МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED=45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 19$, $3\leqslant y\leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

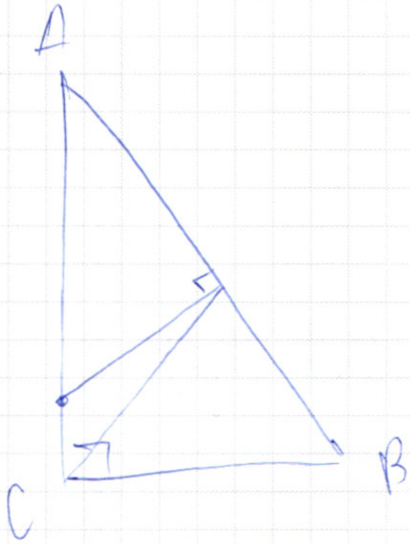
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

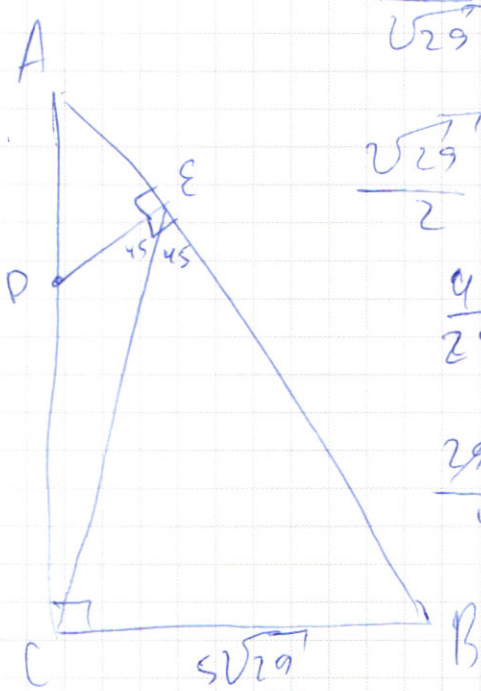
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





