\,\alpha = \dfrac{BA}{BN} = \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{BM}{BA}$

$\sin N = \dfrac{AM}{8}$

$9x^2 + x^2 + 2x + 1 = 9$

$10x^2 + 2x = 8$

$BN \cdot BM = BA^2$

$BN = \dfrac{BA^2}{BM} = \dfrac{3^2}{1} = 9$

$\cancel{x_1 = -1}$ $\quad x_2 = \dfrac{4}{5}$

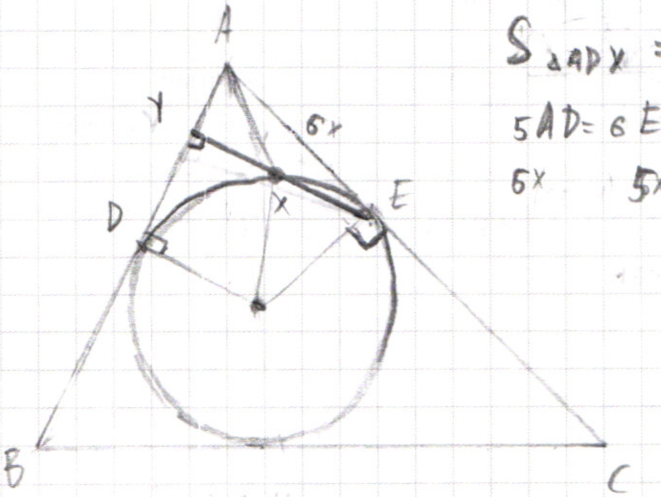
$5x^2 + x - 4 = 0$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$S_{\triangle ADX} = 12$

$5AD = 6E\cancel{Y}$

$6x \quad 5x$

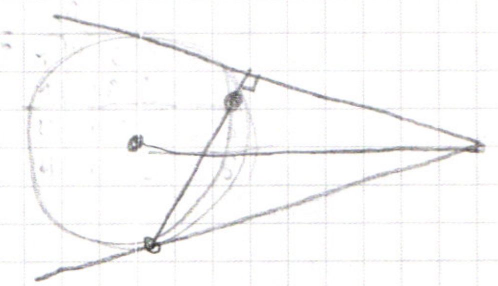
$\frac{1}{2} \cdot 6x \cdot XY = 12$

$XY = \cancel{\frac{24}{5}} \cancel{= 4{,}8} \; \frac{4}{x}$

$XE = 6x - \frac{4{,}8}{x} = \frac{6x^2 - 4{,}8}{x}$

$AY = \sqrt{(6x)^2 - (5x)^2} = x\sqrt{11}$

$DY = x\,(6 - \sqrt{11})$



$DE = \sqrt{x^2(6-\sqrt{11})^2 + 25x^2} =$

$= x\sqrt{36 + 25 + 11 - 12\sqrt{11}} =$

$= x\sqrt{72 - 12\sqrt{11}} =$

$= 2x\sqrt{18 - 3\sqrt{11}}$

$x^2 - 25y^2 = 2500 + x^2 - 100x$

$x^2 - 25y^2 = 1 + 25y^2 - 10y$

$25y^2 - 100x + 2500 = 0$

$50y^2 - x^2$

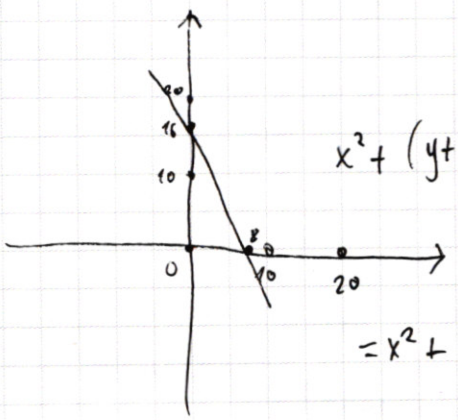
$y^2 - 12y + 16 + \cancel{x^2} \geq \cancel{0} - x^2$

