

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \uparrow^2 \quad xy \geq 0 \quad \text{№3.}$$

$$y^2-4xy+4x^2=xy \quad y-2x \geq 0$$

$$y^2-5xy+4x^2=0$$

$$D=25x^2-16x^2=9x^2$$

$$y = \frac{5x \pm 3x}{2} = 4x; x$$

1) $y=x$

$$x^2+2x-9=0$$

$$D=4+36=40$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2} = -2 - \sqrt{40}; -2 + \sqrt{40}$$

$$-2 + \sqrt{40} - 2(-2 + \sqrt{40}) < 0 \quad -36 - (-18) < 0$$

Ответ: $x = -2 - \sqrt{40}; y = -2 - \sqrt{40}$ и $x = 1; y = 4$.

№1.

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x||x-3|} \leq 0$$

1) $x \geq 3$ $\frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x+x^2-3x} = \frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \leq 0 \quad x \neq 3$

2) $3 > x \geq 1$ $\frac{x^2-2x+5-4x+9}{4x^2-12x-x^2+3x} = \frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \leq 0 \quad x \neq 3$

$x \in [1; 3)$

3) $1 > x \geq 0$ $\frac{x^2-2x+5+4x-4}{4x^2-12x-x^2+3x} = \frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \leq 0$

$x \in (0; 1)$

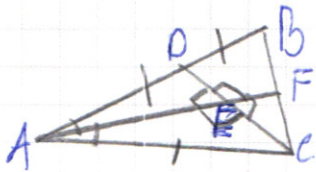
4) $0 > x$ $\frac{x^2 - 2x + 5 + 4x - 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} = \frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \leq 0$

$x = -1$ подходит

$\frac{0}{-5x-4} \leq 0$

Ответ: $x \in (0; 3) \cup \{-1\}$.

№2.



AE — высота и медиана для $\triangle ABC \Rightarrow \triangle ABC$ — равнобедренный
 $AD = DC$ и $BE = EC$

Про BC мы только знаем, что она меньше 300. Можно составить только неравенство.

$\begin{cases} AC < BC < AB + AC \\ AB + AC + BC = 300 \end{cases}$ Пусть $AC = a, BC = b$

$\begin{cases} a < b < 3a \\ a + 2a + b = 300 \end{cases}$ Пусть $b = 3a$ так как больше не можем, но это крайний случай при \min и \max a .

$a + 2a + 3a = 6a = 300$

$\begin{cases} 50 < b < 150 \\ 150 + b = 300 \end{cases}$ $a = 50$ тогда $a = 51$ условие будет выполняться.

решений $\begin{cases} 51 < b < 153 \\ 153 + b = 300 \end{cases}$ $b = 147$

Пусть $b = a$ (получается при \max значение)

$a + 2a + a = 4a = 300 \Rightarrow a = 75$ $\begin{cases} 75 < b < 225 \\ 225 + b = 300 \end{cases}$ метреш $\begin{cases} 74 < b < 222 \\ 222 + b = 300 \end{cases}$

а от 51 до 74 можем быть при $a = b \Rightarrow b = 74$

у нас 24 варианта треугольника.

Ответ: 24 варианта треугольника.

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6 \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0 \end{cases} \text{ №6.}$$

$$x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0$$

$$(x-1)^2 + (y-1,5)^2 \leq \frac{13}{4}$$

$$|3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6$$

$$1) x > 0 \quad y > 0 \quad 6 > 3x + 2y \quad 2) x > 0 \quad y > 0 \quad 6 < 3x + 2y$$

$$6 > 6 \text{ нет решений} \quad 3x + 2y + 3x + 2y - 6x + 4y > 12 \Rightarrow \text{все координаты}$$

$$3) x < 0 \quad y < 0 \quad 6 < 3x + 2y \quad 4) x = 0 \quad y < 0 \quad 6 > 3x + 2y$$