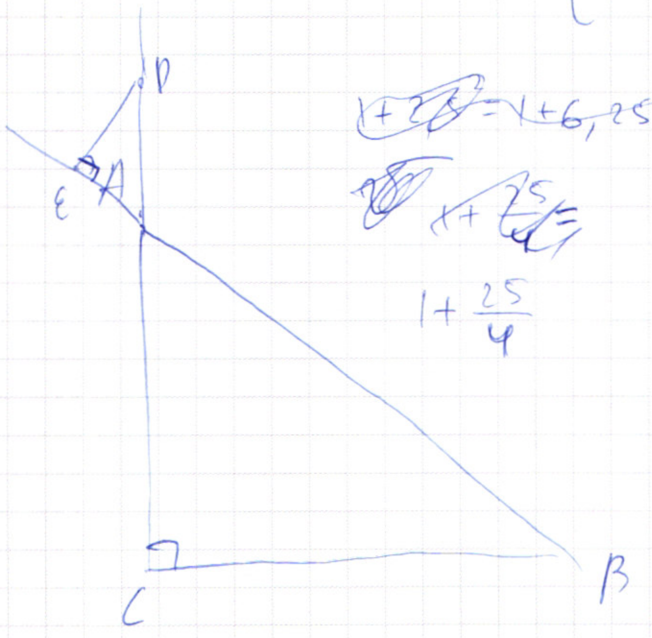
$\frac{5\sqrt{29}}{2}$

$\frac{7}{\sqrt{29}}$

$\frac{\sqrt{29}}{2}$ $\frac{7}{2}$

$\frac{49}{29}$

$\frac{29\cdot 5}{4}\cdot\frac{49}{29} = \frac{49\cdot 5}{4} = \frac{245}{4}$

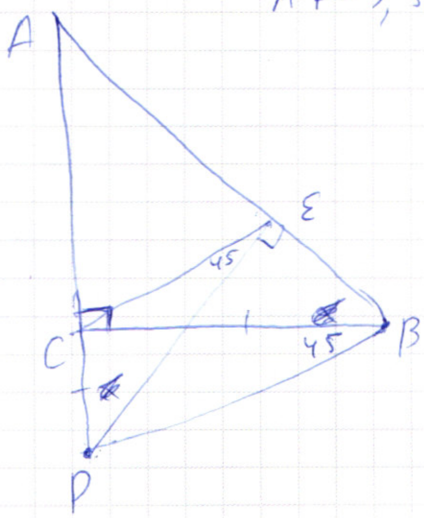


$\cancel{1+2{,}5^2} = 1+6{,}25 =$

$\cancel{1+\frac{25}{4}} =$

$1+\frac{25}{4}$

AD=3,5AC



$1+\frac{25}{4} = \frac{29}{4}$ $\frac{\sqrt{29}}{2}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{AC+CD}{AC} = 1+\frac{BC}{AC} = 1+\frac{5}{2} = 3{,}5$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

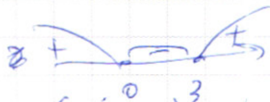
$$\frac{(x-1)^2+4-4|x-1|}{4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|} \leq 0$$

$$4a+|a|<0$$

$$a>0$$

$$\frac{(|x-1|-2)^2}{4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|} \leq 0$$

$$x(x-3)>0$$



$x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

$|x-1|=2$

$x=3$

$x=-1$

$$f(x)=f(y)$$

$$f(x)=f(y)+f\left(\frac{x}{y}\right)$$

$3x<0$

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$$

$2y<0$

$6-3x-2y<0$

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=f(y)-f(x)$$

$3x+2y>6$

$f(x)=0$

$2y>6-3x$

$f(kx)=f(x)+f(k)=f(k)$

$y>-1{,}5x+3$

$$f\left(\frac{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}}{q_1^{\beta_1} \dots q_n^{\beta_n}}\right)=$$

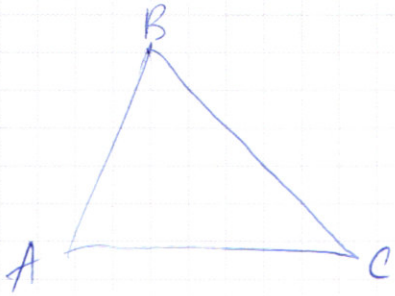
$(x-1)^2+(y-1{,}5)^2$ ~~$(x-3)(y-2)$~~

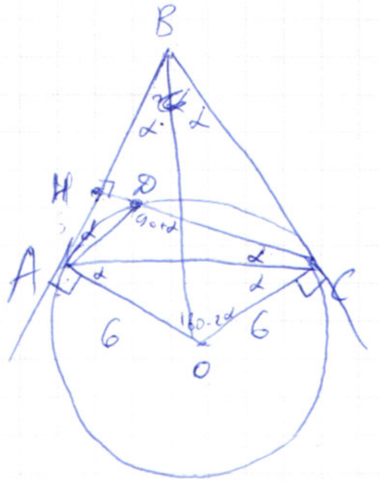
$$(x-1)^2+(y-1{,}5)^2-1-2{,}25 \leq 0$$

$$(x-1)^2+(y-1{,}5)^2 \leq 3{,}25$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)





$$\cancel{\frac{AH}{AB} = \frac{DH}{AO} = \frac{AD}{BO}}$$

$$DH \cdot HC = AH^2$$

$$\frac{CH}{AB} = \frac{AC}{BO} = \frac{AH}{AO}$$

$$\frac{AH}{AB} = \frac{DH}{AO} = \frac{AD}{BO}$$

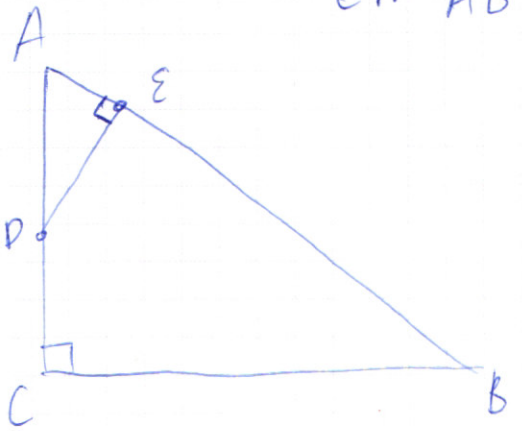
$$AB \cdot DH = AH \cdot AO$$

$$15 = \frac{AB \cdot DH}{2} = \frac{AH \cdot AO}{2}$$

$$AH \cdot AO = 30$$

$$AH = 5$$

$$\frac{5}{CH} = \frac{6}{AB} \qquad \frac{AB}{CH} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y-2x=\sqrt{xy}$

