МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leq 0$$

$$\frac{x^2-6x+9+1-2|x-3|}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|}\leq 0$$

$$\frac{(x-3)^2-2|x-3|+1}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|}\leq 0$$

$$\begin{cases}(|x-3|-1)^2(2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|)\leq 0\\ 2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(|x-3|-1)^2\leq 0\\ 2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|>0\end{cases}\\ \begin{cases}(|x-3|-1)^2\geq 0\\ 2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|<0\end{cases}\end{array}\right.\\ x\neq 0\\ x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l} x=4\ (1)\\ \begin{cases}x\in(-\infty;+\infty)\ (2)\\ 2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|<0\ (3)\end{cases}\end{array}\right.\\ x\neq 0\\ x\neq 2\end{cases}$$

(3): $2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|<0$

$x\leq 0$: $2x(x-2)+x(x-2)<0$

$3x(x-2)<0$

$0<x<2$, след $x\in\varnothing$

$0<x<2$: $2x(x-2)-x(x-2)<0$

$x(x-2)<0$

$0<x<2$

$2<x$: $2x(x-2)+x(x-2)<0$

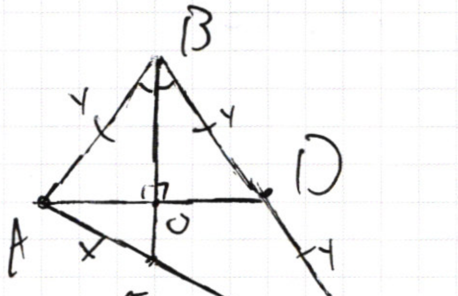
$3x(x-2)<0$

$0<x<2$, $x\in\varnothing$, Итого:

$$\left[\begin{array}{l} x=4 \\ \begin{cases} x\in(-\infty;+\infty) \\ x\in(0;2) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(0;2)\cup\{4\}$$

Ответ: $x\in(0;2)\cup\{4\}$

(2)



$\triangle ABD$ - р/б, т.к. $BO\perp AD$ - выс, а ещё и бисс, - это след. $AB=BD$,

AD - медиана, сл. $BD=DC$,

след. $AB=BD=DC=y$

По св-ву бисс. треуг: $\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{BD+DC}=\frac{1}{2}$, сл.

~~AE~~ $AE=\frac{EC}{2}=x$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$P = 600 = AB + BC + AC = 3y + 3x$. По неравенствам треугольника:

$$\begin{cases} AB + BC > AC \\ AC + BC > AB \\ AB + AC > BC \end{cases}$$ или

$$\begin{cases} 3y > 3x \\ 3x + 2y > y \\ y + 3x > 2y \end{cases} \Rightarrow 3x > y > x$$

$3y + 3x = 600$, след. $y + x = 200$, след.

$y = 200 - x$

$3x > 200 - x > x$

$4x > 200 > 2x$

$2x > 100 > x$, след.

$$\begin{cases} 2x > 100 \\ 100 > x \end{cases} \Rightarrow 100 > x > 50$$

след. $300 > 3x > 150$

Аналогично $x = 200 - y$, след.

$300 > 600 - 3y > 150$

$300 < 3y < 450$

$100 < y < 150$

$200 < 2y < 300$

Всего целочисленного вариантов — 149

Ответ: 149

3

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} & (1) \\ x = 5 - y^2 & (2) \end{cases}$$

Подставляем (2) в (1):

$$5 - y^2 - 2y = \sqrt{5y - y^3}$$

$$((5-y^2) - 2y)^2 = \sqrt{5y-y^3}$$

$$(5-y^2)^2 - 4y(5-y^2) + 4y^2 = 5y - y^3$$

$$25 - 10y^2 + y^4 - 20y + 4y^3 + 4y^2 = 5y - y^3$$

$$y^4 + 5y^3 - 6y^2 - 25y + 25 = 0$$

Ищем целые корни: 0 – „ –

1 – „ +, след одна из корней – 1

Делим на $y-1$ ($y-1=0$, $y=1$)

$$\begin{array}{l|l}
y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0 & :(y-1) \\
-\underline{y^4-y^3} & \overline{y^3+6y^2-25} \\
\quad 6y^3-6y^2 & \\
\quad -\underline{6y^3-6y^2} & \\
\qquad -25y+25 & \\
\qquad -\underline{-25y+25} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

