МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED=45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

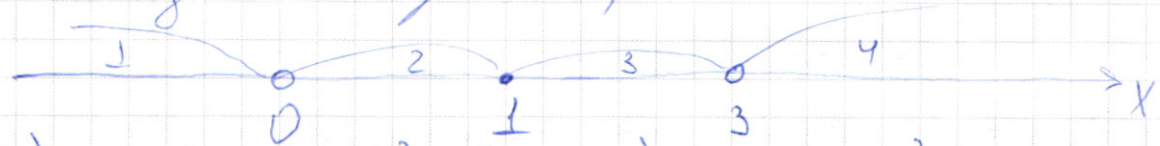
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x||x-3|}\le 0$ $\quad\frac{x^2-2x+1+4-4|x-1|}{4x(x-3)+\underbrace{|x||x-3|}_{|x(x-3)|}}\le 0$

$\frac{(x-1)^2+4(1-|x-1|)}{4x(x-3)+|x(x-3)|}\le 0$ ОДЗ: $x\ne 0$ и $x\ne 3$, т.к. в этих точках знаменатель равен 0;



1) $x<0$ $\quad\frac{(x-1)^2+4(\cancel{1}+x\cancel{-1})}{4(x-3)x+x(x-3)}\le 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{5(x-3)x}\le 0$

Числитель и знаменатель $>0 \Rightarrow$ ~~это~~ и дробь $>0 \Rightarrow$ нет корней на этом промежутке, кроме точки $x=-1$, в которой равенство 0;

2) $0<x\le 1$

$\frac{(x-1)^2+4(\cancel{1}+x\cancel{-1})}{4(x-3)x-x(x-3)}\le 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{3x(x-3)}\le 0$

Числитель >0, знаменатель $<0 \Rightarrow$ дробь $<0 \Rightarrow 0<x\le 1$ - решение

3) $1<x<3$

$\frac{(x-1)^2+4(1-x+1)}{4(x-3)x-x(x-3)}\le 0 \Rightarrow \frac{x^2-2x+1+8-4x}{3(x-3)x}=\frac{(x-3)^2}{3(x-3)x}\le 0$

Числитель >0, знаменатель $<0 \Rightarrow$ дробь $<0 \Rightarrow 1<x<3$ - решение

4) $x>3$

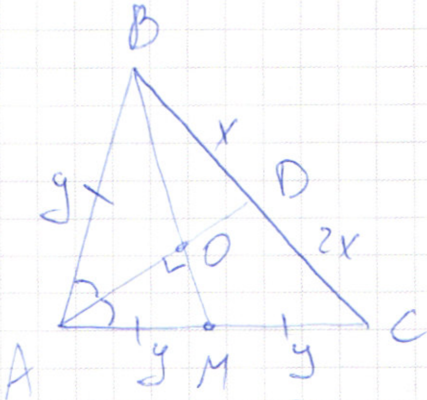
$\frac{(x-1)^2+4(1-x+1)}{4(x-3)x+x(x-3)}=\frac{(x-3)^2}{5(x-3)x}\le 0$

Числитель и знаменатель $>0 \Rightarrow$ дробь $>0 \Rightarrow$ нет корней на этом промежутке;

$x=-1$ и $0<x<3$; Ответ: $x=-1$ и $x\in(0;3)$;

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№2.



BM – ~~ход~~ медиана $\triangle ABC$, AD – бис $\triangle ABC$

и $AD \perp BM$ в точке O;

Тогда в $\triangle ABM$ AO – бис и выс =>

=> $\triangle ABM$ – равнобед => $AB=AM=MC$;

По свойству бис. $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$ =>

=> Если $BD=x$, то $DC=2x$; $AB=y=AM=MC$;

$P = 3y+3x=300 \Rightarrow x+y=100$;

По нер-ву $\triangle$: $y+2y > 3x$ и $\cancel{3}y+3x>2y \Rightarrow y>x$ и $3x>y$

~~$x=100-y \Rightarrow y>100-y$ и $300-3y>y$~~ =>

=> ~~$2y>100$~~ и $y=100-x \Rightarrow 100-x>x$ и $3x>100-x$

=> $100>2x$ и $4x>100 \Rightarrow 25<x<50$, тогда

$x = 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43,$

$44, 45, 46, 47, 48, 49$; Если $x=40$, то $AC=BC$ => 2 бис $\perp$ мед.

