МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45°$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \le 0.$$

$4x^2-12x+|x(x-3)| \ne 0.$

$4x^2-12x+|x^2-3x| \ne 0.$

$x \le 0;\ 4x^2-12x+x(x-3)$

$4x^2-12x+x^2-3x \ne 0.$

$5x^2-15x \ne 0.$

$x(5x-15) \ne 0$

$\boxed{x \ne 0}$

$x \ne 3.$

$0 < x \le 3 \quad 4x^2-12x-x(x-3) \ne 0.$

$4x^2-12x-x^2+3x \ne 0$

$3x^2-9x \ne 0$

$x(3x-9) \ne 0$

$\boxed{x \ne 3}$

$x \ne 0.$

$x > 3 \quad 4x^2-12x+x(x-3) \ne 0.$

$x \ne 0$

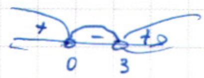
$x \ne 3.$

$\cancel{x^2-2x+5-4|x-1|}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-2x+5-4|x-1| \le 0\\ 4x^2-12x+|x|\cdot|x-3| > 0.\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-2x+5-4|x-1| \ge 0\\ 4x^2-12x+|x|\cdot|x-3| < 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

1) $x \le 0;$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-2x+5+4x-4 \le 0\\ 4x^2-12x+x^2-3x > 0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-2x+5+4x-4 \ge 0\\ 4x^2-12x+x^2-3x < 0\end{cases}\end{array}\right.$

$\begin{cases}x^2+2x+1 \le 0\\ 5x^2-15x > 0\end{cases}$ $\begin{cases}\underset{\ge 0}{(x+1)^2} \le 0\\ x(5x-15) > 0\end{cases}$ $\boxed{x=-1}$ $\Rightarrow$



$\begin{cases}x^2+2x+1 \ge 0\\ 5x^2-15x < 0\end{cases}$ $\begin{cases}(x+1)^2 \ge 0 \quad x \in R\\ x(5x-15) < 0\end{cases}$ $x \in (0;3)$

$x \in (0;3)$

На области $x \le 0$ нет решений.

$\boxed{x=-1}$

2) $0 < x \le 1$ $\begin{cases}x^2-2x+5\\ \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y - 2x = \sqrt{xy}$

ОДЗ: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0. \end{cases}\end{array}\right.$

$\cancel{x^2 \geq 0 \quad 12 \quad x^2 + 2y}$

$y - 2x - \sqrt{xy} = 0$

$y + x - \sqrt{xy} = \cancel{3x}$

$\cancel{\left(\frac{1}{2}\sqrt{y}\right)^2 \quad \frac{1}{4}y + x - \sqrt{xy} = 3,}$

$\cancel{\frac{1}{4}x + y - \sqrt{xy} - 2\frac{1}{4}x = 0.}$

$\cancel{\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^2}$

$\cancel{\left(\frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = 2{,}25x.}$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy.$

$\begin{cases} y^2 - 5xy + 4x^2 = 0. \\ x^2 + 2y = 9 \end{cases}$

$D = 25x^2 - 16x^2 = 9x^2 = (3x)^2$

$\sqrt{a^2} = |a|$

$y_1 = \frac{5x - |3x|}{2} \qquad y_1 = x$

$y_2 = \frac{5x + |3x|}{2} \qquad y_2 = 4x.$

$\begin{cases} (y-4x)(y-x) = 0 \\ x^2 + 2y = 9 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} y = 4x \\ y = x. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x^2 + 8x - 9 = 0 \\ x^2 + 2x - 9 = 0. \quad D > 0. \end{array}\right.$

$D = 4 + 36 = 40.$

$(-)\; x_1 = -9 \Rightarrow y = -36$

$(+)\; x_2 = 1 \Rightarrow y = 4$

$\cancel{7\,36-9.}$

$-36 + 18 = \sqrt{} \quad 18$

$-1 - \sqrt{10}$

$-18 = 18.$

$y = \frac{-2 - 2\sqrt{10}}{2} \qquad 81 - 72 = 9.$

$-1 + \sqrt{10}.\ (-)$

$-x = \sqrt{x^2}$

$-x = |x|$

$x < 0. \quad \boxed{y < 0}$

$\sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$

$D = 4 + 36 = 40. = (\sqrt{10})^2$

$2y + y^2 = 9. \qquad y^2 + 2y - 9 = 0. \qquad y_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{10}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{-1-\sqrt{10}}$