, сл

$(y-1)(y^3+6y^2-25)=0$ Ищем дальше:

2 – „ –	–1 – „ –
3 – „ –	–2 – „ –
4 – „ –	–3 – „ –
5 – „ –	–4 – „ –
6 – „ –	–5 – „ +
7 – „ –	
8 „ –	
9 – „ –	
10 – „ –	

След. делим на $y+5$ ($y+5=0$; $y=-5$)

$$\begin{array}{l|l}
y^3+6y^2-25 & (y+5) \\
-\underline{y^3+5y^2} & \overline{y^2+y-5} \\
\quad y^2 & \\
\quad -\underline{y^2+5y} & \\
\qquad -5y-25 & \\
\qquad -\underline{-5y-25} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

, сл

$$(y-1)(y+5)(y^2+y-5)=0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y^2+y-5=0$ Находим $D=1^2 - 4\cdot(-5)=$
$=21$

След. $y_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

Ищем теперь x:

$x=5-y^2$; $y=1$, $x=5-1^2=4$

$y=5$; $x=5-5^2=-20$

$y=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$; $x=5-\left(\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)^2=5-\left(\dfrac{1-2\sqrt{21}+21}{4}\right)=$

$=\dfrac{20-22+2\sqrt{21}}{4}=\dfrac{-2+2\sqrt{21}}{4}=$

$=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$

$y=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$; $x=5-\left(\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)^2=5-\left(\dfrac{1+2\sqrt{21}+21}{4}\right)=$

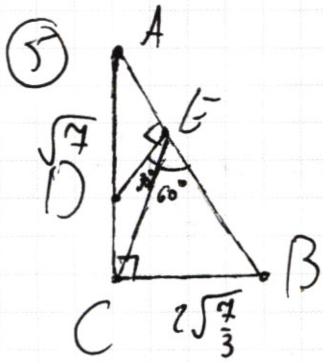
$=\dfrac{20-22-2\sqrt{21}}{4}=\dfrac{-2-2\sqrt{21}}{4}=$

$=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$

Ответ: $(4;1)$; $(-20;5)$; $\left(\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}; \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$

$$\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)$$

5



∢ $AE \perp ED$, след $\angle AED = 90°$,

$\angle AED + \angle DEC + \angle CEB = 180°$

$\angle CEB = 180° - \angle DEC - \angle AED = 180° - 90° - 30° = 60°$

$\angle DEB + \angle DCB = 180°$ $(90° + 90°)$, след

∢ $DEBC$ – впис. в окр., след.

ω – одна для $\triangle ECB$ и $\triangle CDE$,

след. по теор. синусов

для $\triangle ECB$ и $\triangle ECD$

$2R \cdot \sin\angle CEB = CB$

$2R \cdot \sin\angle DEC = DC$

$$\frac{CB}{DC} = \frac{\sin\angle CEB}{\sin\angle DEC} = \frac{\sin 60°}{\sin 30°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$DC = \frac{CB}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{7}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{7}$$

след. $AD = AC - \cancel{AC}\,DC = \sqrt{7} - \frac{2}{3}\sqrt{7} = \frac{\sqrt{7}}{3}$,

след. $\frac{AD}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{3}$

$\left.\begin{array}{l}\angle A \text{ – общ.}\\ \angle AED = \angle ACB = 90°\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ACB$ – по 2-м углам

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{ED}{CB}$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~AB~~ По т. Пифагора для $\triangle ABC$:

