Адрес

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

№7

Заметим пару свойств:

1) $f(\cancel{x}) = f(1\cdot x) = f(1)+f(x) \Rightarrow f(1)=0$

2) $f(abc) = f(\cancel{ab}\cdot c) = f(ab)+f(c) = f(a)+f(b)+f(c) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для ~~любого~~ ~~так...~~ $f(x)$ Пусть X раскладывается в прост. множители:

$$X = \underbrace{p_1\cdot p_1\cdot \ldots \cdot p_1}_{k_1}\cdot\underbrace{p_2\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_2}_{k_2}\ldots\underbrace{p_n\cdot p_n\ldots p_n}_{k_n} \Rightarrow f(x) =$$

$$= \underbrace{f(p_1)+f(p_1)\ldots+f(p_1)}_{k_1} + \underbrace{f(p_2)+\ldots f(p_2)}_{k_2} + \ldots \underbrace{f(p_n)+\ldots f(p_n)}_{k_n} =$$

$$= p_1\cdot k_1 + p_2 k_2 + \ldots p_n\cdot k_n$$

($p_1 .. p_n$ - простые делители, $k_1 .. k_n$ - степени этих прост. делителей, входящих в x)

3) $f(y) = f\left(\frac{y^2}{y}\right) = f(y^2) + f\left(\frac{1}{y}\right) =$

$= f(y\cdot y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(y) + f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow \cancel{f(y)}\ \boxed{f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)} \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) = f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x)-f(y)$ Выпишем $f(1), f(2)\ldots f(18)$:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$f(a)$	0	2	3	4	5	5	7	6	6	7	11	7	13	9	8	8	17	8

Т.к. $f(x)-f(y)<0 \Rightarrow$
$f(x)<f(y) \Rightarrow$ Остается посчитать кол-во пар чисел x, y, у которых $f(x)<f(y)$:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
кол-во подх. y:	17	16	15	14	12	12	7	10	10	7	2	7	1	3	4	4	0	4

Посчитав суммарно общее кол-во пар чисел: 145

Ответ: 145

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y=1 \Rightarrow$

$-1-\sqrt{6}<0<y=1=-1+\sqrt{4}<-1+\sqrt{6}$ ✓

$y=5$

$y=-1+\sqrt{36}>-1+\sqrt{6}$ – не подходит.

$y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$

$\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}<0<-1+\sqrt{6}\right)$ и

$\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \vee -1-\sqrt{6}$

$-1-\sqrt{21} \vee -2-2\sqrt{6}$

$-1-\sqrt{21} \vee -2-\sqrt{24}$

$2-1+\sqrt{24}-\sqrt{21}>0$

$\Downarrow$

$\frac{-1-\sqrt{21}}{2}>-1-\sqrt{6} \Rightarrow$ подходит.

$y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

$\left(y>0>-1-\sqrt{6}\right)$

$y \quad \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \vee -1+\sqrt{6}$

$-1+\sqrt{21} \vee -2+\sqrt{24}$

$1+\sqrt{21}-\sqrt{24} \vee 0$

~~$1 \vee \sqrt{24}-\sqrt{21}$~~ ~~$1 \vee 24+21$~~

~~$\sqrt{24}+\sqrt{21} \vee 3$~~

$\Leftrightarrow 1+\sqrt{21} \vee \sqrt{24}$

$1+21+2\sqrt{21} \vee 24$

$2\sqrt{21}>2$

$\Downarrow$

$\frac{-1+\sqrt{21}}{2}>-1+\sqrt{6}$ – не подходит $\Rightarrow$

Итог $y=1 \quad y=5 \quad y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y^2 \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 5 \\ y = \frac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -20 \\ y = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1+\sqrt{21}}{2} \\ y = -\frac{1+\sqrt{21}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Отв: $(4;1)$

$(-20;5)$

$\left(-\frac{1+\sqrt{21}}{2}; -\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$

N5 Дано:

$\triangle ABC$ / AB - гипот.

$D \in AC$

$E \in AB$

$DE \perp AB$

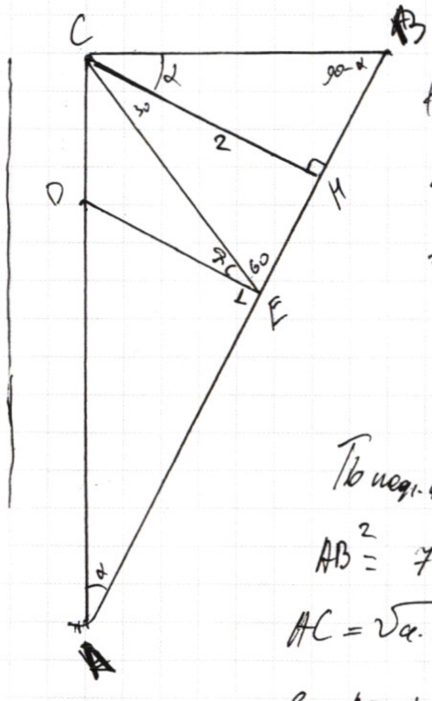
$AC = \sqrt{7}$

$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\angle CED = 30°$

$\frac{AD}{AC}$ - ?

