МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Пусть q – ~~(...)~~ знаменатель данной геометрической прогрессии, тогда $b = aq$, $c = aq^2$, $x = aq^3$, где a – первый член геометрической прогрессии, а x – четвёртый её член. Подставим значения b и c в уравнение четвёртого члена, тогда:

$$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$$
$$a(x^2 - 2qx + q^2) = 0$$
$$a(x-q)^2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} a=0 \\ (x-q)^2=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ x-q=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ x=q \end{array}\right.$$

При $a=0$ значение $c = 0 \cdot q^2 = 0$.

При $x = q$ подставим это значение в уравнение четвёртого члена прогрессии, тогда

$$x = ax^3 \Rightarrow ax^3 - x = 0 \Rightarrow x(ax^2 - 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ ax^2-1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ ax^2=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\frac{1}{a} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{a}} \end{array}\right.$$

При $x=0$, подставляя это значение в уравнение четвёртого члена прогрессии, получаем: $a \cdot 0^2 - 2b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$.

При $x = \pm\frac{1}{\sqrt{a}}$ получаем, что и $q = \pm\frac{1}{\sqrt{a}}$ (т.к. $x = q$). Подставляя эти значения в уравнение третьего члена прогрессии, получаем:

$c = a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

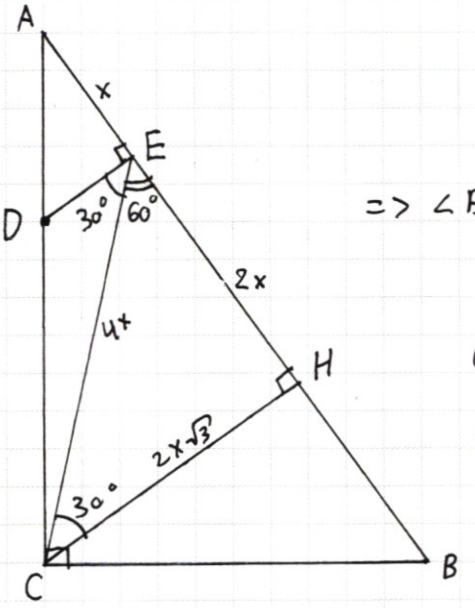
Получилось 2 случая: $c = 0$ и $c = 1$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

При $c=0$ следует, что и a, и b равны 0. Но так как $b=aq$, то $q=\frac{b}{a}$, а $a\neq 0$, так как стоит в знаменателе. Получилось противоречие, значит $c\neq 0$.

Ответ: 1.

$\sqrt{\overset{0}{4}}$



а) $\left.\begin{array}{l} DE\perp AB \text{ (по усл.)} \Rightarrow \angle DEB=90^\circ \\ \angle CED=30^\circ \text{ (по усл.)} \end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BEC=\angle DEB-\angle CED=90^\circ-30^\circ=60^\circ$.

Проведём высоту CH в $\triangle ABC$. Так как $CH\perp AB$, то $\triangle CEH$ - прямоугольный $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ECH=90^\circ-\angle CEH=90^\circ-60^\circ=30^\circ$.

$\left.\begin{array}{l} DE\perp AB \text{ (по усл.)} \\ CE\perp AB \text{ (как высота)} \end{array}\right| \Rightarrow DE\parallel CH \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AE}{AH}=\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$ (по теореме Фалеса). Пусть $AE=x$, тогда $\frac{x}{AH}=\frac{1}{3}\Rightarrow$ $\Rightarrow AH=3x$. Так как $AH=AE+EH$, то $EH=AH-AE=3x-x=2x$. В прямоугольном треугольнике CEH $\angle ECH=30^\circ \Rightarrow EH=\frac{1}{2}CE$ (по свойству прямоугольного треугольника как сторона, лежащая напротив угла в 30°). Тогда $CE=2EH=2\cdot 2x=4x$. По теореме Пифагора в $\triangle CEH$: $CE^2=CH^2+EH^2 \Rightarrow CH=\sqrt{CE^2-EH^2}=\sqrt{16x^2-4x^2}=\sqrt{12x^2}=2x\sqrt{3}$.