Всего 23 различных знач => 23 $\triangle$; Ответ: 23;

№3

1) $\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy} \geq 0 \end{cases}$ ~~$y-\sqrt{x}\sqrt{y}-2x=0$~~ ~~$y-\sqrt{xy}$~~ $y \geq 2x$

2) $\begin{cases} 2y+x^2=9 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2-4yx+4x^2=xy \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2-5xy+4x^2=0 \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$ $\begin{cases} (y-4x)(y-x)=0 \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=4x \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \\ \begin{cases} y=x \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \end{array}\right.$ $y \geq 2x$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=4x \\ x^2+8x-9=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+2x-9=0 \\ y=x \end{cases} \end{array}\right.$ $y \geq 2x$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=4x \\ (x+9)(x-1)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{-2\pm\sqrt{4+36}}{2} \\ y=x \end{cases} \end{array}\right.$ $y \geq 2x$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=-36 \\ x=-9 \end{cases} \\ \begin{cases} y=4 \\ x=1 \end{cases} \\ x=y=\frac{-2-\sqrt{40}}{2} \\ x=y=\frac{-2+\sqrt{40}}{2} \end{array}\right.$

$x=-9$ $y=-36$: $-36 \geq 2\cdot(-9)$ – не верно;

$x=1$ $y=4$: $4 \geq 2$ – верно;

$x=y=-1-\sqrt{10}$: $-1-\sqrt{10} \geq -2-2\sqrt{10}$ – верно

$x=y=-1+\sqrt{10}$: $-1+\sqrt{10} \geq -2+2\sqrt{10}$ – не верно

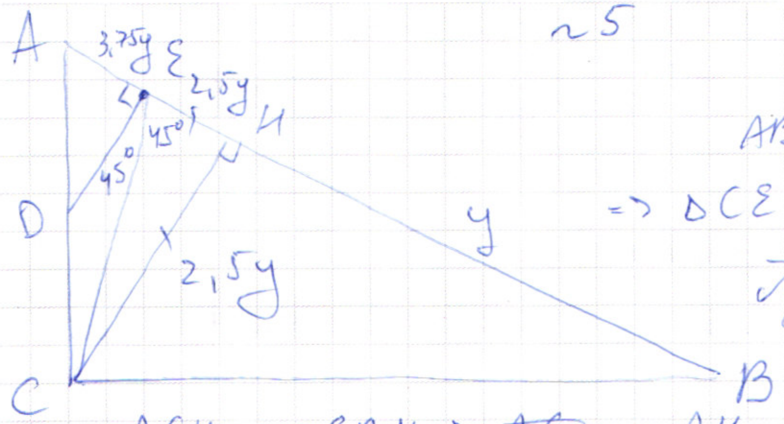
Тогда $x=1$ $y=4$

$x=y=-1-\sqrt{10}$

Ответ: $(1;4)$, $(-1-\sqrt{10}; -1-\sqrt{10})$;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



Опустим высоту из т. C на AB, получим т. H; Тогда $\angle CEH = 45^\circ$;

$\Rightarrow \Delta CEH$ - равнобед $\Rightarrow EH = CH$;

Пусть $x = \sqrt{29}$, тогда $AC = \cancel{7}\,2{,}5x$ и $BC = \cancel{2{,}5}\,x$;

$\Delta ACH \sim \Delta CBH \Rightarrow \frac{AC}{\cancel{CH}} = \frac{AH}{CH} = \frac{CH}{HB} = \frac{AC}{CB} = \cancel{\frac{7}{2{,}5}}\,2{,}5$;

Пусть ~~$AH = y \Rightarrow CH = 2{,}8y$~~ $HB = y$, то $CH = 2{,}5y$ и $AH = 6{,}25y \rightarrow AE = AH - EH = AH - CH = 6{,}25y - 2{,}5y = 3{,}75y$

$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AH} = \frac{3{,}75y}{6{,}25y} = \cancel{\frac{3}{7}} = \cancel{\frac{15}{19}} = \frac{3}{5}$; (По теореме Фалеса)

$\frac{DE}{CH} = \frac{AE}{AH} = \frac{3}{5} \Rightarrow DE = \frac{3}{5} CH = \frac{3}{5} \cdot 2{,}5y = 1{,}5y$;

$S_{ADE} = \frac{AE \cdot DE}{2} = \frac{3{,}75y \cdot 1{,}5y}{2} = 2{,}8125y^2 \cancel{= 2{,}8125y}$

Из ΔCHB: $6{,}25y^2 + y^2 = 29 \Rightarrow 7{,}25y^2 = 29 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = 2$

$\Rightarrow S_{ADE} = 2{,}8125 \cdot 4 = 11{,}25$;

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$ и $S_{ADE} = 11{,}25$.

№6.