$\cancel{\vartheta}\, D = 144 - 64 - 4x^2 = 80 - 4x^2$

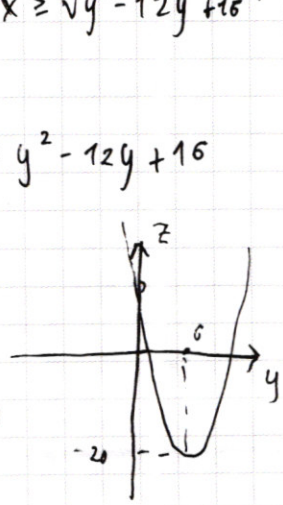
$y = \frac{12 \pm 2\sqrt{20 - x^2}}{2} = 6 \pm \sqrt{20 - x^2}$

$x^2 \geq \sqrt{y^2 - 12y + 16}$

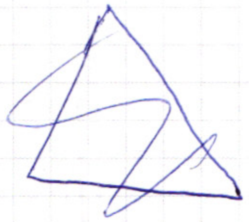
$z = y^2 - 12y + 16$

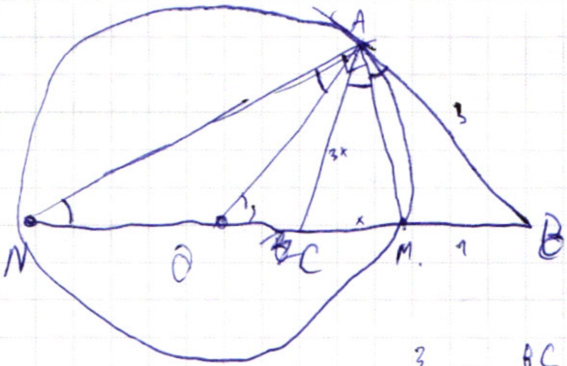


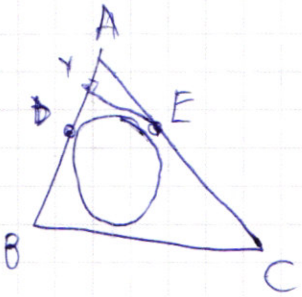
$x^2 + (y+4)^2 - 20y =$



$= x^2 + (y - 2\sqrt{5y} + 4)(y + 2\sqrt{5y} + 4) \geq 0$







$y^2-12y+16\geq 0$

$(y-6+2\sqrt{5})(y-6-2\sqrt{5})$

$\frac{3}{BO}=\frac{BC}{3}$

$BO\cdot BC=9$

$BO\cdot(1+x)=9$

$\overline{abcdef}$

$\left[\begin{array}{l}\overline{ef}+f=1234\\ \overline{def}+\overline{ef}=1234\\ \overline{cdef}+\overline{def}=1234\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}10e+2f=1234\\ 100d+20e+2f=1234\\ 1000c+200d+20e+2f=1234\end{array}\right.$