$2y+x^2=9$

$y^2-\cancel{2}4xy+4x^2=xy$

$y^2-5xy+4x^2=0$

$(y-4x)(y-x)=0$

1) $y=4x$

$8x+x^2=9$

$x^2+8x-9=0$

$(x+9)(x-1)=0$

$x=-9 \quad y=-36$

$x=1 \quad y=4$

2) $y=x$

$2x+x^2=9$

$x^2+2x-9=0$

$D=4+9\cdot4=40$

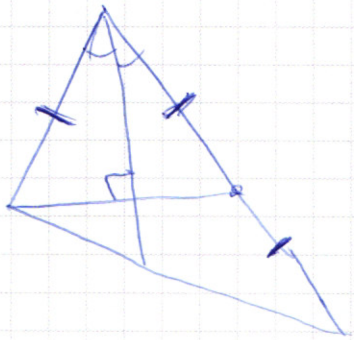
$x=\dfrac{-2\pm2\sqrt{10}}{2}=1\pm\sqrt{10}$

$x=y=1+\sqrt{10}$

$x+2x+3x-1\le300$

$6x\le301$

$x\le50$



$x \quad 2x$

$\cancel{x>x}$

$x<a<3x$

$x+1\le a\le3x-1$

$2x-1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

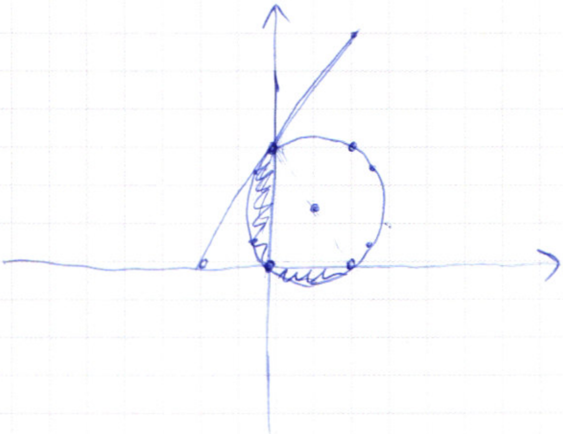
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

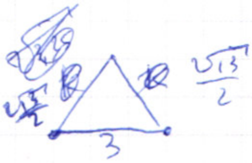
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$3,25 = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$



$\cancel{\frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}}$ $\frac{13}{4} + \frac{13}{4} - 2 \cdot \frac{13}{4} \cdot \frac{13}{4} \cdot \cos\alpha = 9$

$\pi \cdot \frac{13}{4} - 3 = \frac{13}{4}\pi - 3$

$-\frac{5}{2} = \frac{13 \cdot 13}{48} \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = -\frac{20}{169}$

☑ черновик ☐ чистовик

Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№1.

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \le 0$$

$$\frac{(|x-1|)^2-4|x-1|+4}{4x(x-3)+|x(x-3)|} \le 0$$

$$\frac{(|x-1|-2)^2}{4x(x-3)+|x(x-3)|} \le 0$$ числитель неотрицательный

1) $|x-1|-2=0$

$\underline{x=3}$ - не подходит, т.к. знаменатель $\neq 0$

$\underline{x=-1}$

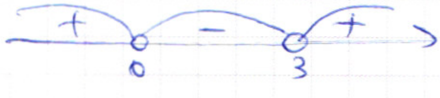
2) $4x(x-3)+|x(x-3)|<0$

$x(x-3)\ge 0$ не подходит

Проверим $x(x-3)<0$

$4x(x-3)-x(x-3)=3x(x-3)<0$ - верно

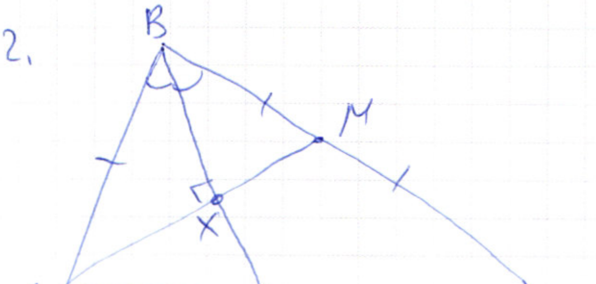
$x(x-3)<0$



$x\in(0;3)$

Ответ: $x\in\{-1\}\cup(0;3)$.