$-1-\sqrt{10}+2+2\sqrt{10} = \sqrt{(-1-\sqrt{10})^2} = |-1-\sqrt{10}| = \sqrt{10}+1.$

$\sqrt{10}+1$

$(\sqrt{10}+1)^2 - 2\sqrt{10} - 2 = 9.$

$10+\cancel{2\sqrt{10}}+1-\cancel{2\sqrt{10}}-2 = 9$

6.

$-|6-3x-2y| > 6-|3x|-|2y|$

$|6-3x-2y| < |3x|+|2y|-6$

$|3x|+|2y|-|6-3x-2y| > 6.$

$6-3x-2y>0.$

$3x+2y<6.$

$2y<6-3x$

$y<3-1,5x.$

$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ y<3-1,5x. \\ 3x+2y-6+3x+2y>6 \quad |:2 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ y\le 3-1,5 \\ 3x+2y-3>3 \end{cases}$ $3x+2y>6.$ $y>3-1,5x.$

Решений нет.

$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ y\geq 3-1,5x \\ \cancel{3x}+\cancel{2y}+6-\cancel{3x}-\cancel{2y}>6 \end{cases}$ $x>0;\ y>0;$

$|6-3x-2y| < |3x|+|2y|-6$

$|6-3x-2y| < 3x+2y-6.$

$\begin{cases} 6-3x-2y < 3x+2y-6 \\ 6-3x-2y > 6-3x-2y. \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$|6-3x-2y| < |3x| + |2y| - 6$

~~$x>0;\ y<0 \Rightarrow |6-3x-2y| < 3x-2y-6$~~

~~$\begin{cases} 6-3x-\cancel{2y} < 3x-\cancel{2y}-6 \\ \cancel{6}-\cancel{3x}-2y > \cancel{6}-\cancel{3x}+2y \end{cases}$~~

~~$\begin{cases} 6x>12 \\ 4y<0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>2 \\ y<0 \end{cases}$~~

$|3x| + |2y| + |6-3x-2y| > 6$

$|6-3x-2y| > 6 - |3x| - |2y|$

1) $x \geq 0;\ y \geq 0$.

$x=0;\ y=0;\quad |6| > 6.$

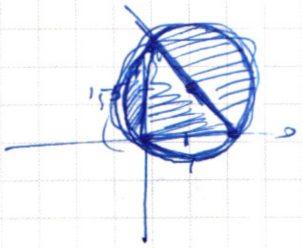
$x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0$

$(x-1)^2 - 1 + (y-1,5)^2 - 2,25 \leq 0$

$x=0. \quad |6-2y| > 6 - |2y|$

$(x-1)^2 + (y-1,5)^2 \leq 3,25$.

$15 \times 15 = 225$



$(-1)^2 + (-1,5)^2 = 1 + 2,25 = 3,25$

$x \geq 0;\ y \geq 0;$ ~~$|3x+2y|$~~

$3x + 2y + |6-3x-2y| > 6$

$(1;\ 1,5)$

$|6-3x-2y| > 6-3x-2y$

$\left[\begin{array}{l} \cancel{6-3x-2y > 6-3x-2y} \\ 6-3x-2y < 3x+2y-6 \end{array}\right.$

$6x + 4y - 12 > 0$.

$y=0;\ x=2$.

$3x + 2y - 6 > 0$

$x=0;\ y=3$

$6-3x-2y < 0$.

