# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 9 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром $O$ касается прямых $AB$ и $BC$ в точках $A$ и $C$ соответственно. Высота $CH$ треугольника $ABC$ пересекает эту окружность в точках $C$ и $D$. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника $ABD$ равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике $ABC$ на катете $AC$ и гипотенузе $AB$ отмечены точки $D$ и $E$ соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника $AED$, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа $p$. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(\mathbb{Q}^+) \to \mathbb{Q}^+$ $\qquad f(x) = f(x \cdot 1) =$

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\qquad = f(x) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$\forall p$ – простое $\quad f(p) = p.$

$\# (x, y): \quad 1 \le x \le 18;\ 1 \le y \le 18; \quad f(x/y) < 0.$

$\cancel{f(x/y)}\quad f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\cancel{= f(x) + f(\ )} \quad = \underbrace{f(x) - f(y)}$

$\cancel{f(y) \cdot f(\frac{1}{y})}\ 0 = f\left(y \cdot \frac{1}{y}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{m}{n}\right) = \boxed{f(m) - f(n)}$

$\#^?\ f(x) < f(y) \qquad 1 \le x, y \le 18 \qquad f(p) = p.$

$f(2) = 2 \qquad f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) + f(2) = 4$

$f(3) = 3 \qquad f(6) = f(2 \cdot 3) = f(2) + f(3) = 5$

$f(5) = 5 \qquad f(8) = f(\cancel{4}\cancel{3} \cdot 2) = f(4) + f(2) = 6$

$f(7) = 7$

$f(11) = 11 \qquad f(9) = 6 \qquad f(14) = 9 \qquad f(18) = 8$

$f(13) = 13 \qquad f(10) = 7 \qquad f(15) = 8$

$f(17) = 17 \qquad f(12) = 9 \qquad f(16) = 8$

$44 + 21 = 63 \qquad 62 + 75 + 6 = 68 + 75 = 143.$

$63 + 12 = 75$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases} \to \begin{cases} (x-2y)^2 = xy \\ x-2y \geq 0 \end{cases} \to \begin{matrix} x^2-5xy+4y^2=0 \\ (x-4y)(x-y)=0 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix} x=y \ (1) \\ x=4y \ (2) \end{matrix}\right.$$

(1) $x-2y=-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$, $y \leq 0$

$x+y^2 = x+x^2=5$; $x^2+x-5=0$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+20}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$; $x\leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2} \\ y=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{cases}$

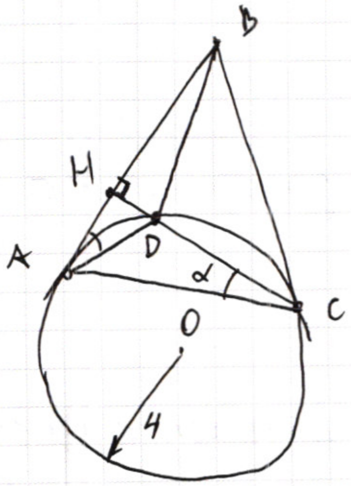
(2) $x-2y=4y-2y=2y\geq 0 \Rightarrow x, y \geq 0$.

$x+y^2 = 4y+y^2=5$; $y^2+4y-5=(y+5)(y-1)=0$

$\begin{cases} \left[\begin{matrix} y=-5 \\ y=1 \end{matrix}\right. \\ y\geq 0 \end{cases} \Rightarrow y=1;\ x=4.$

Ответ: $\left\{(4;1);\ \left(\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2};\ \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)\right\}$.

Задача 4.




$\angle BAD=\alpha$; т. о хорде и кас. $\angle ACD=\angle BAD=\alpha$

$S_{ABD}=\dfrac{AB\cdot AD}{2}\cdot \sin\alpha =$

$=\dfrac{AB\cdot\sin\alpha}{2}\cdot\underbrace{2\cdot 4\cdot\sin\alpha}_{AD\text{ — т. синусов }\triangle ADC} =$

$=4AB\sin^2\alpha=6.$

$\angle BAC=90°-\alpha=\angle ACB$ ($\triangle ABC$ р/б, т.к. $AB=BC$ как кас из 1 точки)

$\angle ABC=2\alpha \Rightarrow \angle ABO=\alpha$ ($BO$ — сер. пер. $AC$)