№2.



BX - высота и бис-са ~~медиана~~ в $\triangle ABM \Rightarrow AB=BM$

$\Downarrow$

$BC=2AB$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда 2 стороны треугольника - x и $2x$.

Третья сторона $c > 2x - x = x$ и

$c < 2x + x = 3x$ по нер-ву треугольника

$x < c < 3x \Rightarrow x+1 \le c \le 3x-1$

~~Тогда c принимает $(2x-1)$ значение~~

~~Пока $x \le 50$ $P_{max} = x+2x+3x-1 = 6x-1 \le 299$~~

~~Тогда для $x \le 50$ получим $1+3+5+\ldots+$~~

~~$+99$ вариантов $= 100\cdot 25 =$~~ 2500

~~$x \ge 51 \Rightarrow P_{max} = x+2x+3x-1 = 6x-1 \ge 305 \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow$ при $x \ge 51$ $x+1 \le c \le 300-3x$~~

~~Тогда c принимает $300-3x-x-1+1 =$~~

~~$= 300-4x$ значений~~

~~x_{max}~~ ~~Найдём x_{max}~~ $x+2x+x+1 >$

Тогда $x+2x+x+1 \le P \le x+2x+3x-1$

$4x+1 \le P \le 6x-1$

~~300~~

$4x+1 \le 300$	$300 \le 6x-1$
$4x \le 299$	$6x \ge 301$
$x \le \frac{299}{4} < 75$	$x \ge \frac{301}{6} > 50$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$x \le 74$	$x \ge 51$

Тогда x принимает $74-51+1 = 24$ значение $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ есть 24 треугольника. Ответ: 24.

№3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \qquad \begin{matrix} y-2x\geq 0 \\ xy\geq 0 \end{matrix}$$

$y^2-4xy+4x^2=xy$

$y^2-5xy+4x^2=0$

$(y-4x)(y-x)=0$

1) $y=4x$

$2\cdot 4x+x^2=9$

$8x+x^2=9$

$x^2+8x-9=0$

$(x+9)(x-1)=0$

$\underline{x=-9}$ $\underline{y=-36}$ $\qquad$ $\underline{x=1}$ $\underline{y=4}$ $\quad 4-2\cdot 1=2\geq 0$ - подходит

$-36-2(-9)=-18<0$
не подходит

2) $y=x$

~~$2x+x^2=9$~~

$xy=x^2\geq 0$ - верно

$y-2x=x-2x=-x\geq 0\Rightarrow$
$\Rightarrow x\leq 0$

$2x+x^2=9$

$x^2+2x-9=0$

$D=4+4\cdot 9=40$

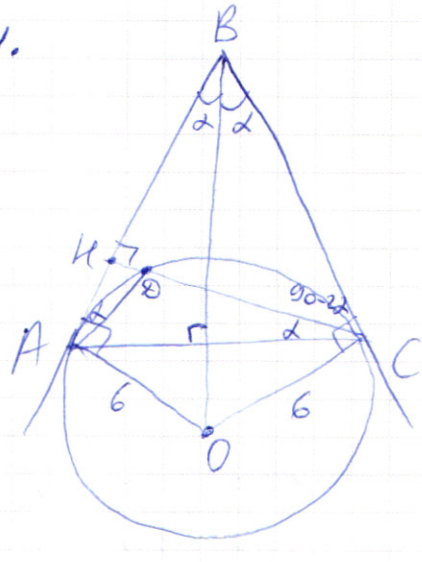
$x=\frac{-2\pm 2\sqrt{10}}{2}=-1\pm\sqrt{10}\Rightarrow$

$\Rightarrow x=y=-1-\sqrt{10}<0$, т.к.