$S_{\triangle AED}$ = ?



CH - высота в $\triangle ACB$

~~Пусть $AH = a$, $BH = b$~~ Пусть $AH = a$ $HB = b$.

$\angle CAB = \alpha = \angle HCB \Rightarrow tg(\angle CAH) = tg(\angle HCB) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CH}{AH} = \frac{HB}{CH} \Rightarrow CH = \sqrt{ab}$

По т. Пиф. $AC^2 = AH^2 + CH^2 = a^2 + ab = a(a+b) \Rightarrow AC = \sqrt{a(a+b)}$

$CB^2 = CH^2 + HB^2 = b^2 + ab \Rightarrow CB = \sqrt{b(a+b)}$

По пиф. знач. $AC^2 + CB^2 = AB^2$:

$AB^2 = 7 + 4 \cdot \frac{7}{3} = \frac{49}{3} \Rightarrow AB = 7\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a + b = 7\frac{\sqrt{3}}{3}$

$AC = \sqrt{a \cdot AB} \Rightarrow \sqrt{7} = \sqrt{a \cdot 7\frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow a = \sqrt{3}$

$b = AB - a = 7\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow CH = \sqrt{ab} = 2$

Т.к. $CH \perp AB \perp ED \Rightarrow CH \parallel ED \Rightarrow \angle DEC = \angle ECH = 30°$ как накрест леж. при $CH \parallel ED$ и секущ. $(E) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в $\triangle CHE$: $EH = CH \cdot tg(30°) = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ / $\Rightarrow AE = AH - EH = \sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\triangle DAE \sim \triangle CAE$ по 2 углам

1) $\angle A$ общ

2) $\angle DEA = \angle CHA = 90°$

$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AH} = k$, $\frac{S_{ADE}}{S_{ACH}} = k^2$

$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AH} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} = k$

$S_{ADE} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot S_{ACH} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot CH \cdot AH =$

$= \frac{1}{9} \cdot \sqrt{3} =$ / Отв: $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$ и $S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 5-y^2-2y=\sqrt{xy} \\ x=5-y^2 \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow}$$

$$* \quad f(y)=\sqrt{g(y)} \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(y)=g(y) \\ f(y)\geq 0 \end{cases}$$

$$((5-y^2)-2y)^2=(5-y^2)\cdot y$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5-y^2-2y)^2=(5-y^2)y \\ x=5-y^2 \\ 5-y^2-2y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0} \quad (1) \\ x=5-y^2 \\ y^2+2y-5\leq 0 \end{cases}$$

Решим в отдельности (1)

$$((5-y^2)-2y)^2=xy$$

$$(5-y^2)^2-4y(5-y^2)+4y^2=(5-y^2)y$$

$$25+y^4-10y^2-5y(5-y^2)+4y^2=0$$

$$25+y^4-10y^2-25y+5y^3+4y^2=0$$

$$y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0$$

Корень $y=1$ подходит:

$$\begin{array}{l|l} y^4+5y^3-6y^2-25y+25 & y-1 \\ \hline -\,y^4-y^3 & y^3+6y^2-25 \\ \quad 6y^3-6y^2 & \\ -\,6y^3-6y^2 & \\ \quad -25y+25 & \\ -\,-25y+25 & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(y^3+6y^2-25)=0 \Leftrightarrow \boxed{(y-1)(y+5)(y^2+y-5)=0}$$

Корень $y=-5$ подходит:

$$\begin{array}{l|l} y^3+6y^2-25 & y+5 \\ \hline -\,y^3+5y^2 & y^2+y-5 \\ \quad y^2-25 & \\ -\,y^2+5y & \\ \quad -5y-25 & \\ -\,-5y-25 & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$$(1)\Leftrightarrow (y-1)(y+5)(y^2+y-5)=0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=5-y^2 \\ (y-1)(y+5)(y^2+y-5)=0 \quad (1) \\ y^2+2y-5\le 0 \quad (2) \end{cases} \Longleftrightarrow$$

Решим (2)

$y^2+2y-5\le 0$:

$y^2+2y-5=0$

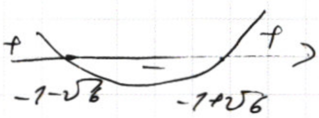
$D=4+20=24 \Rightarrow \sqrt{D}=2\sqrt{6}$

$y=\dfrac{-2\pm 2\sqrt{6}}{2}$

$y=-1\pm\sqrt{6}$

$(y+1+\sqrt{6})(y+1-\sqrt{6})\le 0$

Метод интервалов: (при $y=-1$ значен <0)



$\Rightarrow y\in[-1-\sqrt{6};-1+\sqrt{6}] \Rightarrow (2) \Leftrightarrow y\in[-1-\sqrt{6};-1+\sqrt{6}]$