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|\geq 6 \\ x^2-2x-3y+y^2\leq 0 \end{cases}$$

Заметим, что $|3x|+|2y|+|6-3x-2y|\geq|3x+2y+6-3x-2y|=$
$=6 \Rightarrow |3x|+|2y|+|6-3x-2y|\geq 6$ – всегда;

Равенство достигается если все 3 модуля раскрываются с один. знаком;

~~Пусть со знаком – и у данной~~

Рассмотрим случай равенства и найдем решение такой системы:

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|=6 \\ x^2-2x-3y+y^2\leq 0 \end{cases}$$

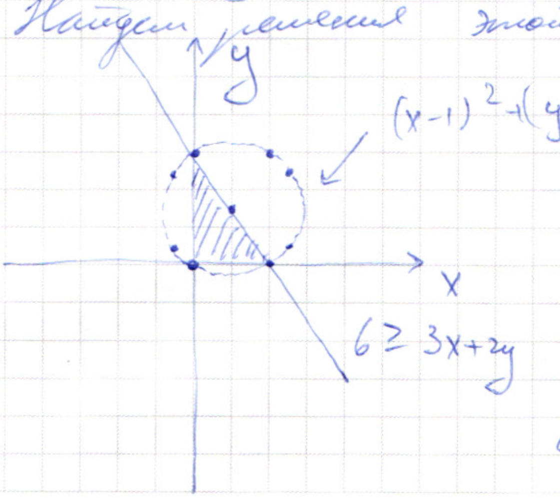
Пусть со знаком „–" раскрываются модули, тогда
$x, y<0 \Rightarrow x^2+y^2\leq 2x+3y<0 \Rightarrow x^2+y^2<0 \Rightarrow$ противоречие;

Пусть со знаком „+":

$$\begin{cases} x, y\geq 0 \text{ и } 6\geq 3x+2y \\ x^2-2x-3y+y^2\leq 0 \Rightarrow x^2-2x+1+y^2-3y+\cancel{1{,}5}^{\,2{,}25}\leq 3{,}25=\frac{13}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1{,}5)^2\leq\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 \\ x, y\geq 0 \\ 6\geq 3x+2y \end{cases}$$

Найдем решение этой системы на графике;



При этом решение системы:

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|\geq 6 \\ x^2-2x-3y+y^2\leq 0 \end{cases}$$ это целиком закрашенная окр $\Rightarrow$

Решение системы:

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

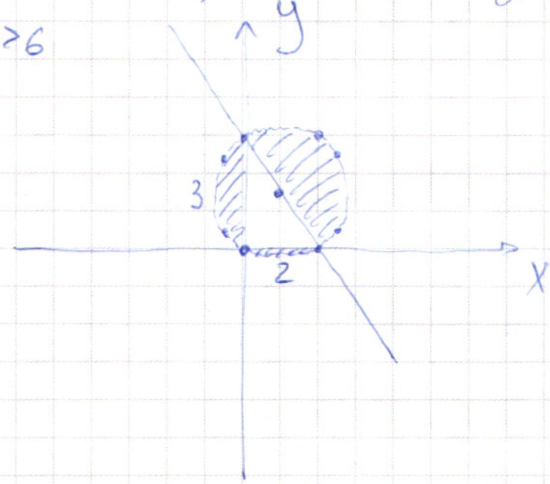
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6 \\ x^2-2x-3y+y^2\le 0 \end{cases}$$

это окружность без зоны решения системы где достигается равенство в 1 урав.

Тогда $\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6 \\ x^2-2x-3y+y^2\le 0 \end{cases}$



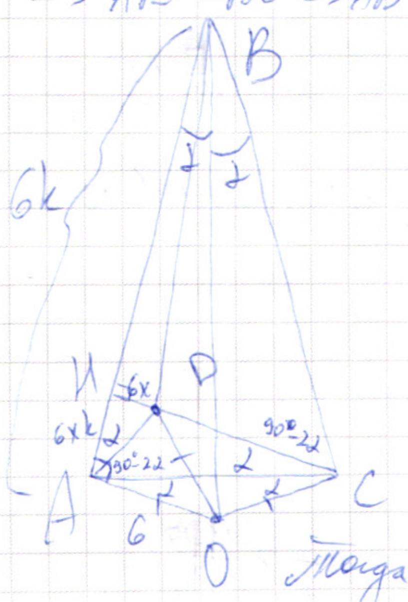
$S=S_{окр}-S_{\Delta}=\pi r^2-S_{\Delta}=$

$=\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2-\frac{2\cdot 3}{2}=\frac{13}{4}\pi-3;$

Ответ: $\frac{13}{4}\pi-3$;

№ 4.