$Max(10e+2f)=108$

$Max(100d+20e+2f)=1098$

$\Rightarrow 1000c+200d+20e+2f=1234$

$500c+100d+10e+f=617$

1. $c=1$

$100d+10e+f=117$

$\overline{def}=117$

$d=1 \quad 10e+f=17$

$f=17-10e$

$d=1$

$e=1$

$f=7$

2. $c=0$

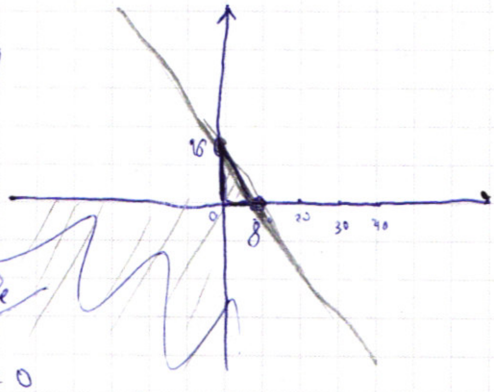
$100d+10e+f=617$

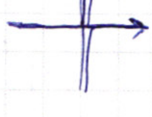
$\overline{def}=617$

$d=6$

$e=1$

$f=7$





$\#(\overline{ab1117})+\#(\overline{ab0617})=$

$=81+81=162$

$y=-2x+16$

$x^2+(y+4)^2-4y\geq 0$

$x^2+(y-2\sqrt{y^2-4})(y+2\sqrt{y^2-4})$

$4y^2+9x^2+12xy\geq 4y^2+9x^2-12xy$

$xy\geq 0$

$x\leq 8-0{,}5y$

$x^2\geq -y^2+12y-16$

$y^2-12y+16=0$

$D=144-64=80$

$y=\frac{12\pm 4\sqrt{5}}{2}=6\pm 2\sqrt{5}$

$y^2-12y+(16+x^2)\geq 0$

$D=144-64-4x^2=80-4x^2=4(20-x^2)$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2-25y^2}=50 \\ 5y+\sqrt{x^2-25y^2}=1 \end{cases}$$

$x-5y=49 \quad x=5y+49 \qquad x^2 \geq 25y^2$

$x=5y+49$

$\cancel{5y+49} \quad \cancel{5y+\sqrt{(5y+49)^2-25y^2}=1}$

$\cancel{5y+25y^2+490y} \quad 5y+\sqrt{490y+2401}=1$

$\sqrt{490y+2401}=1-5y$

$490y+2401=25y^2-10y+1$

$-25y^2+500y+2400=0 \qquad 1:25$

$-y^2+20y+96=0$

$y^2-20y-96=0$

$D=400+4\cdot 96=4\cdot(100+96)=4\cdot 196=4\cdot 14^2 = 28^2$

$y_1=(20+28)/2=24 \qquad x_1=169$

$y_2=(20-28)/2=-4 \qquad x_2=29$

$169+\sqrt{169^2-120^2}=169+\sqrt{49\cdot 289}=169+7\cdot 17=169+119$

$(50-1)^2=2500-100+1$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\cancel{5n\cdot 4n}$

$\cancel{5n^2\cdot 4n} \quad 4n\cdot n\cdot 4n+$

$\cancel{5n\cdot n} \quad +n\cdot 4n\cdot(4n-1)$

1278	2
639	3
213	3
71	71

$\cancel{20n^3+16n^2-4n=5112}$

$\cancel{x^2 \geq (5y)^2}$

$\cancel{|x| \geq |5y|}$

$\cancel{5n^3+4n^2-n=1278}$

$\cancel{5n^2(n+1)-n(n+1)=1278}$

$\cancel{n(n+1)(5n-1)=2\cdot 3^2\cdot 71}$

$16n^3+16n^3-4n^2=5112$

$32n^3-4n^2=5112$

$8n^3-n^2=1278$

$n^2(8n-1)=2\cdot 3^2\cdot 71$

$n=3$

$$\left(\frac{(x-5)^2+4}{|x-5|}-4\right)\left(|x-4|+|x-6|-2\right)\leq 0$$

$x\neq 5$

$(x-5)^2 - 4|x-5|+4$

$(x-5)^2=|x-5|^2$

$\dfrac{(|x-5|-2)^2}{|x-5|}$

$|x-4|+|x-6|-2\leq 0$

$|x-4|+|x-6|\leq 2$

1. $x\leq 4$

$-x+4-x+6\leq 2$

$-2x+10\leq 2$

$x\geq 4 \qquad x=4$

2. $x\geq 6$

$x-4+x-6\leq 2$

$2x-10\leq 2$

$x\leq 6$

$x=6$

3. $4<x<6$

$x-4-x+6\leq 2$

$2\leq 2$

$x\in[4;5)\cup(5;6].$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)