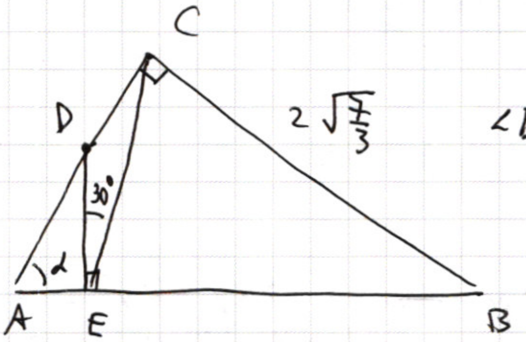
$\triangle ABO$: $AB=AO\,ctg\,\alpha=4\,ctg\,\alpha$.

$4\cdot 4\,ctg\,\alpha\cdot\sin^2\alpha=16\sin\alpha\cos\alpha=6 \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{3}{8}$

$\triangle BHC$: $CH=BC\sin 2\alpha=2BC\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot BC\cdot\dfrac{3}{8}=\dfrac{3}{4}BC$

$\dfrac{AB}{CH}=\dfrac{BC}{CH}=\dfrac{4}{3}$. Ответ: $4:3$.

Задача 5. По условию $\angle DEB + \angle DCB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ EDCB – вписан.




$\angle DEC = \angle DBC = 30^\circ$

$\triangle DCB$: ~~пр~~

$DC = BC\,tg\,30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

$AD = AC - DC = \sqrt{7} - \frac{2\sqrt{7}}{3} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{7}/3}{\sqrt{7}} = 1:3$

Пусть $\angle CAB = \alpha$. $\triangle ACB$: $\frac{BC}{AC} = tg\,\alpha = \frac{2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\sin\alpha = \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{2/\sqrt{3}}{\sqrt{1+\frac{4}{3}}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$; $\cos\alpha = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

$S_{ADE} = \frac{AD \cdot AE \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{AD \cdot (AD\cos\alpha) \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{AD^2 \sin\alpha\cos\alpha}{2}$

$= \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

Ответ: $AD : AC = 1:3$; $S_{AED} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Задача 6.

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4 \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \le 0 \end{cases} \rightarrow (x^2-2x+1) + (y^2-4y+4) \le 5$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 \le 5 \\ |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4 \end{cases}$$

~~Значит~~ По св-ву модуля (модуль суммы ≤ сумма модулей): $|2x| + |y| + |4-2x-y| \ge |2x+y+(4-2x-y)| = |4| = 4$. Равенство достигается, когда ~~sign~~ $sign(2x) = sign(y) = sign(4-2x-y)$. (*)

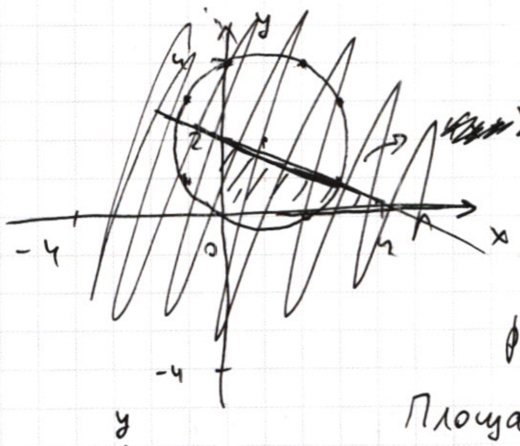
# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6. Продолжение.

Тогда график $|2x|+|y|+|4-2x-y|>4$ есть вся плоскость, за исключением графика $|2x|+|y|+|4-2x-y|=4$ (*).

По (*) имеем
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x\ge 0\\ y\ge 0\\ 4-2x-y\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0\\ 4-2x-y\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}2x<0\\ y<0\\ 4-2x-y<0\end{cases} \to \text{несовместно.}\end{array}\right.$$

Изобразим $S$ на $Oxy$. Это внутренняя часть (вместе с границами) $\Delta$ с коорд. $(0,0)$; $(0,4)$; $(2,0)$.

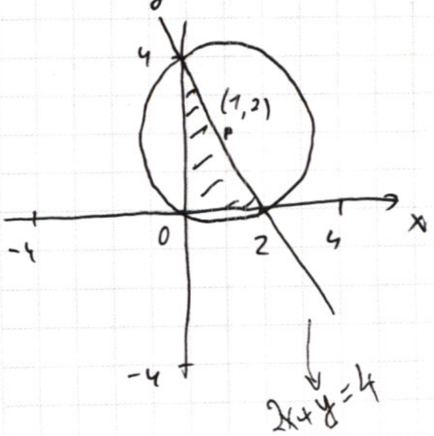


$(x-1)^2+(y-2)^2\le 5$ есть круг с центром $(1,2)$ и радиусом $\sqrt5$.