Реш $y^2+y-5=0$

$D=21 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{21}$

$\boxed{y=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}}$

$\cancel{\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2} \approx \ldots}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-y^2 \\ (y-1)(y+5)\left(y-\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)\left(y-\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)=0 \\ y\in[-1-\sqrt{6};-1+\sqrt{6}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-y^2 \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=5 \\ y=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2} \end{array}\right. \\ y\in(-1-\sqrt{6};-1+\sqrt{6}) \end{cases} \Leftrightarrow \cancel{\{x=5-y^2}$$

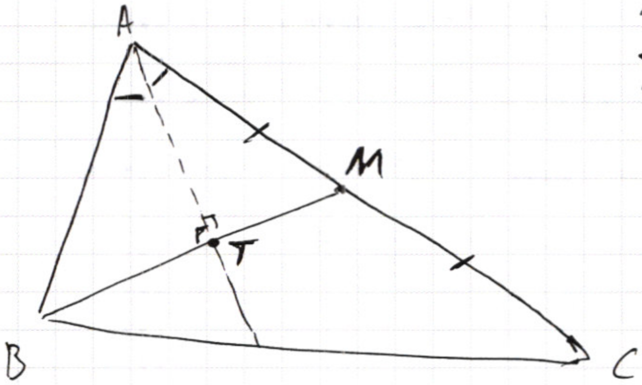
(Теперь идём по условию (2))

$\Leftrightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 Положим на такие треугольники: (в $\triangle ABC$, из B идёт медиана, из A – бисс.)



Пусть BM – медиана,

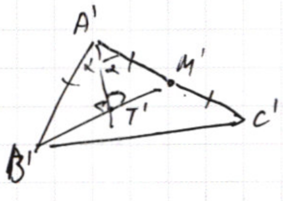
T – т.пер. медианы и бисс.

Положим на $\triangle ABM$:

AT является – высотой ($AT \perp BM$) и бисс. (AT – бисс. $\angle BAM$) $\Rightarrow$

По признаку $\triangle ABM$ – равноб. $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = AM = \frac{AC}{2} \Rightarrow$ У таких треугольников одна сторона в 2 раза меньше другой. И достаточно: если 1 сторона в 2 раза меньше другой, то бисс $\perp$ медиане: (возьмём $\triangle A'B'C'$, все точки аналог. эквив.)

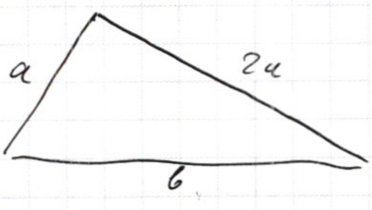


$A'M' = M'C' = A'B'$

$A'T'$ – бисс в равноб. треуг. $A'B'M'$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ высота $\Rightarrow A'T' \perp B'M' \Rightarrow$

Т.е. тогда и только тогда, когда в таком треугольнике 1 сторона в 2 раза больше другой.



Пусть одна сторона имеет длину a, в 2 раза большая её – $2a$, и третья сторона b: $\Rightarrow$

$\underline{a+2a+b=600}$. А ещё, чтобы треугольник существовал, нужно чтобы:

$$\begin{cases} a+2a > b \\ a+b > 2a \\ 2a+b > a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a > b \\ b > a \end{cases}$$

Т.е. подходят такие a, b, что a и b – целые числа;

$$\begin{cases} 3a+b=600 \\ 3a > b \\ b > a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a+b=600 \\ 3a>b \\ b>a \end{cases} \Leftrightarrow \quad b=600-3a \quad \begin{cases} 3a>600-3a \\ 600-3a>a \\ b=600-3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a>600 \\ 600>4a \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 150>a>100 \Rightarrow$ берём любые целые a в этом диапазоне

Мы можем получить все наши треугольники, подходящ. под условия.

(Беря любой a, можно однозначно сложить треугольник;

Пусть взяв разные a, мы получили одинаковые треугольники.

т.е. первый со сторонами a, $2a$ и $600-3a$, а второй

$a+x$, $2a+2x$ и $600-3a-3x$.

$a<a+x$, $2a<2a+2x \Rightarrow$ а ~~при~~ $x>0$ без огранич. общности, ведь за a возьмём образ. меньшей стороны в 2-х треугольниках

Из теоремы ~~[illegible]~~ (при трёх сторонах, где одна меньше другой в 2 раз) $\Rightarrow$ $a<a+x$, $a<2a+2x$ $\Rightarrow$ Если треуг. равны, то и стороны равны:

$a \ne a+x$
$a < 2a+2x$
$\Downarrow$
$\boxed{a=600-3a-3x}$

$2a=a+x$ (ведь $600-3a-3x$ знач, и $2a<2a+2x$)

$\Downarrow$

$600-3a=2a+2x$

$$\begin{cases} a=600-3a-3x \\ 2a=a+x \\ 600-3a=2a+2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 600=7a \\ a=x \end{cases} \Rightarrow a \ne \text{целое} - \text{противоречие}$$