$$-3x - 2y + 6 - 3x - 2y > 6 \\ -6x - 4y > 0 \\ \text{нет реш}$$

$$5) x > 0 \quad y < 0 \quad 6 > 3x + 2y$$

$$3x - 2y + 6 - 3x - 2y > 6$$

$$-4y > 0 \text{ не реш}$$

$$6) x > 0 \quad y < 0 \quad 6 < 3x + 2y$$

$$3x - 2y + 3x + 2y - 6 > 6$$

$$6x > 12 \quad x > 2$$

$$7) x < 0 \quad y > 0 \quad 6 > 3x + 2y$$

$$-3x + 2y + 6 - 3x - 2y > 6$$

$$-6x > 0 \text{ не реш}$$

Окружность из 2-го уравнения
проходит через точки

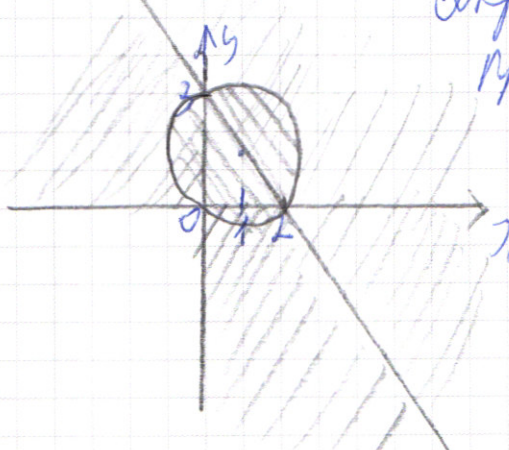
$$(0; 0), (0; 3), (2; 0)$$

$$(-1)^2 + (-1,5)^2 = \frac{13}{4}$$

$$(-1)^2 + (1,5)^2 = \frac{13}{4}$$

/// - ось 1 уравнения

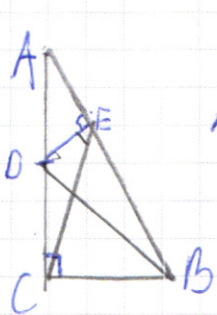
/// - ось 2 уравнения



$$S_{\text{плоскости}} = \pi r^2 - \frac{a \cdot b}{2} = \pi \cdot \frac{13}{4} - \frac{3 \cdot 2}{2} = \frac{13\pi}{4} - 3$$

Ответ: площадь фигуры равна $\frac{13\pi}{4} - 3$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



N5.
 $AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$ $BC = \sqrt{29}$

$\angle CED = 45^\circ$

$\square DEBC$ - впис. четырёх., т.к. $\angle DEB + \angle DCB = 180^\circ$
 $50^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\angle DBC = \angle DEC = 45^\circ$

$\angle BDC = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

$\triangle DCB$ - м.к. , т.к. $\angle BDC = \angle DBC \Rightarrow DC = CB$.

$AD = AC - DC = AC - CB = \frac{5\sqrt{29}}{2} - \sqrt{29} = \frac{3}{2}\sqrt{29}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{29}}{\frac{5}{2}\sqrt{29}} = \frac{3}{5}$

$\triangle AED$ подобен $\triangle ABC$ $\angle CAB$ - общий
 $\angle AED = \angle ACB$

$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{29}}{2}\right)^2 + 29} = \sqrt{\frac{29^2}{4} + 29} = \frac{29}{2}$

$\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \left(\frac{\frac{3}{2}\sqrt{29}}{\frac{29}{2}}\right)^2 = \frac{9}{29}$

$S_{\triangle ABC} = AC \cdot CB \cdot \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{29}}{2} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5 \cdot 29}{4}$

$S_{\triangle AED} = \frac{5 \cdot 29}{4} \cdot \frac{9}{29} = \frac{45}{4}$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$ и $S_{\triangle AED} = \frac{45}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{5xy} \uparrow^2 \\ 2y - x^2 = 9 \end{cases}$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy \quad xy \geq 0$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$$

$$D = 25x^2 - 16x^2 = 9x^2$$

$$y = \frac{5x \pm 3x}{2}$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$$

$$D = 25x^2 - 16x^2 = 9x^2$$

Пусть

$$y = \frac{5x \pm 3x}{2} = 4x; x$$

1) $y = x$ $2y - y^2 = 9$ 2) $y = 4x$

$$y^2 - 2y + 9 = 0$$

$$D = 4 - 36 < 0$$

нет реш

$$x^2 - 8x + 9 = 0$$

$$D = 64 - 36 = 28$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{2} = 4 \pm \sqrt{7}$$

$$y = 4(4 + \sqrt{7}) \text{ и } 4(4 - \sqrt{7})$$

Ответ: $x = 4 + \sqrt{7}; y = 4(4 + \sqrt{7})$ и $x = 4 - \sqrt{7}; y = 4(4 - \sqrt{7})$

№1.