$AB^2 = AC^2 + CB^2 = \sqrt{7}^2 + \left(2\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)^2 = 7 + \frac{4\cdot 7}{3} = \frac{77}{3} = \frac{49}{3}$

След. $AB = \frac{7}{\sqrt{3}}$, след. $\frac{AD}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{\frac{7}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{7} = \frac{1}{\sqrt{21}}$

~~$AE = \frac{1}{\sqrt{21}}$~~

$AE = AC \cdot \frac{1}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{21}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cancel{A}ED = CB \cdot \frac{1}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$

След. площ. $\triangle AED$ $\quad S = \frac{AE\cdot ED}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

Ответ: $\frac{1}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{9}$

(7) ~~Я~~ Распишем все знач. $f(x)$, где $1 \le x \le 18$:

$f(1) = f(1) + f(1)$

$f(1) = 2f(1) = \cancel{0}$, след. $f(1) = 0$

$f(2) = 2$

$f(3) = 3$

$f(4) = f(2) + f(2) = 4$

$f(5) = 5$

$f(6) = f(2) + f(3) = 5$

$f(7)=7$

$f(8)=f(2)+\cancel{f(2)+f(2)}=f(4)=f(2)+f(2)+f(2)=6$

$f(9)=f(3)+f(3)=6$

$f(10)=f(2)+f(5)=7$

$f(11)=\cancel{7}\,11$

$f(12)=f(2)+f(6)=f(2)+f(2)+f(3)=7$

$f(13)=13$

$f(14)=f(2)+f(7)=9$

$f(15)=f(3)+f(5)=8$

$f(16)=f(4)+f(4)=f(2)+f(2)+f(2)+f(2)=8$

$f(17)=17$

$f(18)=f(2)+f(9)=f(2)+f(3)+f(3)=8$

Аналогично для $f(y)$, где $1\le y\le 18$

$f(x/y)<0$, $f(x/y)=f(x\cdot\frac{1}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})<0$

$f(1)=0=f(\frac{1}{2}\cdot 2)=f(\frac{1}{3}\cdot 3)$ и т.д., т.к.

$f(1)=f(\frac{1}{a}\cdot a)=f(\frac{1}{a})+f(a)=0$, т.к.

$f(\frac{1}{a})=-f(a)$, след.

$\cancel{f(x)\ldots}$ $f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)<0$,

след. найдём все пары, где

$f(x)<f(y)$

$f(x)=\{0;2;3;4;5;6;7;8;9;11;13;17\}$

$1\le x\le 18$

Аналог. $f(y)$

Запишем кол-во пар для каждого $f(x)$

0 - 17
2 - 16
3 - 15
4 - 14
5 - 12
6 - 10
7 - 7
8 - 4
9 - 3
11 - 2
13 - 1

Итого: 101

Ответ: 101.

☐ черновик ☑ чистовик Страница №8

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

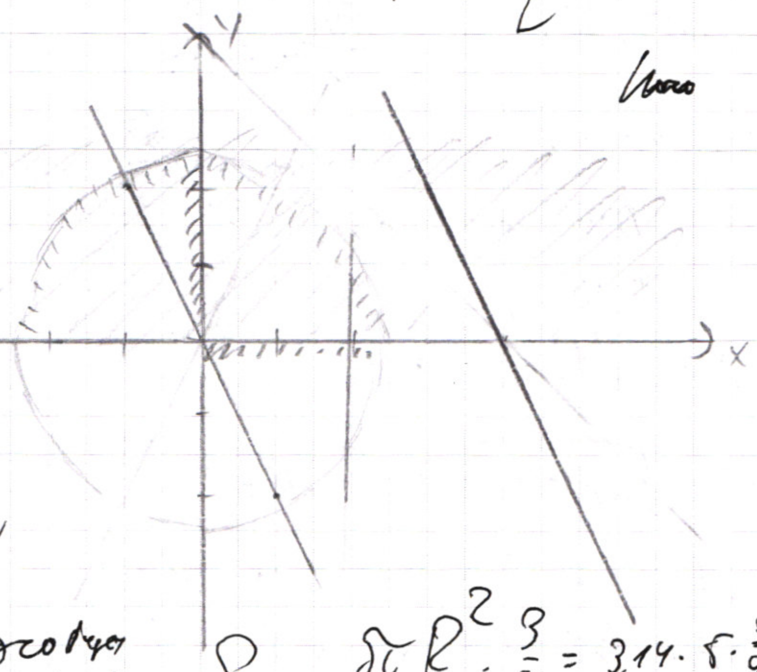
6) $\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4 \\ x^2-2x-4y+y^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4 \\ x^2-2x+1+y^2-4y+4\le 5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |2x|+|y|+|4-(2x+y)|>4 \\ (x-1)^2+(y-2)^2\le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |4-(2x+y)|>4-(|2x|+|y|) \\ (x-1)^2+(y-2)^2\le 5 \end{cases}$