!! Для a мы однозначно получили ровно 1 треугольник (целый) $\Rightarrow$ (все a подходят) $\Rightarrow$ $150>a>100$ a − целых $\Rightarrow$ их 49 $\Rightarrow$

Ответ: 49 треугольников

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

Преобразуем числитель:

$$x^2-6x+10-2|x-3|=(x-3)^2-2|x-3|+1=(|x-3|-1)^2$$

Преобразуем знаменатель:

$$2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|=2\cdot x(x-2)+|x|\cdot|x-2|$$

Перезапишем:

$$\frac{(|x-3|-1)^2}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

Посмотрим где знаки раскрытия модулей, в зависимости от x:

$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
x	$-$	$+$	$+$	$+$
x	0	2	3	

Рассмотрим 4 случая:

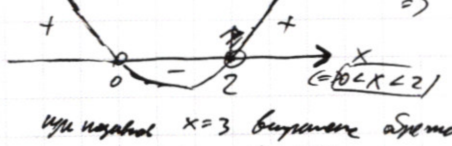
$$\left[\begin{array}{l} x\le 0 \\ 0<x\le 2 \\ 2<x\le 3 \\ x>3 \end{array}\right.$$

I
$$\begin{cases} x\le 0 \ \cancel{\Rightarrow \text{все модули}} \\ \dfrac{(|x-3|-1)^2}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|}\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ \dfrac{(-x+2)^2}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|}\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ \dfrac{(x-2)^2}{3x(x-2)}\le 0 \end{cases}$$

Применим метод интервалов:

Числитель зануляется в $x=2$

Знаменатель в $x=0$ и $x=2$



$\Leftrightarrow 0<x<2$

при переходе $x=3$ выражение сохраняет свой знак, а при переходе через 2 и 0 меняет свой знак

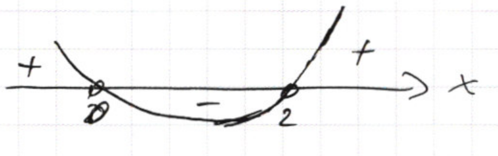
$$\Rightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ 0<x<2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x\in\varnothing}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

II
$$\begin{cases} 0 \le x < 2 \\ \dfrac{(|x-3|-1)^2}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x < 2 \\ \dfrac{(x-2)^2}{\cancel{\ \ }x(x-2)} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Аналогично, получим по методу интервалов:

Числитель зануляется в $x=2$, знаменатель в $x=0$ $x=2$: (~~При x=3~~ При $x=3$ выраж. >0

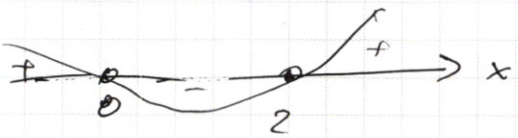


$\Rightarrow$ $0<x<2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x < 2 \\ 0<x<2 \end{cases} \Rightarrow x \in (0;2)$$

III
$$\begin{cases} 2 \le x < 3 \\ \dfrac{(|x-3|-1)^2}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x < 3 \\ \dfrac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Метод интервалов: числ. зануляется в $x=2$, знам. в $x=0$ и $x=2$, при $x=3$ знач. >0:

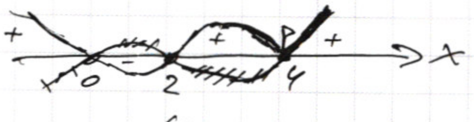


$\Rightarrow$ $0<x<2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<2 \\ 2 \le x < 3 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$$

IV
$$\begin{cases} x \ge 3 \\ \dfrac{(|x-3|-1)^2}{2(x)(x-2)+|x|\cdot|x-2|} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ \dfrac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Метод интервалов: числитель зануляется в $x=4$, знам. в $x=0$ и $x=2$, при $x=5$ знач. >0:



$\Rightarrow$ $x \in (0;2) \cup \{4\}$

(в т. 4 не мен. знак, т.к. ~~знаменатель~~ меняем знак чётное кол-во множителей)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x \in (0;2) \cup \{4\} \end{cases} \Rightarrow x=4$$

Ответ: $x \in (0;2) \cup \{4\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 30 = \frac{1}{2}$