$2y > 6-3x$

$1 + 2,25$

$y > 3 - 1,5x \qquad y = 3 - 1,5x$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

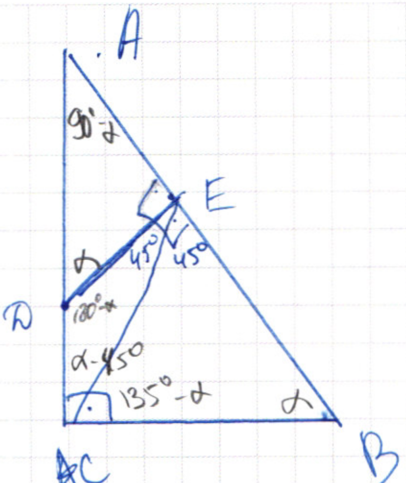
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

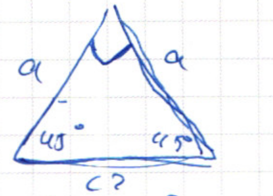
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$180° - \alpha + 45° - 45$

$AC = \sqrt{29}$

$BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$.



$a^2 + a^2 = 2a^2 = c^2$

$c = a\sqrt{2}$

$\cancel{AC^2}$

$AC^2 + BC^2 = 29 + \frac{25 \cdot 29}{4} =$

$= \frac{29 \cdot 4 + 25 \cdot 29}{4} = \frac{29 \cdot 29}{4} = AB^2$

$\angle ACE = 180° - 90° + \alpha - 135°. =$

$= \alpha - 45°.$

$AB = \frac{29}{2}$.

$\frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cancel{180° - 135° + \alpha}$

$90° - 135° + \alpha = \alpha - 45°.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

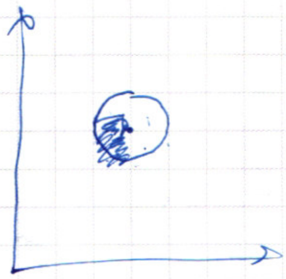
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

πR^2

$3{,}14 \cdot (\sqrt{3{,}25})^2 = 3{,}25 \cdot 3{,}14 : 2$



$x \le 0;\ y \ge 0.$

$|6-3x-2y| > 6+3x-2y.$

$\left[\begin{array}{l} 6-3x-\cancel{2y} > 6+3x-\cancel{2y} \\ 6-\cancel{3x}-2y < 2y-\cancel{3x}-6. \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 6x<0 \Rightarrow x<0. \\ 4y>12 \quad y>3. \end{array}\right.$

$\pi R^2 = 3{,}14$

$\frac{\pi R^2}{2} = 1{,}57$

$|6-3-6| > 6+3-6.$

$3 > 3$

$|6+3-4| > 6-3-4$

$5 > -1$

$x \ge 0;\ y \le 0.$

$|6-3x-2y| > 6-3x+2y.$

$\left[\begin{array}{l} \cancel{6}-\cancel{3x}-2y > \cancel{6}-3x+2y \\ 6-3x-\cancel{2y} < 3x-\cancel{2y}-6. \end{array}\right.$

$4y<0; \quad y<0.$

$\pi R^2 = \pi \cdot 4 = 12$

$6.$

$$\begin{array}{r} 3{,}25 \\ \times\ 3{,}14 \\ \hline 1300 \\ +325 \\ 975 \\ \hline 10{,}2050 \end{array}$$

$300 \cdot 300 = 90000$

☑ черновик ☐ чистовик

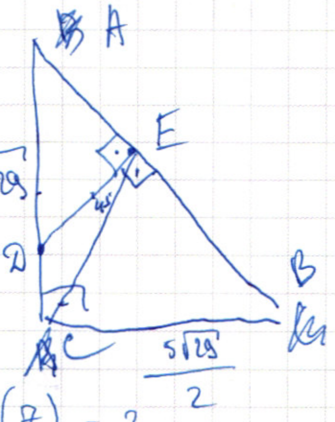
(Поставьте галочку в нужном поле)