Построим границы: $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

$|4-(2x+y)|=4-(|2x|+|y|)$

$\left[\begin{array}{l} 4-(2x+y)=4-(|2x|+|y|) \\ 4-(2x+y)=(|2x|+|y|)-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+y=|2x|+|y| \quad (1) \\ 2x+y=8-|2x|-|y| \end{array}\right.$



След. не совпад. при всех очевидно полож. x и y,

след. только при отриц. и это будет т.к. тогда $4-(2x+y)=4-(2x+y)$ и снова совпад. неверны - не надо нам, т.к. $|4-(2x+y)|>4-(|2x|+|y|)$

$S=\pi R^2\cdot\frac{3}{4}=3{,}14\cdot 5\cdot\frac{3}{4}\approx 12$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

(1): $2x+y=|2x|+|y|$

$2x+y-|y|=|2x|$

$$\left[\begin{array}{l}2x=2x+y-|y|\\2x=|y|-2x-y\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}|y|=y\\4x=|y|-y\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y\geq 0\\ y=4x+y\\ y=-4x-y\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y\geq 0\\ x=0\\ y=-2x\end{array}\right.$$

(2) $2x+y=8-|2x|-|y|$

$|2x|=8-2x-y-|y|$

$$\left[\begin{array}{l}2x=8-2x-y-|y|\\2x=2x+y+|y|-8\end{array}\right.$$

Ответ: 12. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ $\frac{...\sqrt{6}}{4}$

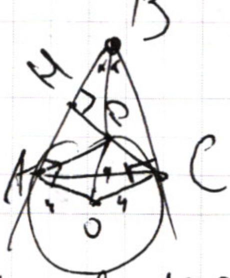
$$\left[\begin{array}{l}4x=8-y-|y|\\8=y+|y|\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|y|=8-4x-y\\ |y|=8-y\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=8-4x-y\\ y=4x+y-8\\ y=8-y\\ \cancel{y=y-8}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=-2x+4\\ x=2\\ y=4\end{array}\right.$$

(4)



ABC - р/б, AB=BC по св-ву кас. выч. альт.

$S_{ABC}=CH\cdot AB$, след. $\frac{CH}{HD}=$

$S_{AHD}=HD\cdot AB$ $=\frac{\sqrt{24}}{4}=\frac{2\sqrt{6}}{4}=$

AO=OC=р-с в т. кас. $=\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\triangle AOB=\triangle BOC$ - по 2м и углу.
(OB - общ),

Ответ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

HD=2, AB=3, след.