$\sqrt{10}-1>0$

Ответ: $(1;4)$ и $(-1-\sqrt{10};-1-\sqrt{10})$

№4.



$S_{ABD}=15=\frac{DH\cdot AB}{2}\Rightarrow AB\cdot DH=30$

$AO=CO\Rightarrow O\in$ бис-се $\angle B$

$\triangle ABO=\triangle CBO$ по катету и гипотенузе $\Rightarrow AB=BC$

Тогда $BO\perp AC$, т.к. это бис-са в равноб. $\triangle$

Пусть $\frac{\angle B}{2}=\alpha$

Тогда $\angle BAC=\angle BCA=90-\alpha$

$\angle HCB=90-2\alpha\Rightarrow\angle HCA=\alpha$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

HA - касательная к окр. $\Rightarrow$ ~~$\angle HAD = \angle DCA$~~ $\angle HAD = \angle DCA = \alpha$, т.к. на дугу AD опирается угол α

Тогда $\triangle HAD \sim \triangle ABO$ по 2 углам

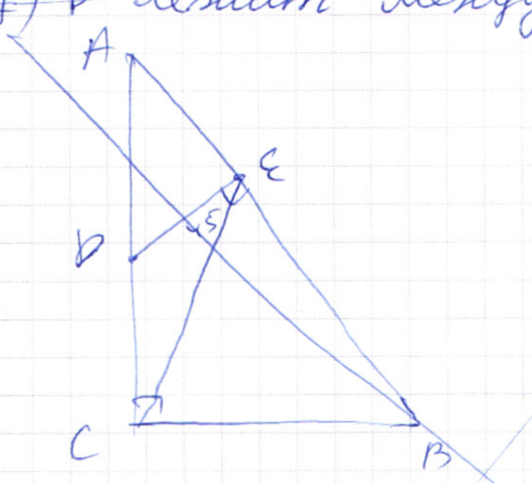
$\frac{AH}{AB} = \frac{DH}{AO} \Rightarrow AH \cdot AO = DH \cdot AB = 30 \Rightarrow AH = \frac{30}{AO} = \frac{30}{6} = 5$

$\triangle HCA \sim \triangle ABO$

$\frac{AB}{CH} = \cancel{\frac{AO}{AO}} = \cancel{6} = \frac{AO}{AH} = \frac{6}{5} = 1,2$

Ответ: 1,2.

~~№5.~~ 1) D лежит между A и C на катете AC



$CDEB$ - впис. $\Rightarrow$

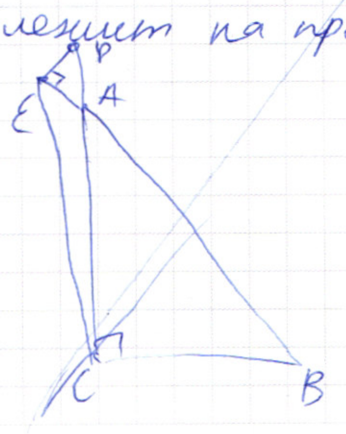
$\Rightarrow \angle DBC = 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle DCB$ - равноб. прямоуг.

$BC = CD < AC$

$\frac{5\sqrt{29}}{2} < \sqrt{29}$ - противоречие

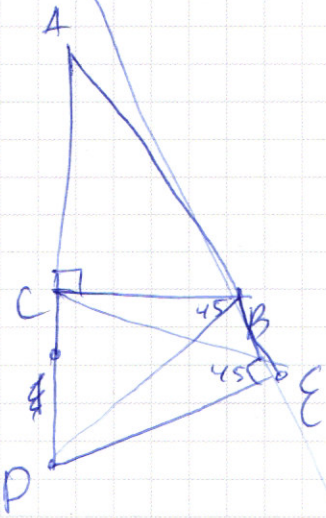
2) D лежит на продолжении AC за т. A.



