МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 18$, $1\leqslant y\leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

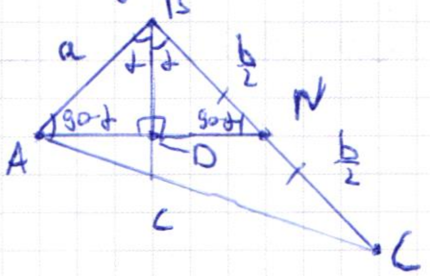
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} = \frac{(x-3)^2-2|x-3|+1}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|} = \frac{(|x-3|-1)^2}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|} \le 0$

Так как знаменатель любой дроби не должен равняться нулю, то выражение равно нулю только когда $(|x-3|-1)^2=0$, то есть $x=2;4$. Так как $(|x-3|-1)^2$ и $|x|\cdot|x-2| \geq 0$, то есть $2x(x-2)<0$, ведь оно не может быть равно нулю, ведь тогда знаменатель обратится в ноль. Решая $2x(x-2)<0$, находим, что $x\in(0;2)$. Так как $x\neq 2$, то окончательный ответ: $x\in(0;2)$ и четыре.

№2. Пусть a, b, c стороны треугольника, биссектриса



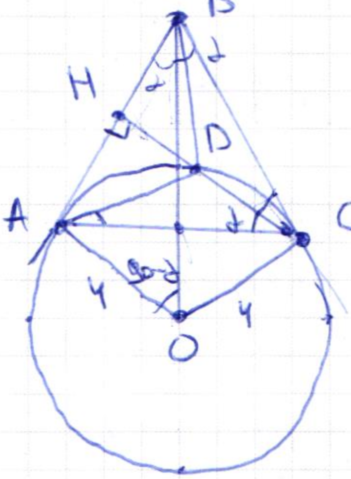
проведена к стороне „c", а медиана к стороне „b". Пусть A, B, C вершины треугольника, а D точка пересечения медианы и биссектрисы.

Так как $\angle ABD=\angle CBD$, а $\angle ADB=\angle NDB$, то $\Delta ABD=\Delta NDB$, соответственно $a=\frac{b}{2}$. То есть $a+b+c=\frac{3b}{2}+c=600$, где $b,c\in\mathbb{Z}$. Согласно неравенству треугольника $b+\frac{b}{2}>c$ и $\frac{b}{2}+c>b$. Умножая уравнение на 2, получим: $3b+2c=1200$. Из этого следует, что „b" должно делиться на 2, а „c" делиться на 3. Пусть $b=2k$, а $c=3m$. Тогда: $6k+6m=1200 \Rightarrow k+m=200$. Зная, что $3k>3m>k$ (по неравенству треугольника) находим, что пары решений

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№2. начинаются с $(k;m)=(149;51)$ до $(101;99)$ согласно вышеуказанной области допустимых значений. То есть, всего $149-101+1=49$ решений. Ответ: 49 треугольников.

№4



§ Площадь $\Delta ABD=\frac{AB\cdot HD}{2}=6 \Rightarrow AB=\frac{12}{HD}$
Пусть $\angle BCA=\alpha$, тогда $\angle BAC=90-\alpha$, тогда $\angle BC\mathbf{D}(BCD)=90-2\alpha$, (т.к. ΔABC равнобедренный). Так как BC касательная, то $\angle OCB=90°$. Так как $AB=BC$ и $AO=OC$, то ABCO это „кайт", то есть BO и AC перпендикулярны, то есть $\angle CBO=\alpha=\angle OBA$. То есть $\Delta ACH\sim\Delta ABO$. Так как AH касательная, то $AH^2=HD\cdot CH$. По подобию:

$\frac{CH}{AB}=\frac{AH}{4} \Rightarrow \frac{12}{HD\cdot CH}=\frac{4}{AH} \Rightarrow \frac{12}{AH^2}=\frac{4}{AH} \Rightarrow AH=3$. То есть

$\frac{CH}{AB}=\frac{3}{4}$. Ответ: $\frac{3}{4}=CH:AB$ (ABCO вписанный 4-ёхугольник)