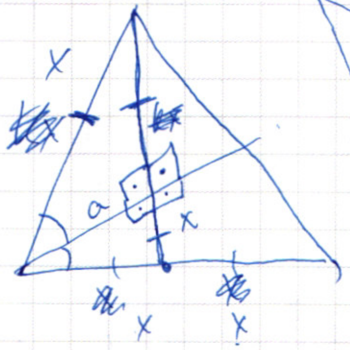
Страница №__

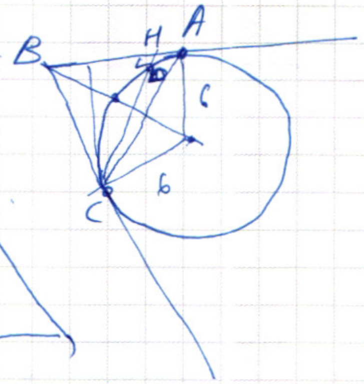
(Нумеровать только чистовики)

~~$(x-1{,}8)^2$~~ +

$(x-1)^2+(y-1{,}8)^2$







$f(3)=3$

$f(5)=5$ $f(4)$

~~$f(6)$~~ $f(7)=7.$

$f(11)=11$

$f(13)=13$

$f(17)=17.$

$f(19)=19.$

$x+x+kx+a=300$

$x(k+2)+a=300.$

~~$3x$~~ $300-3x$

$x+a\geq 2x$

$a>x$

$3x>300-x$

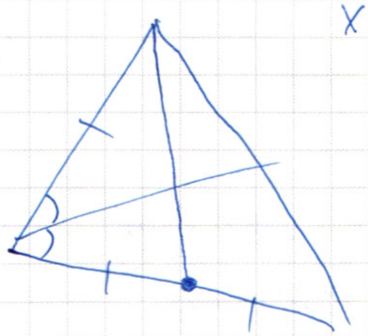
$4x>300.$

$x>75$

$\frac{x}{y}$ - простое

$x;\ 2x;\ 300-3x.$

$x;\ 2x;\ 300-3x.$



$300-3x>x$

$4x<300$

$x<75.$

~~$2x$~~ $300-3x+x>2x$

$4x<300$

$x<75.$

$3x>300-3x$

$6x>300$

$x>50.$

$\begin{cases} x<75 \\ x>50 \\ x<150. \end{cases}$

$50<x<75.$

$300-3x+2x>x$

$300-x>x$

$2x<300$

$x<150.$

$300-3x=x$

$x=75.$

$300-3x=2x$

$5x=300$

$x=60.$

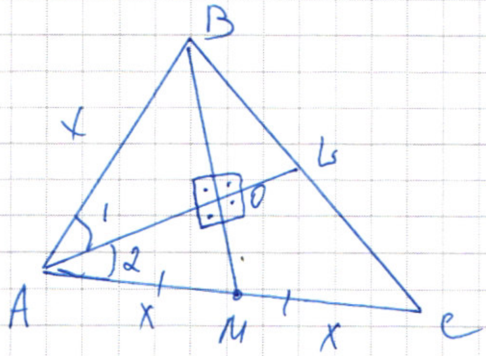
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2



ΔABC: AL – биссектр
$P = 300$. BM – медиана
$AL \cap BM = O$; $AL \perp BM$.

$\Delta ABO = \Delta AMO$ по II пр. (AO – общая, $\angle 1 = \angle 2$ по усл., $\angle BOA = \angle MOA = 90°$ по усл)

$\Rightarrow AB = AM \Rightarrow AM = MC = AB = x$.

Т.е. $AC = 2x$, $AB = x$, тогда ~~BC = 300~~

$BC = 300 - x - 2x = 300 - 3x$, т.к. $P = 300$.