$\cos(\ldots) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right)$

$f(4+c) =$

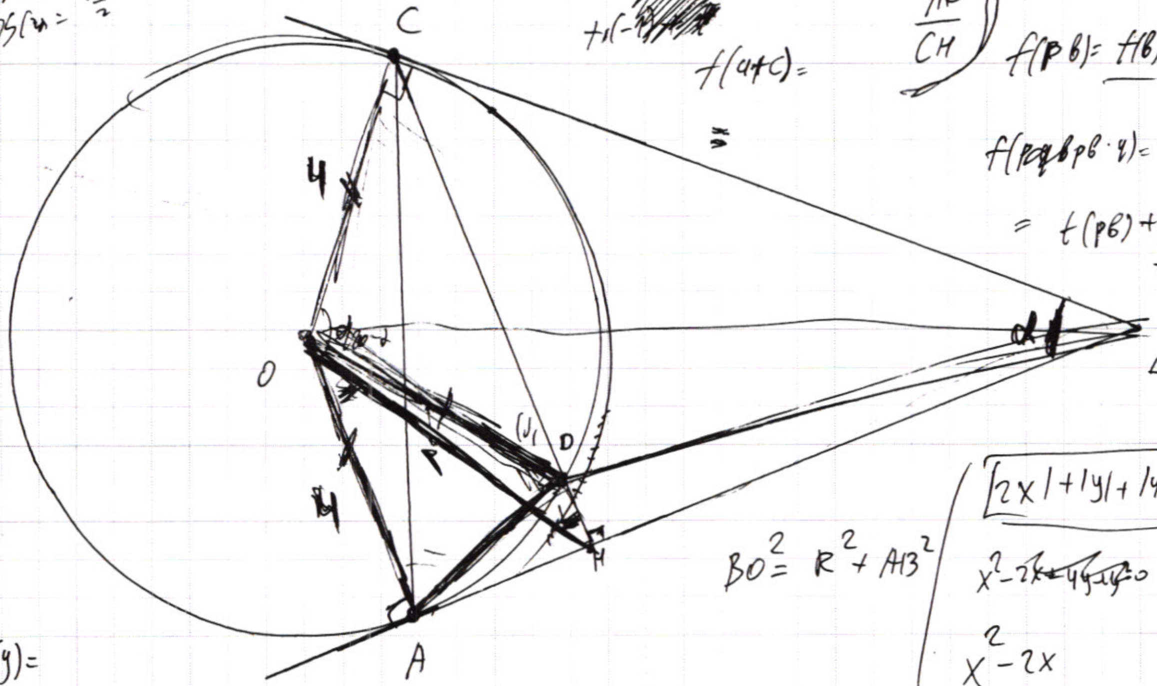
$\frac{AB}{CH}$

$f(pb) = f(b) + p$

$f(p b \cdot q) =$

$= f(pb) + f(q) =$

$= \boxed{f(b) + p + q}$



$\boxed{|2x| + |y| + |y - 2x - y| > 4}$

$BO^2 = R^2 + AB^2$

$x^2 - 2x$

$f(y) =$

$= f\left(\frac{y^2}{y}\right) =$

$= f(y^2) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\boxed{AH^2 = HD \cdot HC}$

$2S_{ADB} = AB \cdot HD$

$f\left(\frac{1}{y}\right) =$

$= f(1) + f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow$

$\boxed{f(1) = 0}$

$f(y \cdot y) =$

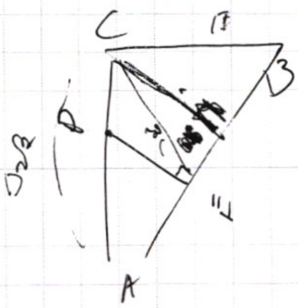
$f(y) + f(y)$

$\frac{2S_{AOB}}{AH^2} = \frac{AB}{CH} = \frac{12}{AH^2}$

AH^2

$f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) =$

$= f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$



$AH^2 = AC^2 - CH^2 = HD \cdot HC$

$AC^2 = 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot \cos(\alpha) \cdot 4^2$

$AC^2 = 2AB^2 - 2 \cdot \cos(\alpha) \cdot AB^2$

$f\left(\frac{1}{y}\right) =$

$= f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) \cdot f$

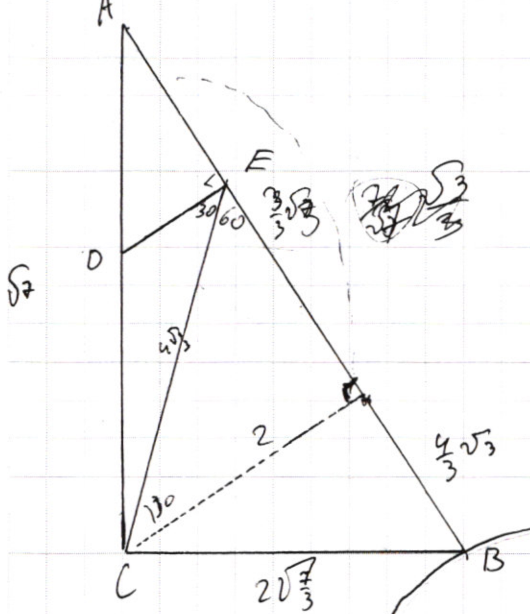
$f(ab) = f(a) + f(b)$

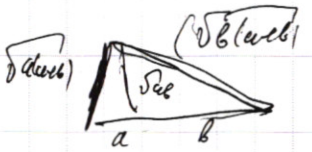
$f(2 \cdot 2) = f(2)$

$f(3 \cdot 3) = f \cdot 3^2$

$f(1) = 0$

$AB^2 = 7 + 4 \cdot \frac{7}{3} = \frac{21+28}{3} = \frac{49}{3} \Rightarrow \frac{7}{\sqrt3} = \frac{7\sqrt3}{3}$





a+b – ...