В прямоугольном треугольнике ACH $tg\angle A=\frac{CH}{AH}=\frac{2x\sqrt{3}}{3x}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

б) Пусть $\angle BAC=\alpha$, тогда $tg\,\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Так как $tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, то $\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{4\cdot 3}{9}+1=\frac{4}{3}+\frac{3}{3}=\frac{7}{3}\Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{3}{7}\Rightarrow \cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ (т.к. α - острый угол (т.к. $\triangle BAC$ - прямоугольный)) $\Rightarrow \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ (по основному тригонометрическому тождеству) $\Rightarrow \sin\alpha=\sqrt{1-\frac{3}{7}}=\sqrt{\frac{4}{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$. Так как $\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$ (по усл.), а $AC=\sqrt{7}$ (по усл.), то $\frac{AD}{\sqrt{7}}=\frac{1}{3}\Rightarrow AD=\frac{\sqrt{7}}{3}$, тогда $DC=AC-AD=\sqrt{7}-\frac{\sqrt{7}}{3}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$. В прямоугольном треугольнике ADE $\sin\alpha=\frac{DE}{AD}\Rightarrow DE=AD\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2}{3}$, а $\cos\alpha=\frac{AE}{DE}\Rightarrow AE=\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

В прямоугольном треугольнике ACH $\sin\alpha = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = AC\sin\alpha = \sqrt{7}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}} = 2$. Так как EH=2AE (доказано выше), то $EH = 2\cdot\frac{1}{\sqrt3} = \frac{2}{\sqrt3}$.

В четырёхугольнике DEHC DE∥CH (доказано выше) и DC ∦ EH (так как являются отрезками, лежащими на сторонах треугольника) => DEHC – трапеция (по определению трапеции). $CH \perp AB \Rightarrow$ $\Rightarrow CH \perp EH \Rightarrow$ EH – высота трапеции DEHC. $S_{DEHC} = \frac{DE+CH}{2}\cdot EH =$ $= \frac{\frac{2}{3}+2}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt3} = \frac{\frac{8}{3}}{\sqrt3} = \frac{8}{3\sqrt3}$. $\triangle CEH$ – прямоугольный (доказано выше) =>

$\Rightarrow S_{CEH} = \frac12\cdot CH\cdot EH = \frac12\cdot 2\cdot\frac{2}{\sqrt3} = \frac{2}{\sqrt3}$. $S_{CDEH} = S_{CED} + S_{CEH} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{CED} = S_{CDEH} - S_{CEH} = \frac{8}{3\sqrt3} - \frac{2}{\sqrt3} = \frac{8-6}{3\sqrt3} = \frac{2}{3\sqrt3}$.

Ответ: $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{2\sqrt3}{3}$; $S_{CED} = \frac{2}{3\sqrt3}$.

№6

Построим графики функций $f(x) = 8x - 6|2x-1|$ и $g(x) = -8x^2+6x+7$

$$f(x) = \begin{cases} 6-4x, & \text{при } x \geq \frac12 \\ 20x-6, & \text{при } x < \frac12 \end{cases}$$