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x||x-3|} \leq 0 \quad x \geq 3$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} = \frac{x^2 - 6x + 9}{5x^2 - 15x} = \frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \leq 0 \quad x \neq 3$$

$$\frac{x-3}{5x} \leq 0 \quad \begin{matrix} + & - & + \\ | & | & | \\ 0 & & 3 \end{matrix}$$

нет решения

$$3 > x \geq 1 \quad \frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x - (x^2 + 3x)} = \frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} = \frac{x-3}{3x} \leq 0$$

$$x \in [1; 3)$$

$$1 > x \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 + 4x - 4}{4x^2 - 12x - (x^2 + 3x)} = \frac{x^2 + 2x + 1}{3x(x-3)} = \frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \leq 0 \quad x \neq 0$$

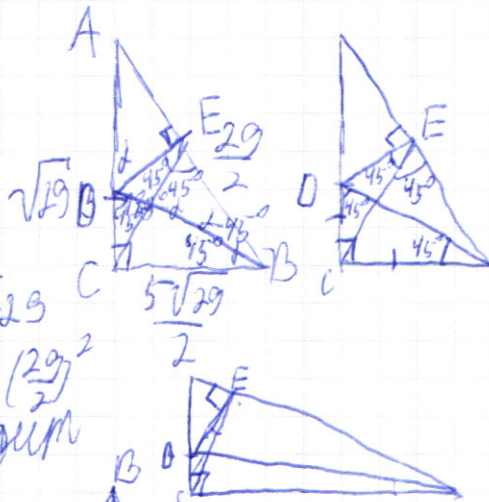
$$x \in (0; 1)$$

$$0 > x$$

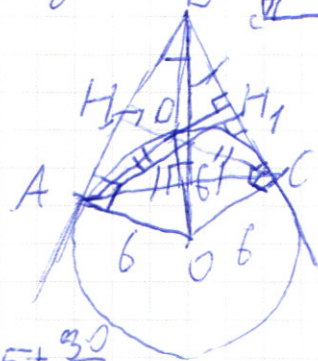
$$\frac{x^2 - 2x + 5 + 4x - 4}{4x^2 - 12x - (x^2 + 3x)} = \frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \leq 0$$

$$29 + \frac{25}{4} \cdot 29 = \frac{29}{4} \cdot 29 = \left(\frac{29}{2}\right)^2$$

$$x \in (0; 3) \cup \{-1\}$$



НЧ.



$$(a+b)^2 = 36 + b^2$$

$$ab \frac{a}{a+b} - 6 \cdot b \cdot \frac{1}{2} = 15$$

$$(a+b)^2 = 36 + b^2$$

$$a^2 + 6a + 36 = 36 + b^2$$

$$b = 5 + \frac{90}{a}$$

$$\begin{cases} \frac{3ab}{a+b} = 15 \\ a^2 + 6a - b^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3ab = 15a + 15b \\ ab - 5b = 5a \end{cases}$$

$$\frac{6b \cdot a}{2 \cdot a + b} = \frac{3ab}{a+b} = 15$$

$$a^2 + 12a + 36 = 36 + b^2$$

$$a^2 + 12a - b^2 = 0$$

$$3ab = 15a + 90$$

$$ab - 5b = 5a$$

$$6(a-5) = 5a$$

$$6 = \frac{5a}{a-5}$$

$$a^4 - 10a^3 + 25a^2 + 6a^3 - 60a^2 + 150a - \frac{a^2 + 6a - 25a^2}{a^3 - 12a + 25} = 0$$

$$a^4 - 4a^3 - 60a^2 + 150a = 0$$

$$a(a^3 - 4a^2 - 60a + 150) = 0$$

$$1000 - 400 - 600 + 150$$

$$3375 + 225 \cdot 15 - 225 \cdot 4 - 225 \cdot 4 + 15 \cdot 15$$

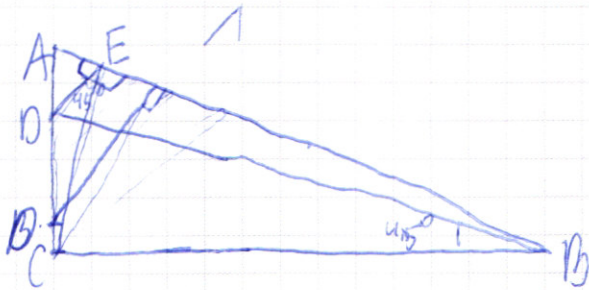
$$a^2 + 12a - 25 - \frac{300}{a} - \frac{900}{a^2} = 0 \quad | \cdot a^2$$