Должно выполняться неравенство Δка:

$AB + AC > BC$; $AB + BC > AC$; $AC + BC > AB$

$3x > 300 - 3x$ | $300 - 2x > 2x$ | $300 - x > x$
$6x > 300$ | $4x < 300$ | $2x < 300$
$x > 50$. | $x < 75$. | $x < 150$.

$$\begin{cases} x > 50 \\ x < 75 \\ x < 150 \end{cases} \Rightarrow 50 < x < 75.$$

$x \in Z$. $\Rightarrow x = 51, 52, 53, \ldots, 74. = AB$
$2x = 102, 104, 106 \ldots, 148 = AC$
$300 - 3x = 147, 144, 141, \ldots 78 \ldots = BC$

Т.к. пересечений множества значений AB с другими сторонами нет, то ~~AB будет „уникальна“ для каждого следую~~ хотя бы одна сторона для каждого нового x уникальна $\Rightarrow$ повторений не будет

$\Rightarrow$ кол-во треугольников = кол-ву x от 51 до 74 =
$= 74 - 51 + 1 = 24$ (над вычитанием: 23)

$\boxed{\text{Ответ: } 24.}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

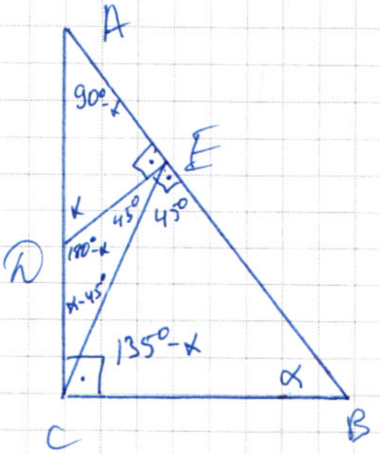
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



Дано: $\triangle ABC$.

$AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

$BC = \sqrt{29}$

$D \in AC$.

$E \in AB$;

$DE \perp AB$.

$\angle CED = 45°$.

Найти: $\frac{AD}{AC}$ и $S_{\triangle AED}$.

Решение:

1) по th Пиф: $AC^2 + BC^2 = AB^2$

$\frac{25 \cdot 29}{4} + 29 = \frac{25 \cdot 29 + 29 \cdot 4}{4} = \frac{29^2}{4} = AB^2$

$\boxed{AB = \frac{29}{2}}$

2) Пусть $\angle B = \alpha$, тогда $\angle A = 90° - \alpha$. (т.к. $\triangle ACB$ − прямоуг.)

$\angle ECB = 180° - 45° - \alpha = 135° - \alpha$ (из $\triangle ECB$)

$\angle DCB = 90° - \angle ECB = 90° - 135° + \alpha = \alpha - 45°$

$\angle CDE = 180° - 45° - \alpha + 45° = 180° - \alpha$ (из $\triangle ECD$)

$\angle ADE = 180° - \angle CDE = \alpha$ (как смежн.)

3) $\triangle AED \sim \triangle ACB$ по двум углам ($\angle ADE = \angle ABC = \alpha$, $\angle AED = \angle ACB = 90°$)

4) ~~ED~~ Из подобия: $ED = k \cdot CB = k\sqrt{29}$.

$AD = k \cdot AB = k \cdot \frac{29}{2}$

$AE = k \cdot AC = k \cdot \frac{5\sqrt{29}}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (продолжение)

Так как нам дана система, то нас интересует только пересечение множеств решений неравенств. Т.к. в III коорд. четверти ($x<0; y<0$) решений ~~второго~~ неравенства (2) нет, то её рассматривать не будем.

$|3x| + |2y| + |6-3x-2y| > 6$.

$|6-3x-2y| > 6 - |3x| - |2y|$

1) $\boxed{x \geq 0; y \geq 0}$. $|6-3x-2y| > 6-3x-2y$.

$\Downarrow$ $3x \geq 0$, $\Downarrow$ $2y \geq 0$

$\Downarrow$

~~модули раскрываются~~

$|3x| = 3x$

Воспользуемся правилом:

$|a| > b$

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} a > b \\ a < -b \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 6-3x-2y > 6-3x-2y \\ 6-3x-2y < 3x+2y-6 \end{array}\right.$ – решений нет.

$4y > 12-6x$

$y > 3-1,5x \Rightarrow$ решениями будут являться все точки, лежащие выше прямой $y = 3-1,5x$

$y = 3-1,5x$: $x = 1 \Rightarrow y = 1,5$.

$x = 2 \Rightarrow y = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = 3$. $\Rightarrow$ прямая является диаметром окружности и проходит через её точки пересечения с осями.