~~$DECB$ - впис~~

$\angle CED = 45^\circ$ и $\angle CED > 90^\circ$ - противоречие

3) P лежит на продолжении AC за т. C



PCBE - впис. $\Rightarrow$

$\angle PBC = 45^\circ \Rightarrow \triangle PCB$ - равноб. прямоугольный $\Rightarrow$

$\Rightarrow BC = CD$

$$\frac{AP}{AC} = \frac{AC+CD}{AC} = 1 + \frac{BC}{AC} = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$$

$\triangle ACB \sim \triangle AED$ по 2 углам ($\angle A$ и 90°)

$$AB^2 = AC^2 + \left(\frac{5}{2}AC\right)^2 = \frac{29}{4}AC^2$$

$$AB = \frac{\sqrt{29}}{2}AC \qquad AP = \frac{7}{2}AC$$

$$\cancel{\frac{AB}{AP}} \quad \frac{AP}{AB} = \frac{7}{\sqrt{29}} = k_{\text{подобие}}$$

$$S_{AED} = S_{ABC} \cdot k^2_{\text{подобие}} = \frac{\sqrt{29} \cdot 5\sqrt{29}}{2 \cdot \cancel{4}\, 2} \cdot \frac{7}{\sqrt{29}} \cdot \frac{7}{\sqrt{29}} = \frac{49 \cdot 5}{4} =$$

$$= \frac{245}{4}$$

Ответ: $\frac{AP}{AC} = \frac{7}{2}$, $S_{AED} = \frac{245}{4}$.

№6. $|3x| + |2y| + |6-3x-2y| \geq 3x + 2y + 6 - 3x - 2y = 6$

Равенство достигается, когда все выражение под модулем неотрицательны, иначе сумма модулей станет больше суммы подмодульных выражений, т.к. справа будет вычитание. Тогда либо $3x < 0$, либо $2y < 0$, либо $6 - 3x - 2y < 0$

$$\left[\begin{array}{l} x < 0 \\ y < 0 \\ 6 - 3x - 2y < 0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ y < 0 \\ y > -1{,}5x + 3 \end{array}\right.$$

$$x^2 - 2x - 3y + y^2 = (x-1)^2 + (y-1{,}5)^2 - 1 - 2{,}25$$

$$(x-1)^2 + (y-1{,}5)^2 \leq 3{,}25 = \frac{13}{4}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

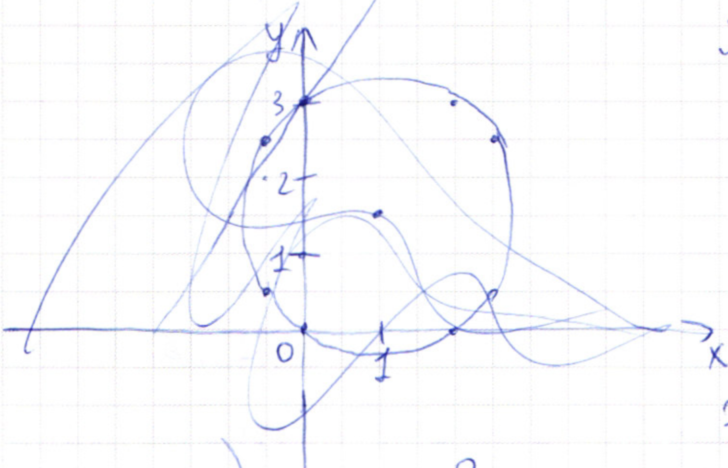
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

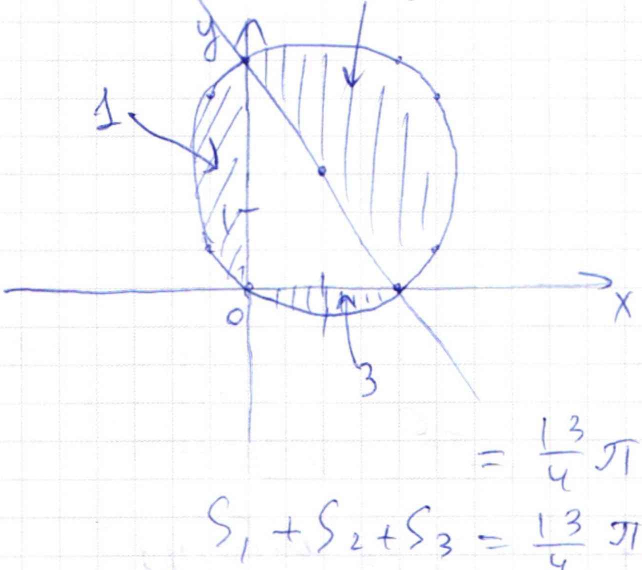
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2 \le \frac{13}{4}$ – круг с центром $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ и $R=\frac{\sqrt{13}}{2}$