Площадь закр. $\Delta$ равна $\frac{4\cdot 2}{2}=4$.

Площадь круга равна $\pi\cdot(\sqrt5)^2=5\pi$.

Тогда площадь искомой фигуры равна $5\pi-4$ (весь $\Delta$ содержится в круге).




Ответ: $5\pi-4$.

Задача 7. $f(x) = f(x \cdot 1) = f(x) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$x \in \mathbb{Q}^+$ $\quad 0 = f(1) = f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x}) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\frac{1}{x}) = -f(x).$

$f(\frac{x}{y}) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) - f(y).$

$x, y \in \mathbb{N}$

Восстановим знач $f(x)$

$x \in [1; 18] \rightarrow$

$f(1) = 0$
$f(2) = 2$
$f(3) = 3$
$f(4) = f(2 \cdot 2) = 4$
$f(5) = 5$
$f(6) = f(2 \cdot 3) = 5$
$f(7) = 7$
$f(8) = f(2 \cdot 4) = 6$
$f(9) = f(3 \cdot 3) = 6$
$f(10) = f(2 \cdot 5) = 7$
$f(11) = 11$
$f(12) = f(4 \cdot 3) = 7$
$f(13) = 13$
$f(14) = f(2 \cdot 7) = 9$
$f(15) = f(3 \cdot 5) = 8$
$f(16) = f(2 \cdot 8) = 8$
$f(17) = 17$
$f(18) = f(2 \cdot 9) = 8$

Требуется найти $\#\ (x, y)$:

$1 \le x, y \le 18$
$x, y \in \mathbb{N}$ ; $f(x) < f(y)$, $x \ne y$.

Из таблицы знач видно:

$x = 1: \ \#y = 17$
$x = 2: \ \#y = 16$
$x = 3: \ \#y = 15$
$x = 4: \ \#y = 14$
$x = 5, 6: \ \#y = 12$
$x = 8, 9: \ \#y = 10$
$x = 7, 10, 12: \ \#y = 7$
$x = 15, 16, 18: \ \#y = 4$
$x = 14: \ \#y = 3$
$x = 11: \ \#y = 2$
$x = 13: \ \#y = 1$
$x = 17: \ \#y = 0$

$\sum = 1 \cdot 17 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 15 + 1 \cdot 14 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 4 +$
$+ 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = \underbrace{17 + 16 + 15 + 14} + \underbrace{24 + 20 + 21 + 12} + \underbrace{3 + 2 + 1} = 62 + 77 + 6 = 145$

Ответ: 145.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

$$0 \geq \frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} = \frac{(x-3)^2-2|x-3|+1}{2x(x-2)+|x(x-2)|}$$

$$= \frac{(|x-3|-1)^2}{2x(x-2)+|x(x-2)|}; \quad (|x-3|-1)^2 \geq 0$$

1) $(|x-3|-1)^2=0;\quad |x-3|-1=0 \quad \left[\begin{array}{l} x-3=1 \\ 3-x=1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2 \end{array}\right.$ (не подх.)

При $x=2$ знаменатель обращается в 0, при $x=4$ знаменатель равен $24 \neq 0$.

Тогда $x=4$ подходит, $x=2$ не подх.

2) $(|x-3|-1)^2>0 \Rightarrow 2x(x-2)+|x(x-2)| \leq 0.$

2.1) $x(x-2)>0$, тогда $2x(x-2)+|x(x-2)| = 3x(x-2)>0$, не подх.

2.2) $x(x-2) \leq 0 \iff x \in [0;2]$;

$2x(x-2)+|x(x-2)| = -2|x(x-2)|+|x(x-2)| = -|x(x-2)| \leq 0.$ $x=2, 0$ не подх. (так как $x=0$ – корень знаменателя) $\Rightarrow x \in (0;2)$.