Степень т. B отн. окр-ров с центром O равна AB^2 и равна BC^2 $\Rightarrow AB^2=BC^2 \Rightarrow AB=BC$; ΔABC – равнобед;



Пусть $\angle BAD=\alpha \Rightarrow \angle ACD=\alpha$, т.к. они опир. на одну ◡; В ΔHAC, $\angle HAC+\angle HCA=90° \Rightarrow \angle DAC=90°-2\alpha \Rightarrow \angle DCB=90°-2\alpha$, т.к. $\angle A=\angle C$; Тогда из ΔBHC $\angle HBC=2\alpha$ $\Rightarrow \angle ABO=\angle CBO=\alpha$; т.к. $ABCO$ – впис, т.к. $\angle BAO+\angle BCO=180°$, то $\angle OBC=\angle OAC=\alpha$ и $\angle ACO=\alpha$, т.к. $AO=OC$;

Пусть $HD=6x$, $AH=6xk$;

Тогда $AB=6k$, т.к. $\Delta AHD\sim\Delta BAO$;

$S_{ADB}=\frac{6k\cdot 6x}{2}=15 \Rightarrow kx=\frac{30}{36}$; $\Delta HCA\sim\Delta HAD \Rightarrow$

$\Rightarrow HC=6xk^2 \Rightarrow \frac{AB}{CH}=\frac{6k}{6k^2x}=\frac{1}{kx}=\frac{36}{30}$; Ответ: $\frac{36}{30}$;

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№7

Заметим, что $f(p) = f(p) + f(1) \Rightarrow f(p) - f(p) = f(1) = 0$;

~~Если~~ Докажем, что любая правильная дробь < 0, тогда

Пусть есть число $f(ab) = f(abx) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, где $x \geq 1$,

тогда при разложении $f(ab)$ на простые получим

$f(ab) = f(a) + f(b) = f(p_1) + f\left(\frac{a}{p_1}\right) + f(b) = \ldots = f(p_1) + \ldots + f(p_n) + f(xy)$,

где xy — дробь; тогда $f(abx)$ будет иметь эти простые

числа, эту дробь y и еще какие-то простые $\Rightarrow f(abx) > f(ab)$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) < 0$, аналогично если я просто имею

правильную дробь, то она меньше 0, т.к.

$f(ab) = f(abk) + f\left(\frac{1}{k}\right)$ и т.к. $\frac{1}{k} < 1$, то $k > 1$

$\Rightarrow abk > ab \Rightarrow f(abk) > f(ab) \Rightarrow f\left(\frac{1}{k}\right) = f(ab) - f(abk) < 0$

Тогда $\underbrace{f(1)}_{0} = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow$ т.к. $f\left(\frac{1}{x}\right) < 0$, то $f(x) > 0$

Значит, все $f(i)$, где $i < 1$, меньше 0, $f(1) = 0$,

а все $f(k)$, где $k > 1$, больше 0;

Значит, ~~$f\left(\frac{3}{4}\right), f\left(\frac{3}{5}\right), f\left(\frac{3}{6}\right), f\left(\frac{3}{7}\right), f\left(\frac{3}{8}\right)$~~, $f\left(\frac{3}{9}\right)$,

~~$f\left(\frac{3}{10}\right), f\left(\frac{3}{11}\right)$~~, $f\left(\frac{3}{12}\right)$, при $x = 3$ $y = \{4, 5, 6, \ldots 19\}$ 16 дробей

$x = 4$ $y = \{5, 6, \ldots, 19)$ 15 дробей

$x = 5$ $y = \{6, 7, \ldots, 19\}$ 14 дробей

$\ldots\ldots$ $\vdots$

$x = 18$ $y = 19$ 1 дробь

Тогда кол-во дробей равно $1 + 2 + \ldots + 15 + 16 = \cancel{\frac{15 \cdot 16}{2}} \frac{16 \cdot 17}{2} = \cancel{15 \cdot 8} = 8 \cdot 17$