$\sqrt7 = \sqrt{a \cdot \frac{7\sqrt3}{3}}$ $\sqrt3 \cdot 4\sqrt3$

$a = 3\sqrt3$

$2\sqrt{\frac{7}{3}} = \sqrt{b \cdot \frac{7\sqrt3}{3}}$

$4 \cdot \frac{7}{3} = b \cdot \frac{7}{3} \cdot \sqrt3$

$b = \frac{4}{\sqrt3} = \frac{4\sqrt3}{3}$

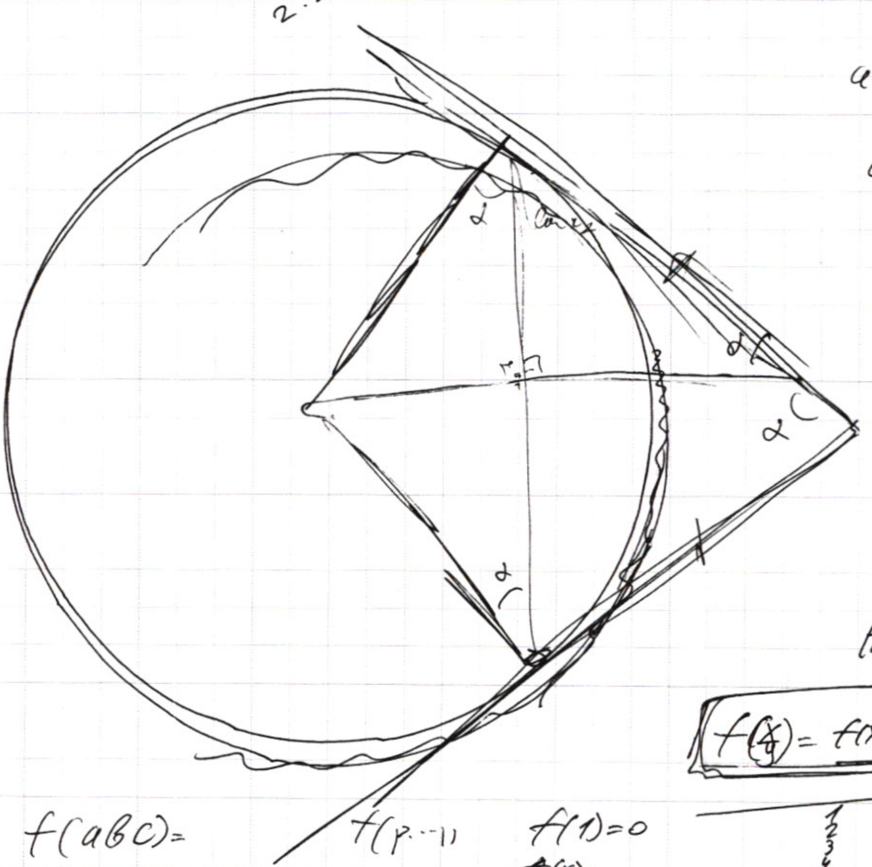
$a = \frac{3}{3}\sqrt3$

$b = \frac{4}{3}\sqrt3$

$\frac{\sqrt2 \cdot 3}{3 \cdot 8}$

$\cos(h) = \frac{\sqrt3}{2}$

2 · 2



$f(y) = f\left(\frac{y^2}{y}\right) =$

$= f(y^2) + f\left(\frac{1}{y}\right) =$

$= f(y \cdot y) + f\left(\frac{1}{y}\right) =$

$= f(y) + f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

$\boxed{f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)}$

$f(abc) =$

$= f(ab) + f(c) =$

$= f(a) + f(b) + f(c)$

$f(p \cdots 1)$

$f(1) = 0$

$f(x) =$

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a \quad 2a \quad 600-3a$

$\boxed{a+x} \quad \boxed{2a+x}$

$(x^2-6x+10) - 2|x-3|$

$(x-3)^2+1-2(x-3)$

$|x-3|^2-2|x-3|+1=$

$=(|x-3|-1)^2$

$2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|=$

$=2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|$

$(|x-3|-1)^2$

$2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25 \,|\, y-1$

$-y^4-y^3 \quad\quad y^3+6y^2-25$

$6y^3-6y^2$

y^3-6y^2-25

$y=$

$+ \quad 0 \quad - \quad 2$

$\boxed{8+6\cdot 4-25}$ a

$y=$

b

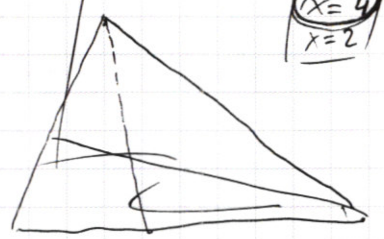
$6y-6$

$|x-3|=1$

$x=4$

$x=2$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$$



$3a>b$

$4+b>2a$

$\boxed{b>a}$

$x=5-y^2$

$x-2y=\sqrt{xy}$

$5-y^2-2y=\sqrt{(5-y^2)\cdot y}$

$3a>b>a$

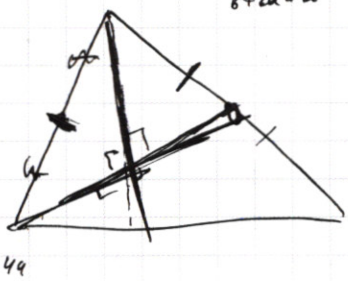
$\boxed{3a+b=600}$

$b=600-3a$

$3a>600-3a>a$

$6a>600$

$600>4a$



$f(y)=2y(x)$

$f^2(y)=y(y)$

$x-2y=\sqrt{xy}$