Ответ: $x \in (0;2) \cup \{4\}$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)



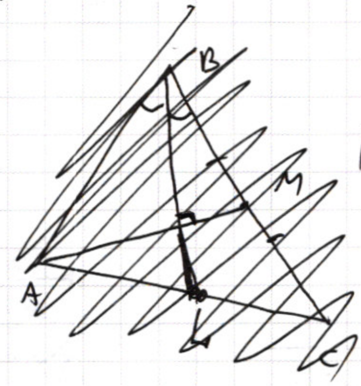
(Нумеровать только чистовики)

Задача 2. $\triangle ABC$ – искомый $\triangle$ с периметром 600;

$AM$ – медиана;

$BL$ – биссектриса;

$AM \perp BL$.



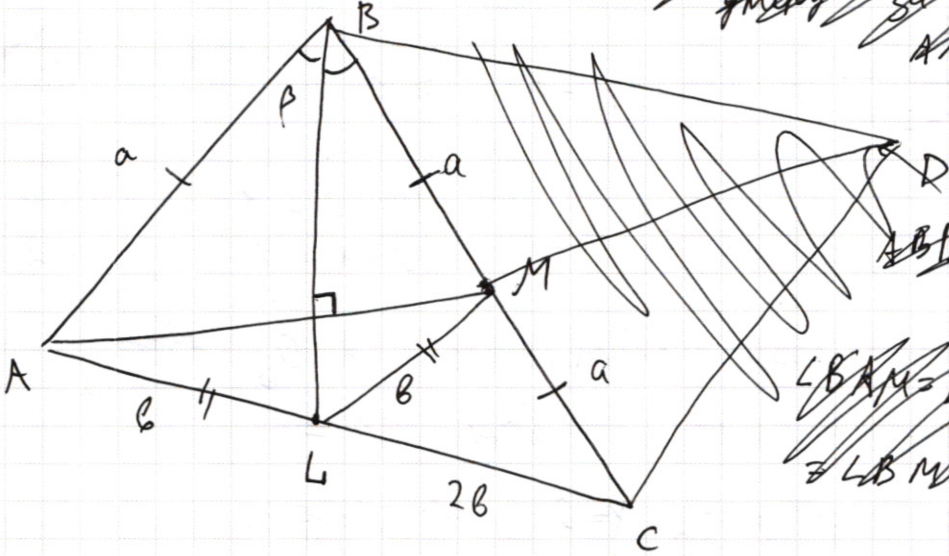
Пусть $\angle ABC = 2\beta$

$\angle ABL = \beta$

$\angle BAM = 90^\circ - \beta$

Очевидно, что мед. и бис. проведены из разн. верш. иначе угол между ними меньше половины угла при вершине $\triangle$, т.е. $< 90^\circ$.

~~Продлим мед. AM на свою длину за т. M: AM=MD~~



~~ABDC – параллелограмм.~~

~~$\angle BAM = \angle CDM = 90^\circ - \beta = \angle BM$~~

$\triangle ABM$: $BL$ – высота и бис $\Rightarrow$ он р/б

$AB = BM$. Тогда $BL$ – сер. пер. к $AM$.

$AL = LM$.

Пусть $AB = a$, тогда $BM = MC = a$;

Пусть $AL = LM = b$.

св. бис: $\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{LC} = \frac{1}{2} \Rightarrow LC = 2b$.

Усл: $a + 2a + 3b = 600 \Rightarrow a + b = 200$.

Нер. $\triangle$: $2a < a + 3b$; $3b < 3a \Leftrightarrow b < a < 3b$. (*)

Заметим, что $\forall a, b$, удовл. (*), $\exists\ \triangle$, подходящий под условие.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2. Продолжение.

Имеем $\begin{cases} a+b=200 \\ b<a<3b \end{cases}$ $\Rightarrow$ $50<b<100 \Leftrightarrow 51\le b\le 99$.

$a, b \in \mathbb{N}$. Тогда # таких $b$ равно 49.

Для каждого такого $b$ стороны $\Delta$ равны $3b$, $200-b$, $400-2b$; $b\in[51;99]$.

~~Проверим когда~~

Выясним, могут ли для $b\ne c$, $b, c\in[51;99]$ совпадать тройки $[3b;\ 200-b;\ 400-2b]$ и $[3c;\ 200-c;\ 400-2c]$.

1) $\begin{cases} 3b=200-c \\ 200-b=400-2c \\ 400-2b=3c \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3b=400-2c \\ 200-b=3c \\ 400-2b=200-c \end{cases}$

других вар. нет, так как при них $b=c$.