$\Rightarrow$ ~~решения~~ решениями системы будут являться точки круга, лежащие выше прямой

№6 (продолжение)

2) $x \geq 0; y \leq 0 \Rightarrow 3x \geq 0;\ 2y \leq 0$

$|6 - 3x - 2y| > 6 - |3x| - |2y|$

$|6 - 3x - 2y| > 6 - 3x + 2y$

$\left[\begin{array}{l} \cancel{6} - \cancel{3x} - 2y > \cancel{6} - \cancel{3x} + 2y \\ 6 - 3x - \cancel{2y} < 3x - \cancel{2y} - 6 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 4y < 0 \Rightarrow y < 0 \\ x > 2 \end{array}\right.$

Вся четверть является решениями (кроме оси x) нер-ва (1)

$\Rightarrow$ Все точки ~~окружности~~ круга, лежащие в IV четверти, являются решениями системы

3) $x \leq 0; y \geq 0 \Rightarrow 3x \leq 0;\ 2y \geq 0$

$|6 - 3x - 2y| > 6 + 3x - 2y$

$\left[\begin{array}{l} \cancel{6} - 3x - \cancel{2y} > \cancel{6} + 3x - \cancel{2y} \\ 6 - \cancel{3x} - 2y < 2y - \cancel{3x} - 6 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 6x < 0 \Rightarrow x < 0 \\ y > 3 \end{array}\right.$

вся четверть является решениями нер-ва (1) (кроме оси y)

$\Rightarrow$ Все точки круга лежащие во II четверти, являются решениями системы.

$\Rightarrow$ Решениями сис-мы являются все точки круга, не принадлежащие $\triangle ABC$.

$\Rightarrow S_{фиг.} = S_{круга} - S_{\triangle ABC} = \pi R^2 - \frac{1}{2} AC \cdot AB =$

$= 3{,}14 \cdot (\sqrt{3{,}25})^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3{,}14 \cdot 3{,}25 - 3 = 10{,}205 - 3 =$

$= 7{,}205$.

$$\begin{array}{r} 3{,}25 \\ \times\ 3{,}14 \\ \hline 1300 \\ +325 \\ 975 \\ \hline 102050 \end{array}$$

Ответ: $S = 7{,}205$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 (продолжение)

2) $\begin{cases} x\in(0;3) \\ 0<x\leq 1 \end{cases}$ $\boxed{x\in(0;1]}$ – решение на данном участке.

3) $1<x\leq 3$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-2x+5-4(x-1)\leq 0 \\ 4x^2-12x-x(x-3)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-2x+5-4(x-1)\geq 0 \\ 4x^2-12x-x(x-3)<0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-6x+9\leq 0 \\ 3x^2-9x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-6x+9\geq 0 \\ 3x^2-9x<0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-3)^2\leq 0 \\ 3x(x-3)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x-3)^2\geq 0 \\ 3x(x-3)<0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} x=R \\ x\in(0;3) \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x\in\varnothing \\ x\in(0;3) \end{array}\right.$ $x\in(0;3)$ на области $1<x\leq 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x\in(0;3) \\ 1<x\leq 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x\in(1;3)}$

Решение:

4) $x>3$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-2x+5-4(x-1)\leq 0 \\ 4x^2-12x+x(x-3)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-2x+5-4(x-1)\geq 0 \\ 4x^2-12x+x^2-3x<0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-6x+9\leq 0 \\ 5x^2-15x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-6x+9\geq 0 \\ 5x^2-15x<0 \end{cases} \end{array}\right.$

$5x(x-3$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \text{ (из прошл. п.)} \\ x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty) \text{ (из п.1)} \end{cases} \\ \begin{cases} x=R \\ x\in(0;3) \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\varnothing \\ x\in(0;3) \end{array}\right.$ $x\in(0;3)$,

на области $x>3$ решений нет.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№6

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6 & (1) \\ x^2-2x-3y+y^2\le 0. & (2) \end{cases}$$

$x^2-2x-3y+y^2\le 0$

$x^2-2x+1 \cancel{-3y} + \underbrace{y^2-3y}_{y^2-2\cdot 1{,}5y}+1{,}5^2-1-\underbrace{1{,}5^2}_{2{,}25}\le 0.$

$(x-1)^2+\cancel{(y-1)}\ (y-1{,}5)^2\le 3{,}25.$

$(x-1)^2+(y-1{,}5)^2=3{,}25.$ – окр. ~~в цен~~ с центром в т. $O'(1;1{,}5)$, с радиусом $r=\sqrt{3{,}25}$

Область удовлетворяющая неравенству будет находиться внутри этой окружности.