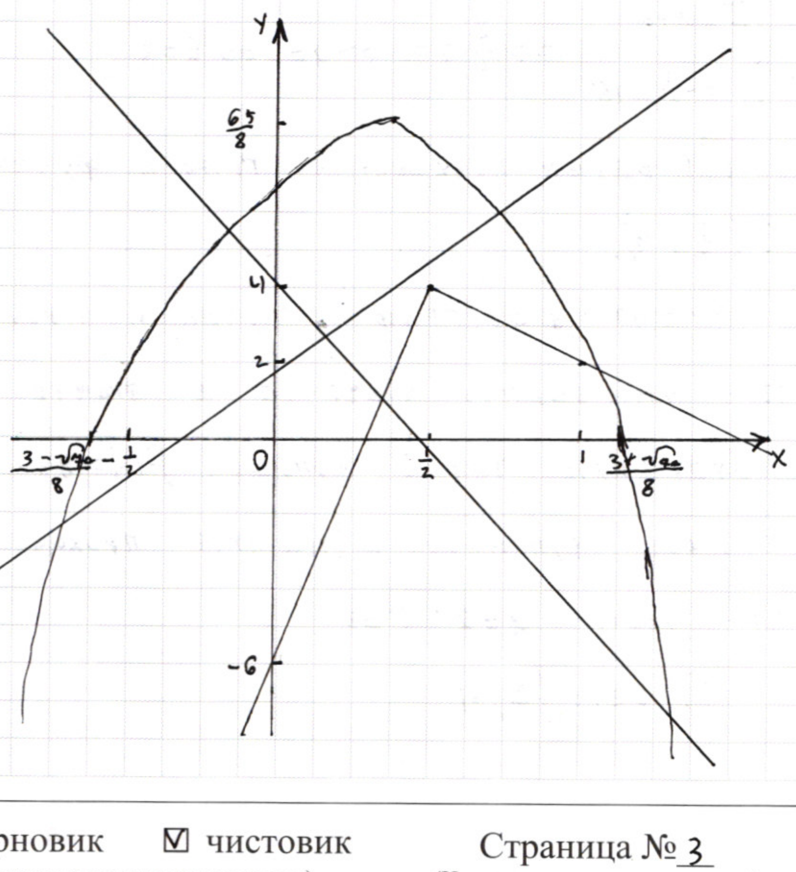
Для функции $g(x)$:

$x_B = -\frac{6}{-18} = \frac38$

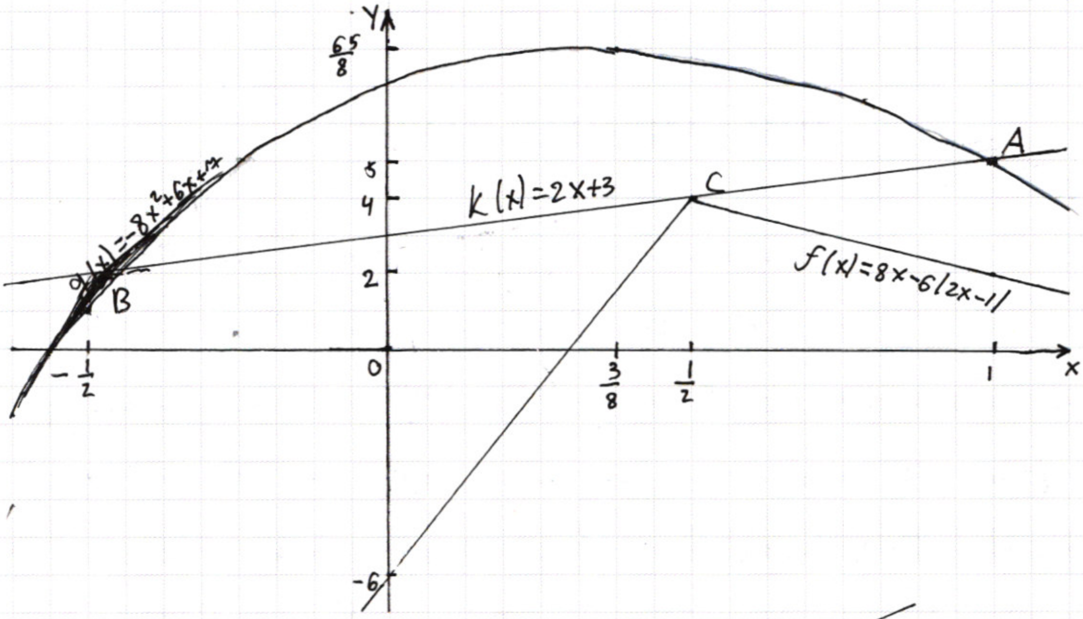
$y_B = -8\cdot\frac{9}{64} + 6\cdot\frac38 + 7 = \frac{65}{8}$

$-8x^2+6x+7=0$

$x = \frac{3\pm\sqrt{70}}{8}$ – нули ф-ции $g(x)$



Построим графики данных функций в одной системе координат.