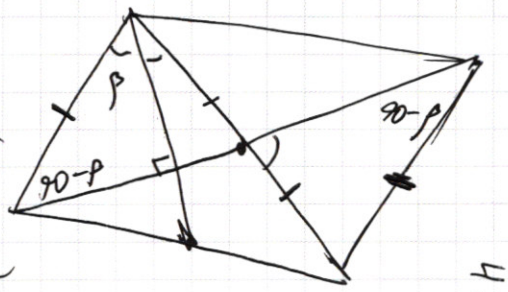
1) $c=200-3b$;
$200-b=400-400+6b$
$b=\frac{200}{7}$ ⊗

2) $b=200-3c$;
$400-400+6c=200-c$
$c=\frac{200}{7}$ ⊗.

Итак, тройки для разных $b, c$ не совпадают $\Rightarrow$
$\#\Delta = \#$ троек $=\#b = 99-51+1=49$.

Ответ: 49.

$2x+y$



$x^2-4xy+4y^2=xy$

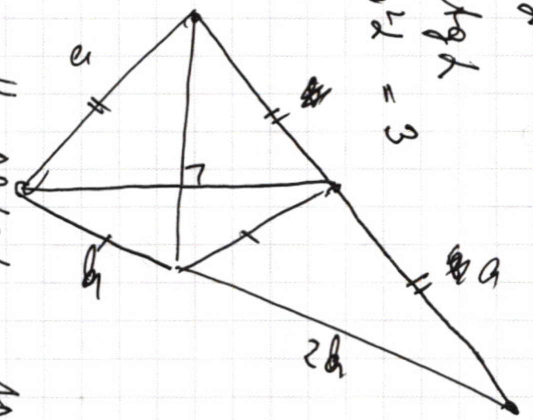
$x^2-5xy+4y^2=0$

$\frac{BC}{CH}=\frac{1}{\sin 2\alpha}$

$BC=0{,}5\operatorname{ctg}\alpha$

$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\sin^2\alpha=3$

$\sqrt{1-\frac{4}{7}}=\sqrt{\frac{3}{7}}$



$3b,\ 200-b,\ 2(200-b)$

$3c,\ 200-c,\ 2(200-c)$

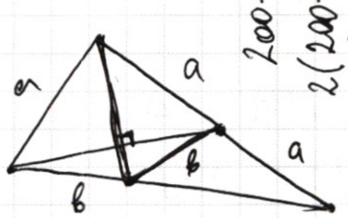
$200-b=3c$

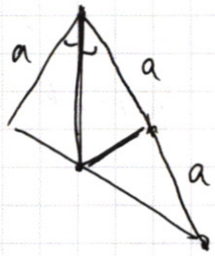
$2(200-b)=200-c$

$AB=4 \Leftarrow AB\operatorname{tg}\alpha=4$

$\frac{4\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$16\sin\alpha\cos\alpha=6$





$x^2+x-5=0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2+4\cdot 5}}{2}=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$

$\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)^2-\frac{1+\sqrt{21}}{2}=\frac{1+2\sqrt{21}+21}{4}-\frac{1+\sqrt{21}}{2}=\frac{11}{2}+\frac{\sqrt{21}}{2}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{21}}{2}=5$

$a+b=200.$

$2a<a+3b$

$3b<3a$

$a<3b$

$b<a$

$b<a<3b.$

$f(b)=\{3b,\ 200-b,\ 400-2b\}=f(c)$

$\{3c,\ 200-c,\ 2(200-c)\}$

$a+b=200$

$a<3b \Rightarrow 4b>50$

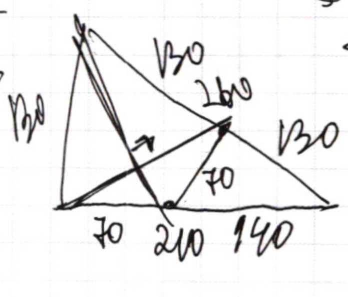
$b>50;\quad a<150$

$100>b>50 \Rightarrow 49$

$\frac{600-210}{3}=130$

$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{2/\sqrt{3}}{\sqrt{1+\frac{4}{3}}}=\boxed{\frac{2}{\sqrt{7}}}$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}$



$51\le b\le 99$

$\boxed{49}$

$\boxed{a,\ 3b,\ 2a}$

$3b;\ 200-b;\ 400-2b$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)