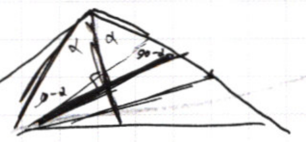
$x^2+4y^2-4xy=xy$

$x-2y\geq 0$

$x+y^2=5$

$x^2+4y^2=3xy$

$5y^2\geq 2y$



$x=5-y^2$

$5-y^2-2y=\sqrt{(5-y^2)\cdot y}$

$x=(5-y)^2$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$a>100$

$a<150$

$f(x\cdot y)= \quad f(x)+f(\frac{1}{y})$

$x^2-4xy+4y^2=xy$

$x^2+4y^2-5xy=0$

$25+y^4-10y^2+4y^2-25y+5y^3=0$

$(5-y^2)^2+4y^2-5(5-y^2)\cdot y=0$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0$

$y=1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

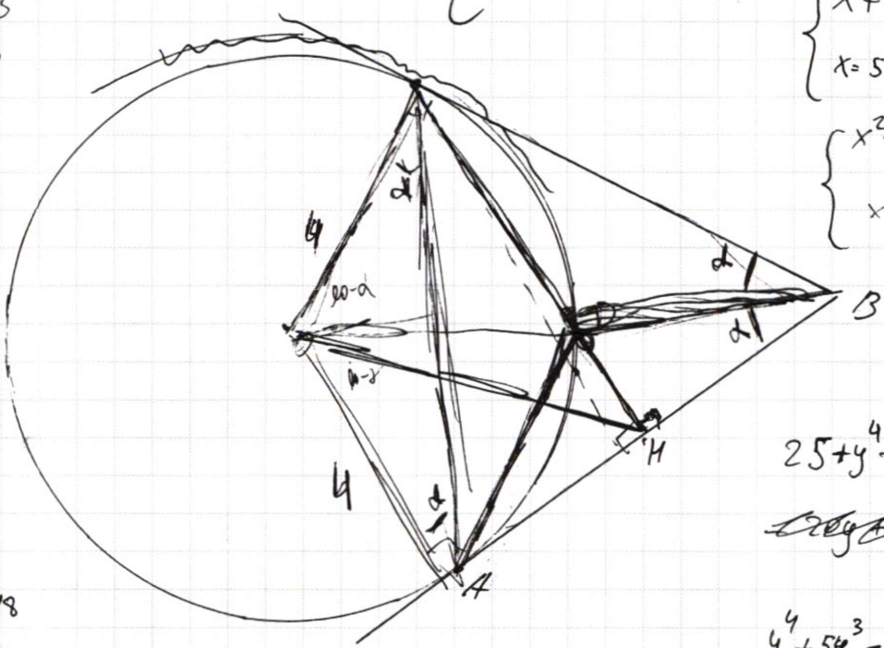
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

0 - 1
2 - 1
3 - 1
4 - 1
5 - 2
6 - 2
7 - 3
8 - 3
9 - 1
11 - 1
13 - 1
17 - 1

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+4y^2-4yx=xy \\ x=5-y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+4y^2-5yx=0 \\ x=5-y^2 \end{cases}$$



$\frac{AB\cdot DB\cdot \sin(\alpha)}{2}$

$25+y^4-10y^2+4y^2-$
$\cancel{20y+4y^3}-25y+5y^3=0$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25$

$y^2(y^2+5y-6)-25y+25$

$y^2(y-1)(y+6)-25(y-1)=0$

$(y-1)(y^2(y+6)-25)=0$

$(y-1)(y^3+6y^2-25)=0$

$17+16=$
$=\boxed{33}$

$33+15=48$

$48+14=62$

$62+12\cdot 2=$
$=62+24=86$

$86+7=93$

$93+2\cdot 20=113$

$113+7=120$

$120+2+7=129$

$129+1=130$

$130+3+4\cdot 3=$
$=133+12=$
$=145$

$S_{ABD}=6$ $AB:CH$

$R=4$

$HD\cdot HC=AH^2$

$\cancel{HD\cdot HC}$ $HD\cdot HC\cdot\frac{AB^2}{2}=AH^2\cdot\frac{AB^2}{2}$

$HD\cdot HC\cdot AB^2=AH^2\cdot AB^2$

$\cancel{162+12}\cdot S_{ABC}\cdot 2=$

$BO^2=BC^2-16$

$\cancel{y=5}$
$-125+6$

$$\begin{array}{l|l} y^3+6y^2-25 & y+5 \\ \underline{-y^3+5y^2} & y^2+y-5 \\ \quad y^2-25 & \\ \quad \underline{-y^2+5y} & \\ \quad\quad -5y-25 & \end{array}$$