Найдём пересечения окружности с осями:

$x=0 \Rightarrow (-1)^2+(y-1{,}5)^2=3{,}25$

$1+(y-1{,}5)^2=3{,}25.$ $(y-1{,}5)^2=2{,}25$

$y-1{,}5=\pm1{,}5.$

$\left[\begin{array}{l} y-1{,}5=1{,}5 \Rightarrow y=3 \\ y-1{,}5=-1{,}5 \Rightarrow y=0. \end{array}\right.$

$y=0 \Rightarrow (x-1)^2+(-1{,}5)^2=3{,}25.$

~~$3{,}25-2{,}25=\ldots=(x-1)^2$~~ $(x-1)^2=\overbrace{3{,}25-2{,}25}^{1}$

~~$x-1=1{,}25$~~

$\left[\begin{array}{l} x-1=1 \\ x-1=-1. \end{array}\right.$ $x=0$ или $x=2$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 (продолжение)

1) $x \leq 0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2-2x+5+4(x-1)\leq 0 \\ 4x^2-12x+x(x-3)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-2x+5+4(x-1)\geq 0 \\ 4x^2-12x+x(x-3)<0 \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2+2x+1\leq 0 \\ 5x^2-15x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+2x+1\geq 0 \\ 5x^2-15x<0 \end{cases}\end{array}\right.$$

Квадрат числа всегда ≥ 0

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} (x+1)^2\leq 0 \Rightarrow x=-1 \quad \text{~~Квадрат всегда~~} \cancel{\geq 0} \\ 5x(x-3)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+1)^2\geq 0 \Rightarrow x\in R. \\ 5x(x-3)<0 \end{cases}\end{array}\right.$$

$5x(x-3)>0$

$+ \quad 0 \quad - \quad 3 \quad + \quad x$ $\Rightarrow x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$

$5x(x-3)<0 \Rightarrow x\in(0;3)$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=-1 \\ x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} x\in R \\ x\in(0;3) \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x\in(0;3) \end{array}\right.$$

$x\in(0;3)$, однако это не входит в область $x\leq 0$

$\Rightarrow$ Решение: $\boxed{x=-1}$

2) $0<x\leq 1$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2-2x+5+4(x-1)\leq 0 \\ 4x^2-12x-x(x-3)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x^2-12x-x(x-3)<0 \\ x^2-2x+5+4(x-1)\geq 0 \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2+2x+1\leq 0 \Rightarrow x=-1 \\ 3x^2-9x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+2x+1\geq 0 \Rightarrow x\in R. \\ 3x^2-9x<0 \end{cases}\end{array}\right.$$

(из прошл. пункта)

$3x^2-9x>0$

$3x(x-3)>0$

$+ \quad 0 \quad - \quad 3 \quad + \quad x$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=-1 \\ x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} x\in R \\ x\in(0;3) \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=-1 \text{ — не удовл. услов. } 0<x\leq 1 \\ x\in(0;3) \end{array}\right.$$

№3 (продолжение)

Проверим: 1) $x=1;\ y=4 \Rightarrow \begin{cases} 4-2=\sqrt{1\cdot4} \\ 8+1=9 \end{cases}$

$\begin{cases} 2=2 \\ 9=9 \end{cases}$ +

2) $x=-9;\ y=-36.$
По ограничению $y \geq 2x$, однако $-36<-18 \Rightarrow$ это решение не подходит.