№3. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases} \Rightarrow$ $x^2-4yx+4y^2=xy$

$x^2-5xy+4y^2=0$

$(x-y)(x-4y)=0$

1) $x=y$ 2) $x=4y$

1) При 1-ом случае $y^2+y-5=0 \Rightarrow y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}=\frac{-1-\sqrt{21}}{2};\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

2) При 2-ом случае $y^2+4y-5=0 \Rightarrow y=-5;1$

При 1-ом случае ~~решений нет, ведь~~ подставляя $x=y$ в первое уравнение, получим $-y=|y|$, то есть $y<0$, а значит подходит только первый корень. То же

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

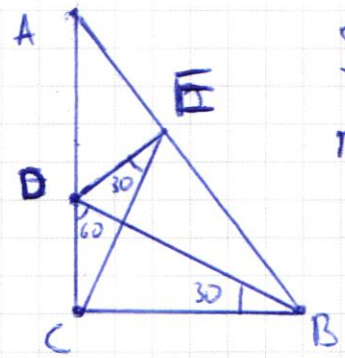
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3
самое (~~и во втором случае. Ответ: 1)~~ $\cancel{x=y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}}$

2) $\cancel{x=4y,\ y=-5,\ x=-20}$) и во втором случае; подставляя в первое уравнение, получим $x-2y=2y=2|y|$, то есть $y>0$. То есть нам подходит только положительный корень.

Ответ: 1) $x=y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$ 2) $y=1$; $x=4$

№5



Так как $\angle DEB=\angle DCB=90°$, то четырёхугольник DEBC вписанный, а значит $\angle DEC=\angle DBC=30°$, то есть $\triangle DBC$ с углами $30°; 60°; 90°$.

Значит, $DC=\frac{BC}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$. А значит $AD=AC-CD=\sqrt{7}-\frac{2\sqrt{7}}{3}=\frac{\sqrt{7}}{3}$.

То есть $\frac{AD}{AC}=\frac{\sqrt{7}}{3}:\sqrt{7}=\frac{1}{3}$. Очевидно, что $\triangle AED \sim \triangle ABC$.

Тогда: $\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{AE}{\sqrt{7}}=\frac{DE\cdot\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{1}{\sqrt{21}}$. (AB находим по теореме Пифагора). То есть $AE=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $DE=\frac{2}{3}$.

Площадь $\triangle AED=\frac{AE\cdot ED}{2}=\frac{2}{2\cdot 3\sqrt{3}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$

Ответ: $AD:DC=\frac{1}{3}$; Площадь $\triangle AED=\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№6. Первое неравенство имеет смысл если:

1) $x \in (2; +\infty)$; $y \in (4-2x; 0)$ 2) если $y > 4$. Но если находить дискриминант 2-ого неравенства через „x", то: $(y-(1+\sqrt{2}))\cdot(y-(1-\sqrt{2})) \geq 0$, то есть $y \in [1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}]$.

Значит 2-ой случай неверен.

8 $f(ab)=f(a)+f(b)$ $f(p)=p$ ~~3+4+4+4~~ $10+8+3=\boxed{21}$

$\frac{(|x-3|-1)^2}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|} \le 0$ $|x-3|=1$ $2;4=x$ $x\in(0;2)$ и 4.