$(y-1)(y+5)\cancel{(y^2+y-5)}=0$

$\boxed{(y-1)(y+5)(\cancel{y^2+y-5})=0}$

$y^2+y-5=0$

$D=21$

$y=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

$\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)^2=$

$=\frac{1+21+2\sqrt{21}}{4}=$

$=\frac{11+\sqrt{21}}{2}$

$\frac{10-11-\sqrt{21}}{2}$

$5-\frac{11+\sqrt{21}}{2}=-\frac{1-\sqrt{21}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

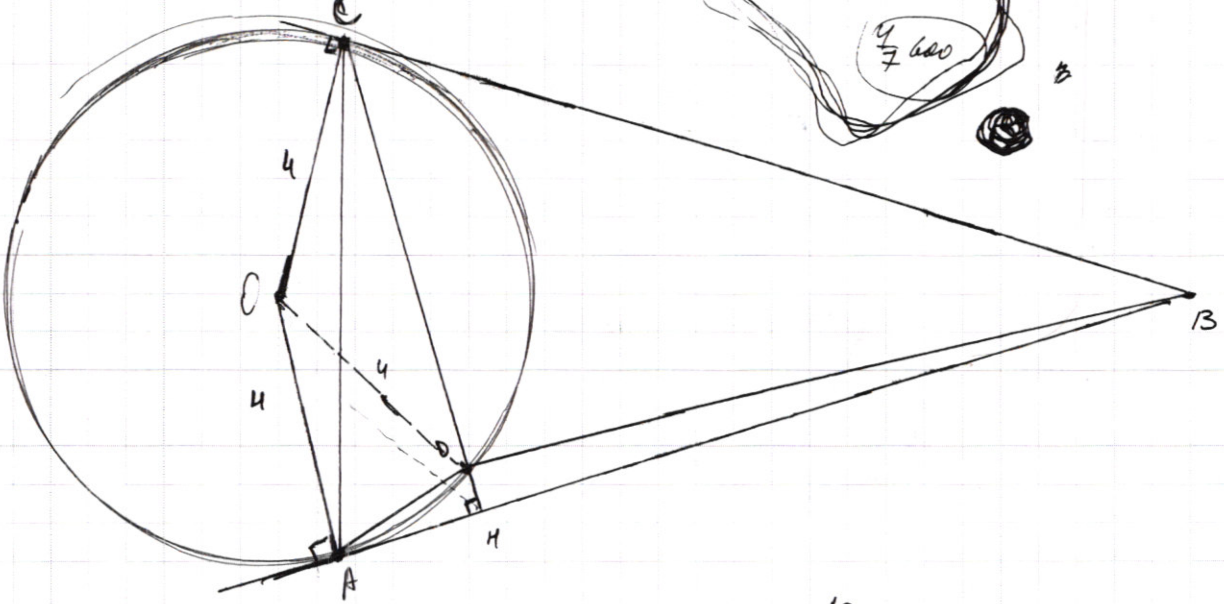
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{600}{7}$ $\frac{2}{7}600$ $\frac{4}{7}600$



$AH^2 =$
$= AC^2 - CH^2 =$
$= AD^2 - DH^2 =$
$= HD \cdot HC$

$S_{ADB} = \frac{DH \cdot AB}{2}$

$\frac{AB}{CH}$

$2S_{ABD} = \frac{AB \cdot DH}{BH}$

$AH^2 = DH \cdot HC$

$AH^2 = OH^2 - R^2$

$AB \cdot CH$

$\cancel{AC^2 - CH^2 = AD^2 + DH^2}$

$AC^2 - CH^2 + AH^2 - DH^2 = 2HD \cdot HC$

$AC^2 + AD^2 = (HD + CH)^2$

$DH \cdot AB = 12$

$AH^2 = DH \cdot HC$

$\frac{AB}{CH} = \frac{12}{AH^2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$|2x|+|y|+|4-2x-y|>4$

$\boxed{x \quad y > 0}$ $x \quad y<0$

$\boxed{2x+y>4}$

$y^2-4y\le 2x-x^2$

$x<0$

$-2x+|y|+$

$(x-1)^2+(y-2)^2\le 5$

$2x+y\ge 4$

$y>4-2x$

$|a|+|b|+|4-a-b|>4$

$a>0$
$b>0$ $\boxed{a+b>4}$

$a<0$
$b>0$ $-a+b+|4-a-b|>4$

$-|a|+|b|+|4+|a|-|b||>4$

b
$a>0$

$|b|>4$ $|a|<|b|-4|$