2) $y=x \Rightarrow x^2+2x=9$

$x^2+2x-9=0$

$D=4+36=40=(\sqrt{40})^2=(2\sqrt{10})^2$

$x_1=\frac{-2+2\sqrt{10}}{2}=-1+\sqrt{10} \Rightarrow y=-1+\sqrt{10}.$

$x_2=\frac{-2-2\sqrt{10}}{2}=-1-\sqrt{10} \Rightarrow y=-1-\sqrt{10}.$

1) $y=x=-1+\underbrace{\sqrt{10}}_{>3}>0$

$y \geq 2x$; но $\underset{\approx 2}{-1+\sqrt{10}} < \underset{\approx 4}{-2+2\sqrt{10}}$

$\Rightarrow$ корень не подходит.

2) $y=x=-1-\sqrt{10}.$

$\begin{cases} -1-\sqrt{10}+2+2\sqrt{10}=\sqrt{(-1-\sqrt{10})^2} = |-1-\sqrt{10}| \\ -2-2\sqrt{10}+(-1-\sqrt{10})^2=9 \end{cases}$ $\begin{cases} 1+\sqrt{10}=1+\sqrt{10} \\ -2-\cancel{2\sqrt{10}}+1+\cancel{2\sqrt{10}}+10=9 \end{cases}$

верно.

~~Ответ~~ $\Rightarrow$ Решение: $x=1;\ y=4$, т.е. $(1;4)$

$x=y=-1-\sqrt{10}$, т.е. $(-1-\sqrt{10};-1-\sqrt{10})$

$\boxed{\text{Ответ: } (x;y):\ (1;4) \text{ и } (-1-\sqrt{10};-1-\sqrt{10})}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\le 0.$$

Так как дробь должна быть неположительна, то числитель и знаменатель - разных знаков. (полож. или отриц.)

$\Rightarrow$ Можем перейти к совокупности:

При этом знаменатель не равен 0.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-2x+5-4|x-1|\le 0\\ 4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|>0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-2x+5-4|x-1|\ge 0\\ 4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Рассмотрим 4 участка: 1) $x\le 0 \Rightarrow$ все ~~модули~~ подмодульные выраж. <0 $\Rightarrow$ раскрываются модули с минусом.

2) $0<x\le 1 \Rightarrow$ $|x|$ - с плюсом.
$|x-1|$ и $|x-3|$ - с минусом.

3) $1<x\le 3 \Rightarrow$ $|x|$ и $|x-1|$ - с плюсом.
$|x-3|$ - с минусом

4) $3<x \Rightarrow$ все с плюсом.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№1 (продолжение)

1) $x = -1$
2) $x \in (0; 1]$
3) $x \in (1; 3)$
4) $x \in \varnothing$

В объединении: $x \in (0; 3) \cup \{-1\}$

$\boxed{\text{Ответ: } x \in (0; 3) \cup \{-1\}}$

№3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

Ограничения: $xy \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$\sqrt{xy} \geq 0$ (т.к. корень неотрицателен)

$\Rightarrow y - 2x \geq 0 \Rightarrow y \geq 2x$

$y - 2x = \sqrt{xy}$.

Т.к. обе части должны быть неотрицательны, то можем возвести в квадрат.

$(y - 2x)^2 = xy$.

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy$.

$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$ Решим как квадр. ур-ние относительно y.

$D = (-5x)^2 - 16x^2 = 9x^2 = (3x)^2$

$y_{1,2} = \dfrac{5x \pm \sqrt{9x^2}}{2} = \dfrac{5x \pm |3x|}{2}$ Так как рядом с модулем стоит $\pm$, то независимо от того, как раскроется модуль (с „$-$" или „$+$"), будет два корня:

$y_1 = \dfrac{5x + 3x}{2} = 4x$

$y_2 = \dfrac{5x - 3x}{2} = x$

1) $y = 4x$; $2y + x^2 = 9$

$x^2 + 8x - 9 = 0$ $D = 8^2 + 9 \cdot 4$

По th Виета: 1) $x_1 = 1 \Rightarrow y = 4$

2) $x_2 = -9 \Rightarrow y = -36$.