$3a>$ $\frac{3b}{2}>c$ $c>\frac{b}{2}$ $\frac{3}{4}$

$c+\frac{b}{2}>b$

$\frac{3b}{2}>c$ $c>\frac{b}{2}$ $3b+2c=600$

$b=2k$ $c=3m$ $6k+6m=1200$ $k+m=200$

$\boxed{3k>3m>k}$ $k+$ $101;99$ - $199;1$ $150;50$ 150

$k>m;\ m>\frac{k}{3}$ ~~$149-101$~~ $y=x$

y

$$\begin{cases}|2x|+|y|+|4-2x-y|>4\\ x^2-2x-4y+y^2\le 0\end{cases}$$

$2x-y+4-2x-y>4$

$2x+y+4-2x-y>4$ $\varnothing$ $4-2y>4$

$-2x-8y-4+2x+2y>4$ $\boxed{1)\ x>2}$

~~$2x+y$~~ $2x-y-4+2x+y>4$ $4x>8$

$|2x|$ $\begin{cases}2x>0\\ y\le 0\\ 4-2x-y<0\end{cases}$ $\begin{matrix}x>0\\ y\le 0\end{matrix}$ $2x+y>4$ $y>4-2x$ $\boxed{\begin{matrix}y\in(4-2x;0)\\ x\in(0;+\infty)\end{matrix}}$

$a>b$

$y-2x-4+2x+y>4$ 2 2 $-x\ge 0$

$\boxed{2)\ y>4}$ $x^2-2x-4y+y^2\le 0$ $x\le 0$ $(x-a)(x-b)\le 0$

$4-4y^2+8y=-4(y^2-2y+1)$ $x^2-2x-4y+y^2\le 0$ b a

$4+4=8$ $4-4y^2+8y=-4(y^2-2y+1)\ge 0$

$y^2-2y-1\le 0$ $1-\sqrt{2}$ 0 $1+\sqrt{2}$ $x\in[b;a]$

$y=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$

$(y-(1+\sqrt{2}))(y-(1-\sqrt{2}))\le 0$ $y\in[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}]$ $y\in(1-\sqrt{2};0)$

$2-\sqrt{2}$ $2+\sqrt{2}$ $y\in 1-\sqrt{2}$ $x\in($

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

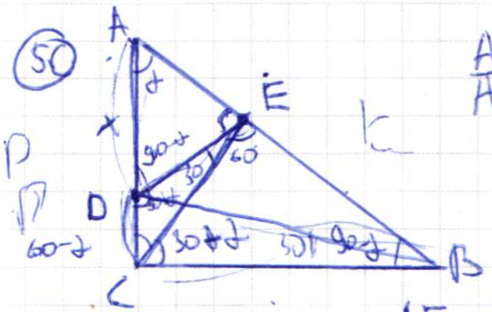
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

50



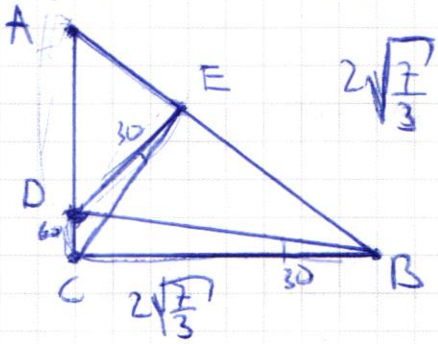
$\frac{AD}{AC}$ S(AED) $AB=\frac{7}{\sqrt{2}}$ $\boxed{AB=\frac{7}{\sqrt{3}}}$

$\boxed{AC=\sqrt{7} \quad BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}}$ $21+28=\frac{49}{3}$

$7 \cdot \frac{28}{3}$ $\frac{7}{\sqrt{3}}$

$\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$

150-α 30+α



$2\sqrt{\frac{7}{3}}$ $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ $\frac{\sqrt{7}-\frac{2\sqrt{7}}{3}}{\sqrt{7}}=\boxed{\frac{1}{3}}$

$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}$ $\frac{AE}{\sqrt{7}}=\frac{DE\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{3}:\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{21}}$

$\frac{AE}{1}=\frac{DE}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}$ $AE=\frac{2}{\sqrt{3}}$ $DE=\frac{4}{\sqrt{3}}$ $\frac{8}{3\cdot 2}=\boxed{\frac{4}{3}}$

$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=$ | $\frac{AE}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}DE}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{3}:\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{21}}$