~~$= 120$ дробей; Ответ: 120;~~

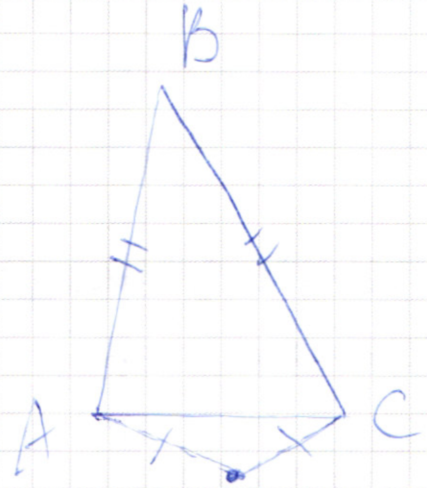
$= 80 + 56 = 136$ Ответ: 136

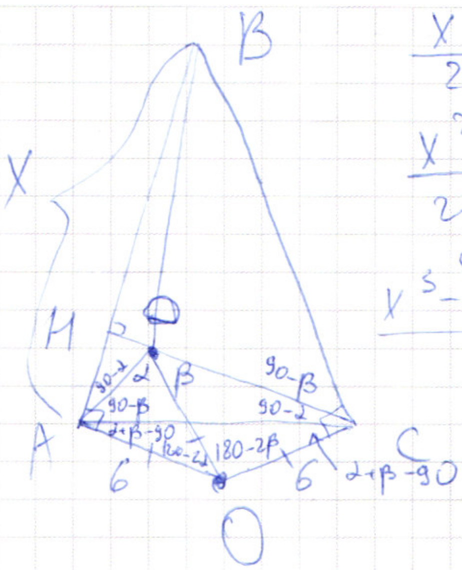
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$\frac{x^2-y^2}{2xy}=\frac{(30-xy)y}{yx^2}$$

$$\frac{x^2-y^2}{2y}=\frac{30-xy}{x}$$

$$x^3-xy^2=60y-2xy^2$$

$\frac{AB}{CH}$ — ?

$S_{ABD}=15$

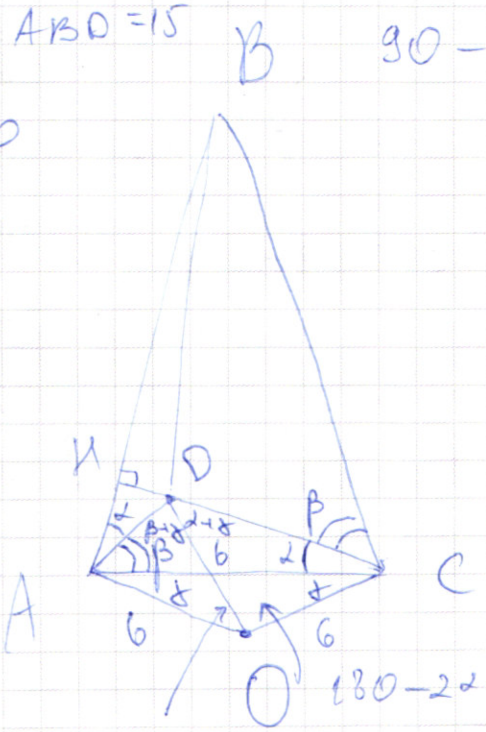
$90-\alpha-\beta+90=180-\alpha-\beta$

$-90+\beta$

$90-\alpha$

$\beta=2\alpha+2\beta-180$

$180-2\alpha=\beta$



$90-\beta+2\alpha+2\beta=180$

$2\alpha+\beta=90$

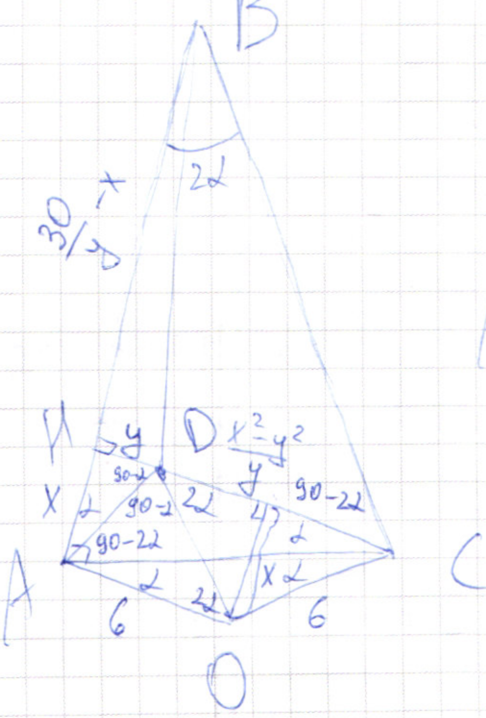
$\beta=90-2\alpha$

$\frac{x}{y}=\frac{z+y}{x}$

$x^2=zy+y^2$

$180-2\alpha-2\gamma$

$\frac{x^2-y^2}{y}=z$



$180-2\beta-2\gamma$

$\cancel{360}-2\alpha-2\beta-4\gamma+90-\beta=\cancel{180}$

180

$270=\underbrace{2\alpha+3\beta}+4\gamma$

$2\alpha+3(90-2\alpha)+4\gamma$

$\cancel{270}=2\alpha+\cancel{270}-6\alpha+4\gamma$

$4\alpha=4\gamma$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$x^2+\left(\frac{x^2-y^2}{2y}\right)^2=36$ $\qquad$ $x^3-xy^2=60y-2xy^2$