$BO=\sqrt{AB^2+AO^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$,

след. OD - тоже радиус, след. OD=4

$DB=BO-OD=5-4=1$, HD=2, след. $BH=\sqrt{BD^2-HD^2}=\sqrt{1^2-4^2}=i\sqrt{15}$ ст

$CH=\sqrt{BC^2-HB^2}=\sqrt{3^2+15}=\sqrt{24}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №10
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$

$x^2-4xy+4y^2=xy$

$x+y^2=5$

$x^2+4y^2=5xy$

$x+y^2=5$

4) $f(x/y)=$
$=f(x\cdot\frac{1}{y})=$
$=f(x)+f(\frac{1}{y})$

$f(1)=f(1)+f(1)$, a $f(1)=0$

$f(2)=2$

$f(8)=3$

$f(4)=f(2)+f(2)=$
$=4$

$f(5)=5$

$f(6)=f(2)+f(3)=$
$=5$

$5-y^2-2y=\sqrt{5y-y^3}$

$((5-y^2)-2y)^2=5y-y^3$

$(5-y^2)^2-4y(5-y^2)+4y^2=5y-y^3$

$25-10y^2+y^4-20y+4y^3+4y^2=5y-y^3$

$x^2-4y=5xy-20$

$x^2-4x+20=5xy$

$-4x+20=4y^2$

$y^2=5-x$

$x=5-y^2$

$f(2\cdot\frac{1}{2})=f(2)+f(\frac{1}{2})=$
$=0$

$25-6y^2+y^4-25y+5y^3=0$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0 \quad |:(y-1)$

$x=5-1=4$

$x=5-25=-20$

$x=5-\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)^2=$
$=5-\frac{1+2\sqrt{21}+21}{4}=$
$=\frac{20-22-2\sqrt{21}}{4}=$
$=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$

$x=5-\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)^2=$
$=5-\frac{1-2\sqrt{21}+21}{4}=$
$=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

$$\begin{array}{l|l} y^4+5y^3-6y^2-25y+25 & y-1 \\ \hline -\,y^4-y^3 & y^3+6y^2-25 \\ 6y^3-6y^2 & \\ -\,6y^3-6y^2 & \\ 0-25y+25 & \\ -\,-25y+25 & \\ 0 & \end{array}$$

$y^3+6y^2-25=0 \quad |:(y+5)$

$$\begin{array}{l|l} y^3+6y^2-25 & y+5 \\ \hline -\,y^3+5y^2 & y^2+y-5 \\ y^2 & \\ -\,y^2+5y & \\ -5y-25 & \\ -\,-5y-25 & \\ 0 & \end{array}$$

$y^2+y-5=0$

$D=1+20 \quad y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

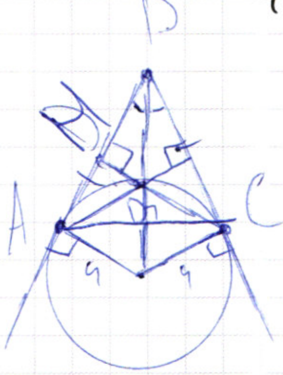
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

$y-2x-y>0$

$y>2x+y$



$$\frac{x^2-6x+9+1-2|x-3|}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

$$\frac{(x-3)^2-2|x-3|+1}{2x^2-4x+|x||x-2|}\le 0$$

$$\underbrace{(|x-3|-1)^2}_{\ge 0}\left(2x(x-2)+|x||x-2|\right)\le 0$$

$2x(x-2)+|x||x-2|\le 0$

$2x(x-2)\le -|x||x-2|$

$2x(2-x)\ge |x||x-2|$

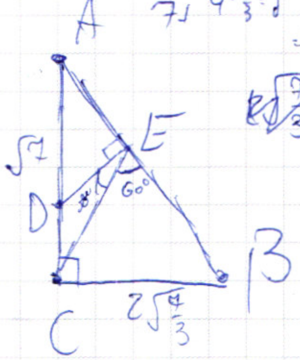
~~$4x^2(2-x)^2\ge x^2(x-2)^2$~~

~~$4x^2(2-x)^2-x^2(2-x)^2\ge 0$~~

~~$3x^2(2-x)^2\ge 0$~~

~~$x^2(2-x)^2\ge 0$~~

~~$x\in(-\infty;+\infty)$~~



$7 = 4\cdot\frac{7}{3} = \sqrt{7+\frac{49}{3}} = \sqrt{\frac{7\cdot 7}{3}} = \frac{7}{\sqrt3}$