~~Точка $(-0,5; 2,5) \in$ окр., т.к. $1,5^2+1^2=3,25=\frac{13}{4}$~~

~~$2,5 >$~~



Заштрихованная область – решения системы, т.к. в части 1 $x<0$, в части 3 $y<0$, в части 2 $y>-1,5x+3$

$S_1+S_2+S_3+\frac{3\cdot 2}{2}=\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2=$

площадь треугольника внутри круга

$=\frac{13}{4}\pi$

$S_1+S_2+S_3=\frac{13}{4}\pi-3$

Ответ: $\frac{13}{4}\pi-3$.

№7. $f(a_1 a_2 \dots a_n)=f(a_1)+f(a_2\dots a_n)=f(a_1)+f(a_2)+f(a_3\dots a_n)=$

$=f(a_1)+f(a_2)+\dots+f(a_n)$

$f(y)+f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

$f\left(\frac{y}{x}\right)=f(y)-f(x)$ ~~$\Rightarrow f(x)+f(y)=0$~~

$\Downarrow$

$f\left(\frac{x}{y}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right)=0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6

(Нумеровать только чистовики)

Пусть ~~$f(k)=0$, k-рац. и $k\neq 1$~~

$k=\dfrac{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}}{q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\ldots q_m^{\beta_m}}$, $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{P}$

$n\geq m$, не умаляя общности, т.к. $f(k)+f(\frac{1}{k})=0$

~~$f(k)=f(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n})$~~

~~$f(a\cdot 1)=f(a)+f(1)\Rightarrow f(1)=0$~~

1) $m=0$

$k=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$

$f(k)=p_1+p_1+p_1+\ldots+p_2+p_2+\ldots+\ldots\ldots+p_n+p_n+\ldots+p_n=$

$=p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+\ldots+p_n\alpha_n=0$ – противоречие, т.к.

$n\geq 1\Rightarrow \alpha_1>0$, т.к. $k\neq 1$

2) ~~$m\neq 0$~~ $m=1$ $n=1$

~~$f(kq_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\ldots q_m^{\beta_m})=f(k)$~~

$f\left(\dfrac{p_1^{\alpha_1}}{q_1^{\beta_1}}\right)=f(p_1^{\alpha_1})-f(q_1^{\beta_1})=p_1+p_1+\ldots+p_1-$

$-q_1-q_1-\ldots=\alpha_1 p_1-\beta_1 q_1 \overset{?}{=} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 \vdots q_1$, $\beta_1 \vdots p_1$. Либо p_1, либо $q_1\geq 3\Rightarrow$

$\Rightarrow$ либо α_1, либо $\beta_1\geq 3$. Т.к. $x, y\leq 19$, а

$k=\frac{x}{y}$, то $k=\frac{8}{9}$ или $k=\frac{9}{8}$, т.к. $3^3>19$

$f(\frac{8}{9})=f(\frac{2^3}{3^2})=f(2^3)-f(3^2)=2+2+2-3-3=0$

Аналогично для $k=\frac{9}{8}$

3) Найдем все числа от 3 до 19, имеющие хотя бы 2 простых множителя

$\underset{2\cdot 3}{6}$, $\underset{2^2\cdot 3}{12}$, $\underset{3^2\cdot 2}{18}$, $\underset{5\cdot 2}{10}$, $\underset{5\cdot 3}{15}$, $\underset{7\cdot 2}{14}$

☑ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница № ~~7~~ (Нумеровать только чистовики)

Найдем: $f(\frac{x}{y})=0$

$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)=0 \Rightarrow f(x)=f(y)$

$f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}) = f(p_1)+f(p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}) =$

$= \ldots = f(p_1)+f(p_1)+\ldots+f(p_1)+f(p_2)+\ldots+f(p_2)+\ldots+f(p_n)+\ldots$