$\frac{x^2\cdot y}{y\cdot 30}=\frac{x^2}{30}$ $\qquad$ $x^3+xy^2=60y$

$x^2+\frac{(x^2-y^2)^2}{4y^2}=36$

$4y^2x^2+(x^2+y^2)^2=36\cdot 4y^2$

$(x^2+y^2)^2=36\cdot 4y^2$

$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6 \\ x^2-2x-3y+y^2\le 0 \end{cases}$

$x^2+y^2=6\cdot 2y=12y$

$x^2=12y-y^2$

$|3x|+|2y|+|6-3x-2y|\ge|3x+2y+6-3x-2y|=6$

~~38~~ $\begin{cases} x\ge 0 \quad y\ge 0 \quad 6-3x-2y\ge 0 \\ x^2+y^2\le 2x+3y \end{cases}$

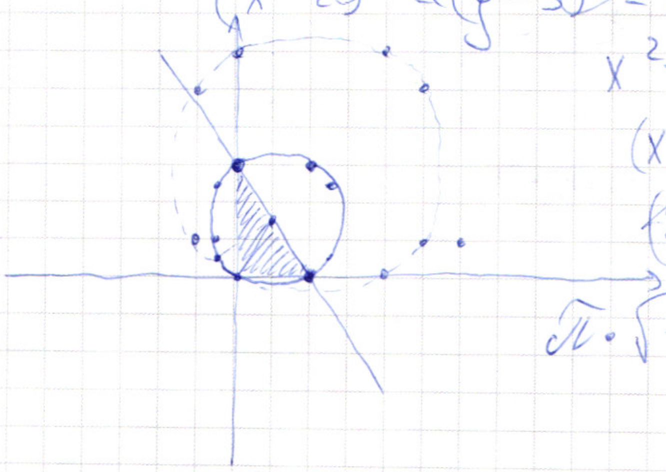
$6\ge 3x+2y$

$6-3x\ge 2y$

$x^2-4x+y^2-6y\le 0$

$x^2-4x+4+y^2-6y+9\le 13$

$(x-2)^2+(y-3)^2\le 13$



$x^2-2x+1+y^2-3y+2{,}25\le 3{,}25$

$(x-1)^2+(y-1{,}5)^2\le 3{,}25$

$\cancel{(2x-2)^2+(2y-3)^2\le 13}$

$\pi\cdot\sqrt{\frac{13}{4}}^{\,2}-3=\frac{13}{4}\pi-3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

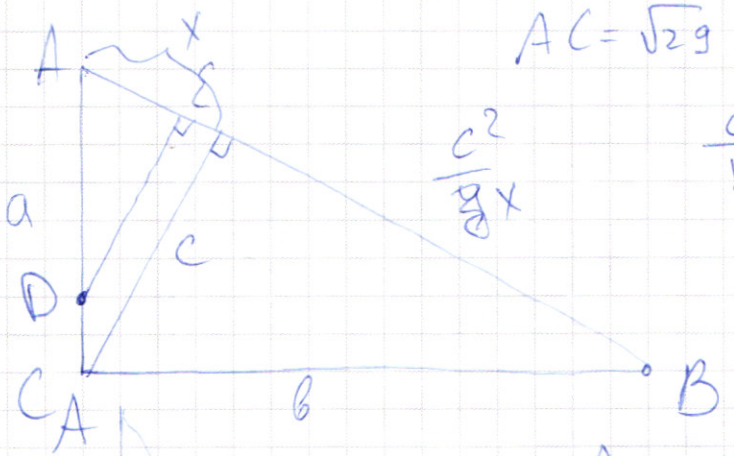
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$AC=\sqrt{29}$ $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$ $\angle CED=45^0$

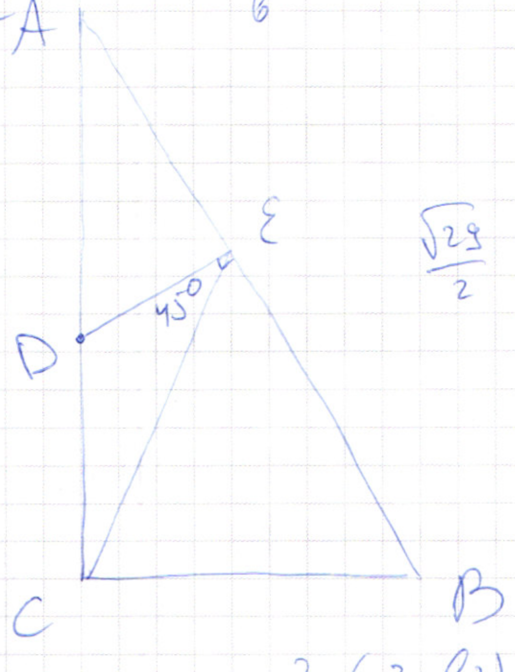
$\frac{c}{x}=\frac{c^2}{cx}=\frac{c}{x}$