$2\sqrt{\frac{7}{3}}$ CB

$2R\cdot\sin\angle CEB = CB$

$2R\cdot\frac{\sqrt3}{2} = 2\frac{\sqrt7}{\sqrt3}$

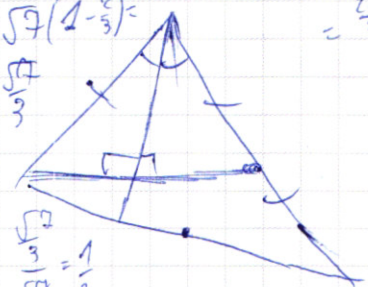
$R=\frac{2\sqrt7}{3}$

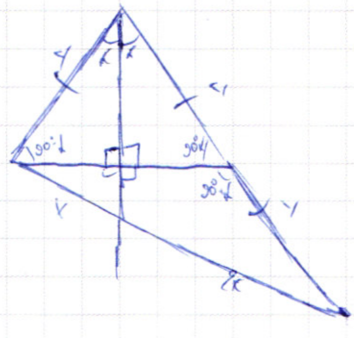
~~$2x(2-x)\ge x(x-2)$~~

~~$2x(2-x)\ge -x(2-x)$~~

$DC = 2R\cdot\sin 30° = \frac{4\sqrt7}{3}\cdot\frac12 = \frac{2\sqrt7}{3}$

$AD = \sqrt7-\frac{2\sqrt7}{3} = \sqrt7\left(1-\frac23\right) = \frac{\sqrt7}{3}$





$\frac{AP}{AC} = \frac{\frac{\sqrt7}{3}}{\sqrt7} = \frac13$

149

$3x+3y=600$

$x+y=200$ $\quad y=200-x$

$3x>3y$

$y>x$

$3x+y>2y$

$3x>y$

$2y+3x>y$

$3x>-y$

$3x>y>x$

$3x>200-x>x$

$4x>200>2x$

$300>3x>150$

$300>600-3x>150$

$$\begin{cases}300>600-3x\\150<600-3x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x>300\\3x<450\end{cases}\Leftrightarrow 450>3x>300$$

$$\begin{cases}2x>100\\100>x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>50\\100>x\end{cases}\Leftrightarrow 100>x>50$$

$2x>100>x$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1) $\dfrac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leq 0$

$\dfrac{x^2-6x+9+1-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leq 0$

$\dfrac{(x-3)^2-2|x-3|+1}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|}\leq 0$

$\begin{cases}(|x-3|-1)^2(2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|)\leq 0\\ 2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|\neq 0\end{cases}$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(|x-3|-1)^2\leq 0\\ 2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}(|x-3|-1)^2\geq 0\\ 2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|\leq 0\end{cases}\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\in\{\ldots 4\}\ (1)\\ \end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-\infty;+\infty)\ (2)\\ 2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|\leq 0\ (3)\end{cases}\end{array}\right.$

(3): $2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|\leq 0$

$x<0$: $2x(x-2)+x(x-2)\leq 0$

$3x(x-2)\leq 0$

$0\leq x\leq 2$, але $x\in\varnothing$

$0<x<2$: $2x(x-2)-x(x-2)\leq 0$

$x(x-2)\leq 0$

$0\leq x\leq 2$

☑ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$2<x$: $2x(x-2)+x(x-2)\leq 0$

$3x(x-2)<0$

$0<x<2$, $x\in\varnothing$, Итого:

$$\left[\begin{array}{l} x\in\{4\} \\ \begin{cases} x\in(-\infty;+\infty) \\ x\in(0;2) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(0;2)\cup\{4\}$$

Ответ: $x\in(0;2)\cup\{4\}$

2

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)