7 $AE=\sqrt{7}\frac{1}{\sqrt{3}}$ $DE=\frac{2}{3}$

$\boxed{\frac{1}{3\sqrt{3}}}$ $7+\frac{28}{3}$ $\frac{21+28}{3}=4$

~~Путин - хороший человек~~

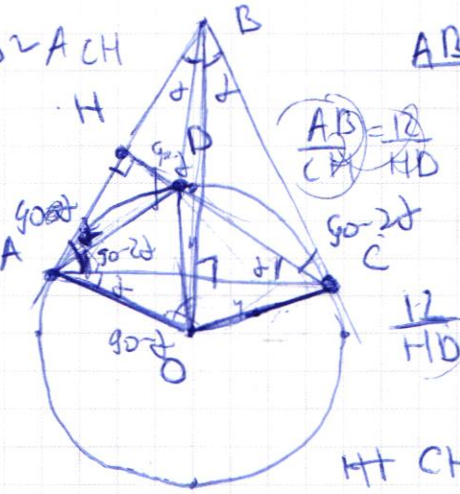
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

AHD ~ ACH



$\frac{AB \cdot DH}{2} = 6$ $HD \cdot CH = AH^2$

$\frac{AB}{CH} = \frac{12}{HD}$ $OD = 4$ $AB = \frac{12}{HD}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{HD}{AH} = \frac{AH}{HC}$ $AH = 3$

$\frac{12}{HD}$ $\frac{AB}{CH} = \frac{4}{AH} =$ $\frac{12}{HD \cdot CH} = \frac{4}{AH}$

$4AH = 12$

$CH = \frac{3}{HD}$ $HD \cdot CH = 3$ $\frac{12}{HD}$ $\frac{3}{HD}$

$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$ $x^2 - 4xy + 4y^2 = xy$ $x^2 - 3xy - 4x = -20$

$\begin{cases} x^2 - 3xy + 4y^2 = 0 \\ 4x + 4y^2 = 20 \end{cases}$ $x^2 - 3xy - 4x + 20 = 0$

34 1) $x = 0$

$x = x - 2x$ 0

1) $x - 2x = -x$

$\begin{cases} a^2 - 2b = ab \\ a^2 + b^4 = 5 \end{cases}$ $b^4 + 2b = 5 - ab$ $a = \frac{5 - b^4 - 2b}{b}$

$ab = 5 - b^4 - 2b$

$\left(\frac{5 - b^4 - 2b}{b}\right)^2 + b^4 = 5$ 25 $25 + b^8 + 4b^2 - 10b^4 + 4b^5 - 20b + b^6 = 5b^2$

$b^8 + b^6 - b^2 - 10b^4 + 4b^5 - 20b + 25 = 0$

~~$x^2 - 3xy$~~ $x^2 - 3xy - 4x + 20 = 0$ $b^8 + b^6 + 4b^5 - 10b^4 - b^2 - 20b + 25 = 0$

$a^4 - 3a^2b^2 - 4a^2 + 20 = 0$ $b^8 - 10b^4 + 25 +$ $x - x =$

$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$ $2x + y^2 - 2y = \sqrt{xy} + 5$ $y^2 + y - 5 = 0$

$y^2 - 2y + 2x - \sqrt{xy} - 5 = 0$ y^2

y^2 x $x^2 -$ $y^2 + y - 5 = 0$

$x^2 - xy$ $1 + 4 - 5 = 0$

$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy$ $x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$ 21

~~$9y^2 - 16y^2 = 0$~~ $\frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$

$25y^2 - 16y^2 = 9y^2$

$\frac{5y \pm 3y}{2} = y; 4y$ $16 + 4 - 5 =$

$36 = 6$

$\frac{-4 \pm 6}{2} = \boxed{-5; 1}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