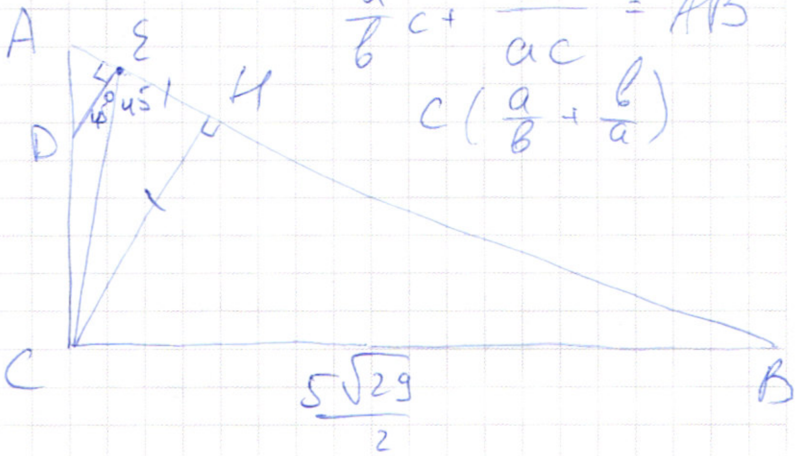
$\frac{b}{c}=\frac{a}{x}$

$\frac{b}{a}=\frac{c}{x}$ $x=\frac{a}{b}c$

$\frac{a}{b}c+\frac{c^2b}{ac}=AB$

$c\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$





$c\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)$

$\frac{c^2(a^2+b^2)^2}{a^2b^2}=a^2+b^2$

$c^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ $c=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$f(ab)=f(a)+f(b)$ a, b - полож. рац.

$f(p)=p$, p - простое

$3\le x,y\le 19$ $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$\frac{18}{9}$ $\frac{18}{6}$ $\frac{18}{3}$ $\frac{18}{2}$

2 3

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

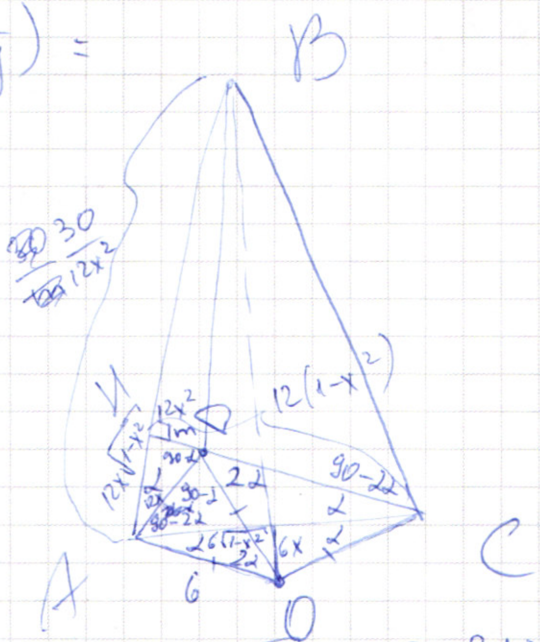
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) =$

$f(a) = f(a) + \underbrace{f(1)}_{0}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < f(1)$



$$\begin{array}{r} \times \ 3{,}75 \\ 1{,}5 \\ \hline 1875 \\ 375 \\ \hline 5{,}625 \end{array}$$

$1 = x^2 + z^2$

$z^2 = 1 - x^2$

$z = \sqrt{1-x^2}$

$5{,}625 : 2 = 2{,}8125$

$12\sqrt{1-x^2}$

$$\begin{array}{r} \times \ 2{,}8125 \\ 4 \\ \hline 11{,}2500 \end{array}$$

$\frac{30}{12x^2 \cdot 12(1-x^2)} =$

$\frac{6k \cdot 6x}{2} = 15$

$\left(12x\sqrt{1-x^2}\right)^2 + \left(\cancel{12}\,6\,(1-2x^2)\right)^2 = 36$

$kx = \frac{30}{36}$

$4x^2(1-x^2) + (1-2x^2)^2 = 1$

$4x^2 - 4x^4 + 1 - 4x^2 + 4x^4 = 1$

$\frac{6k}{6k^2x} = \frac{1}{kx} = \frac{36}{30}$

$9 - 2y \geq 0 \qquad 9 \geq 2y$

$y \geq 2x$

$9 - x^2 \leq 0$

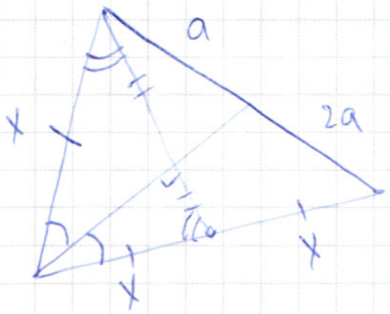
$4y \leq 9 \leq x^2$

$\boxtimes$ черновик $\square$ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$3x > 3a$