$+\ldots f(p_n) = p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+\ldots+p_n\alpha_n$

$f(3)=3$

$f(4)=2+2=4$

$f(5)=5$

$f(6)=2+3=5$

$f(7)=7$

$f(8)=2+2+2=6$

$f(9)=3+3=6$

$f(10)=2+5=7$

$f(11)=11$

$f(12)=2+2+3=7$

$f(13)=13$

$f(14)=7+2=9$

$f(15)=5+3=8$

$f(16)=2+2+2+2=8$

$f(17)=17$

$f(18)=3+3+2=8$

$f(19)=19$

Ответ: 128.

$f(x)=f(y)$

1) x, y равны 5 или 6

$2\cdot 1$ ~~2 пары~~ $\cancel{2\cdot 1}=2$ пары

2) x, y равны 8 или 9

$2\cdot 1=2$ пары

3) x, y равны 7, 10 или 12

$3\cdot 2=6$ пар

4) x, y равны 15, 16 или 18

~~6~~ $3\cdot 2=6$ пар

5) ~~x, y~~ x=y

~~+6 пар~~ 17 пар

Всего пар: $17\times 17=289$

Пар, где $f(\frac{x}{y})\neq 0$:

$289-17-6-6-2-2=256$

272 266 260

Если $f(\frac{x}{y})>0$, то $f(\frac{y}{x})<0$ и наоборот.

Тогда подходят $\frac{256}{2}=128$ пар

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 7

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$n \le 2$ и $m \le 2$, т.к. нет чисел, имеющих ≥ 3 простых множителя

$n=2 \quad m=2$

$k=\frac{14}{15}$ или $k=\frac{15}{14}$

$f\left(\frac{7\cdot 2}{5\cdot 3}\right)=f(7\cdot 2)-f(5\cdot 3)=7+2-5-3=-1\neq 0$

$\Downarrow$

$f\left(\frac{15}{14}\right)=1\neq 0$

4) $n=2 \quad m=1$

Найдем числа, являющиеся степенями простых

3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 17, 19

Найдем их f:

$f(3)=3$

$f(4)=2+2=4$

$f(5)=5$

$f(7)=7$

$f(8)=2+2+2=6$

$f(9)=3+3=6$

$f(11)=11$

$f(13)=13$

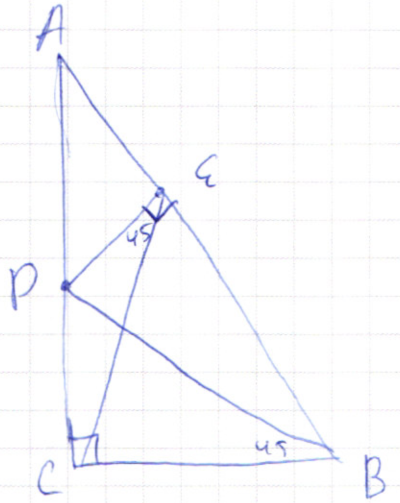
$f(17)=17$

$f(19)=19$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)=0 \Rightarrow f(x)=f(y)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.



$CDEB$ - впис. $\Rightarrow \angle DBC = 45^\circ \Rightarrow$

$\triangle DCB$ - равнобедр. прямоуг. $\Rightarrow$

$\Rightarrow BC = DC$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC-CD}{AC} = 1 - \frac{BC}{AC} =$$

$$= 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$\triangle AED \sim \triangle ACB$ с коэф. k по 2 углам ($\angle A$ и 90°)

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = AC^2 + \left(\frac{2}{5}AC\right)^2 = \frac{29}{25}AC^2$$

$$AB = \frac{\sqrt{29}}{5}AC$$

$$AD = \frac{3}{5}AC$$

$$k = \frac{3}{\sqrt{29}} \quad S_{AED} = S_{ABC} \cdot k^2 = \frac{\sqrt{29} \cdot 5\sqrt{29}}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3}{\sqrt{29}} \cdot \frac{3}{\sqrt{29}} = \frac{45}{4}$$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$, $S_{AED} = \frac{45}{4}$.

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)