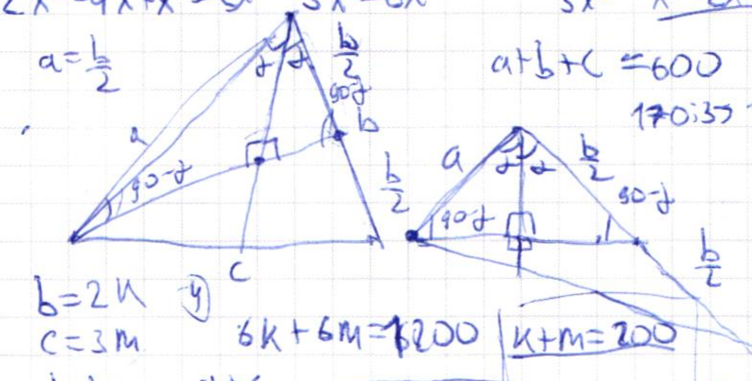
1. $\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \le 0$ $\quad \frac{(x-3)^2+1-2|x-3|}{x^2+x^2-4x+4} = \frac{(|x-3|-1)^2}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|} \le 0$ $\quad 4-2=2$

$2x(x-2)\quad 2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|$

$2x^2-4x\le 0 \quad x(x-2)\le 0$ $\quad \boxed{x\in[0;2]}$

1) $\frac{(x-4)^2}{2x^2-4x+x^2-2x} \le 0 \quad \frac{(x-4)^2}{3x^2-6x} \le 0 \quad \frac{(x-4)^2}{3x^2} \ge 0 \quad x^2-2x\le 0$

2. $a=\frac{b}{2}$ $\quad a+b+c=600 \quad a,b,c\in\mathbb{Z}$ $\quad a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$



$170:3 \quad 120:3<40 \quad 150:3=50$

$\frac{3b}{2}+c=600 \quad 3b+2c=1200$

$b=\frac{1200-2c}{3}$

$b=2k$, $c=3m$ $\quad 6k+6m=1200 \quad \boxed{k+m=200}$

$k+3m>2k$ $\quad b+\frac{b}{2}>c \quad \frac{3b}{2}>c$, $\frac{b}{2}+c>b \quad c>\frac{b}{2}$ $\quad \boxed{3k>3m>k} \quad k>m>\frac{k}{3}$

30; 170 $\quad$ 40 160 $\quad$ 50 150 $\quad$ 1 199

~~150; 50~~ 151; 49

51 149 $\quad$ 149; 51 $\quad$ 101; 99 $\quad$ 101; 102 — 149

$\boxed{149-101+1=44}$

$\frac{1}{-2+1}=-1$ $\quad \boxed{x=4}$ $\quad x(x-2)<0 \quad x<0$

$(x-3)^2-2|x-3|+1=\frac{(|x-3|-1)^2}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|}\le 0$ $\quad x\in(0;2)\cup 4$

150 50 $\quad$ 149; 101 51

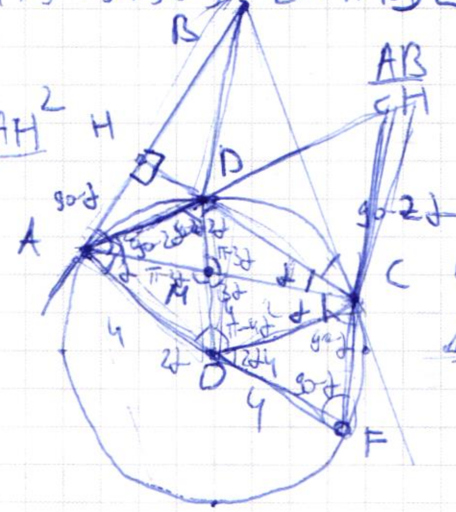
$3+4+4+5+5+5+5 \quad 20+11=31 \quad \boxed{21}$

12; 40 $\quad$ 16; 40 $\quad$ 14; 00 $\quad$ 22; 40 $\quad$ 16; 40

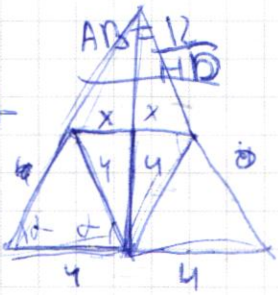
4.

$HD\cdot CH=AH^2$

$AD=CF$



$\frac{AB}{CH}$ $\quad S(ABD)=6 \quad \frac{AB\cdot HD}{2}=6$ $\quad AB=\frac{12}{HD}$



$x-2y= \quad 2y=14$