$x > a$

$3a > x$

$100 > 2a$

$3a > 100 - a$

$4a > 100$

$a > 25$

$a < 50$

$2y = 3x$

$y + x = 100$

$2y + 2x = 200$

$5x = 200$

$x = 40$

$3x + 3a = 300$

$x + a = 100$

$x = 100 - a$

26 27 28 29 30, 31 32 33 34 35, 36 37 38 39 40

41 42 43 44 45, 46 47 48 49 ?

$\underline{24}$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$2y - 4x = 2\sqrt{xy}$

$9 - x^2 - 4x = 2\sqrt{xy}$

$y - \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} - 2x = 0$

$\sqrt{y} = \dfrac{\sqrt{x} \pm \sqrt{x + 4 \cdot 2x}}{2} = \dfrac{\sqrt{x} \pm 3\sqrt{x}}{2}$

$\sqrt{y} = 2\sqrt{x}$

$\sqrt{y} = -\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{y} + \sqrt{x} = 0 \Rightarrow y = x = 0 \Rightarrow \varnothing$

$\sqrt{y} = 2\sqrt{x}$

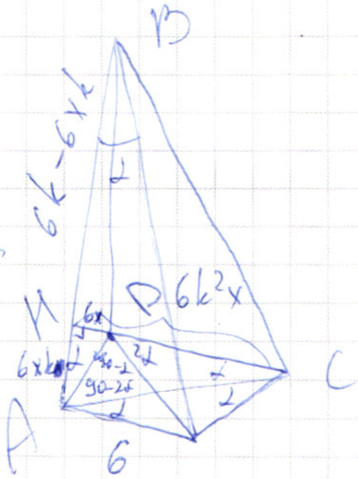
$y = 4x$

$2y = 8x$

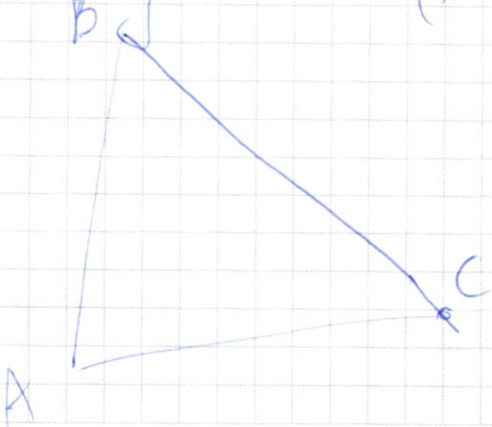
$8x + x^2 - 9 = 0$

$(x + 9)(x - 1) = 0$

$\boxed{x = 1}$



$\dfrac{AB}{6} = \dfrac{AH}{HD}$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

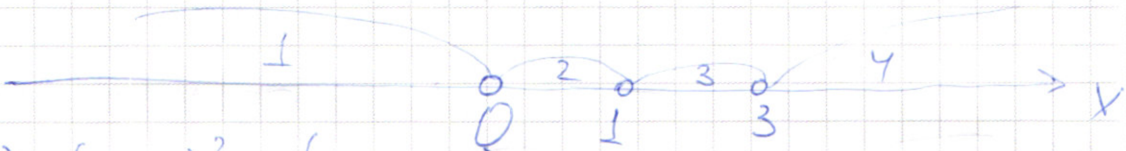
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\le 0$$

$$\frac{(x-1)^2+4(1-|x-1|)}{4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|}\le 0$$

$$\frac{(x-1)^2+4(1-|x-1|)}{4x(x-3)+|x(x-3)|}\le 0$$



1) $\dfrac{(x-1)^2+4(1+x-1)}{4x(x-3)+x(x-3)}\le 0$

$\dfrac{(x+1)^2}{5x(x-3)}\le 0 \Rightarrow \varnothing$

2) $\dfrac{(x-1)^2+4x}{4x(x-3)-x(x-3)}\le 0$

$\dfrac{(x+1)^2}{3(x-3)x}\le 0 \qquad 0<x<1$

3) $\dfrac{(x-1)^2+4(1-x+1)}{4x(x-3)-x(x-3)}\le 0$

$\dfrac{x^2-2x+1+8-4x}{3x(x-3)}\le 0$

$\dfrac{(x-3)^2}{3x(x-3)}\le 0 \qquad 1<x<3$

4) ~~(x-1)~~ $\dfrac{(x-3)^2}{5x(x-3)}\le 0$

$x\in(0;1)\cup(1;3);$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)