$$a^3 + 12a^2 - 25a^2 - 300a - 900 = 0$$

$$42 \cdot 30 - 25 \cdot 30^2 - 10 \cdot 30^2 - 30^2$$

$$20^3 - 25 \cdot 20^2 - 15 \cdot 20^2 - 45 \cdot 20$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6 \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 \leq 2x + 3y$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$$

$$D = 4 - 4y^2 + 12y = 4(-y^2 + 3y + 1)$$

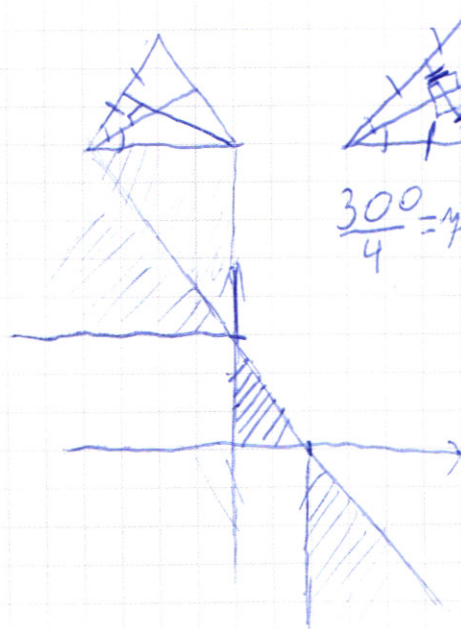
$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6 \\ x > 0, y > 0, 6 > 3x + 2y, x \text{ и } y \neq \emptyset \\ x > 0, y > 0, 6 < 3x + 2y, x = 0, y < 0, \emptyset \\ 6x + 4y - 6 > 6, 6x + 4y > 12 \end{cases}$$

$$(x-1)^2 + (y-1.5)^2 \leq \frac{13}{4}$$

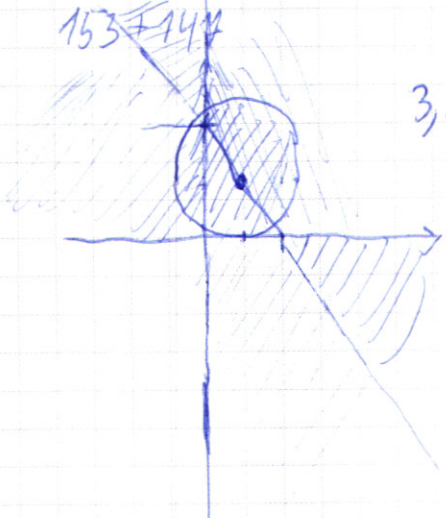


$$\begin{cases} x < 0, y > 0, 6 < 3x + 2y \\ -3x + 2y + 6 - 3x + 2y - 6 \\ 4y - 6 > 6 \\ 4y > 12, y > 3 \end{cases}$$

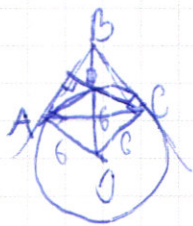
$$\begin{cases} x < 0, y > 6 > 3x + 2y \\ -3x + 2y + 6 - 3x + 2y \\ 8 - 6x + 4y > 6, 4y > 6x \end{cases}$$



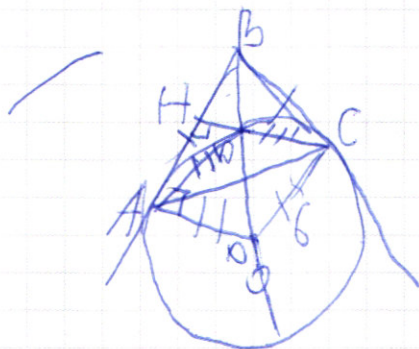
$a = b < 3a$
 $3a + b = 300$
 $\frac{300}{4} = 75, \frac{300}{6} = 50$
 $153 + 144$



$$3,25^2 \pi - 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$$



№4.



$$\frac{a \sin \alpha \cdot b}{2} \quad b + \sin \alpha \cdot b = CH$$

$$a = AB$$

$$3b + a^2 = 3b + \frac{1}{2}b + b^2$$

$$b^2 + 12b - a^2$$

$$D = 48 + 4a^2$$

$$\frac{ab \cdot a}{2(a+b)} = 15$$

$$\frac{a^2 b}{2a+12} = 15$$

$$a^2 b - 30a - 180 = 0$$

$$a^2 + 12a - b^2 = 0$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the answer.

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)