~~Рассмотрим промежуток $[\frac{1}{2}; 1]$. Пусть $k(x)=ax+b$. Так как $f(x) \le k(x) \le g(x)$ для всех x на данном промежутке, то значение b варьируется от 4 до 5 (т.к. $f(\frac{1}{2})=4$, а $g(1)=5$).~~

Так как на промежутке $[-\frac{1}{2}; 1]$ ~~функция~~ $g(x) \geq k(x)$ (где $k(x)=ax+b$), то подставив координаты точек $A(1;5)$ и $B(-\frac{1}{2};2)$ мы сможем найти максимально возможное значение b.

$$-\begin{cases} 5=a+b \\ 2=-\frac{1}{2}a+b \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}a=3 \Rightarrow a=2 \Rightarrow b=3.$$

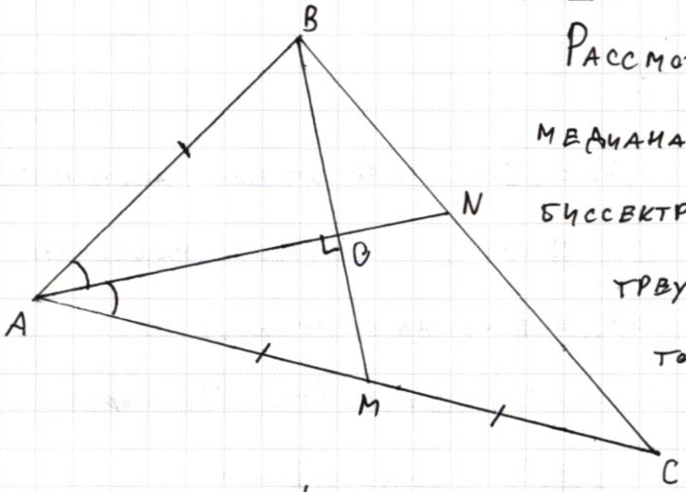
Проверим, проходит ли график функции $k(x)=2x+3$ через точку $C(\frac{1}{2}; 4)$.

$2\cdot\frac{1}{2}+3=4 \Rightarrow$ график функции проходит через эту точку. Значит, при уменьшении значения b график функции $k(x)$ будет пересекать график функции $f(x)=8x-6|2x-1| \Rightarrow b=3$. Значит, график функции $k(x)=ax+b$ проходит через точки A, B и C, при этом $a=2$; $b=3$.

Ответ: $(2;3)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№9



Рассмотрим такой $\triangle ABC$ в котором медиана BM перпендикулярна биссектрисе AN. Рассмотрим прямоугольные треугольники AOM и AOB (т. O – точка пересечения AN и BM). $\angle MAO = \angle BAO$, AO – общая $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AOM = \triangle AOB$ (по признаку равенства прямоугольных треугольников) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AM = AB$ (как соответствующие элементы равных треугольников).

Тогда $AB = AM = CM = \frac{1}{2}AC$. Итого следует найти количество таких треугольников, в которых одна из сторон равна половине другой стороны. Рассмотрим треугольник со сторонами a, b и c, в котором одна из медиан перпендикулярна одной из биссектрис, тогда $a = \frac{b}{2}$. Периметр этого треугольника равен 900. Согласно неравенству треугольника:

$$\begin{cases} c < a+b \\ b < a+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c < \frac{b}{2}+b \\ b < \frac{b}{2}+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c < \frac{3b}{2} \\ c > \frac{b}{2} \end{cases}$$

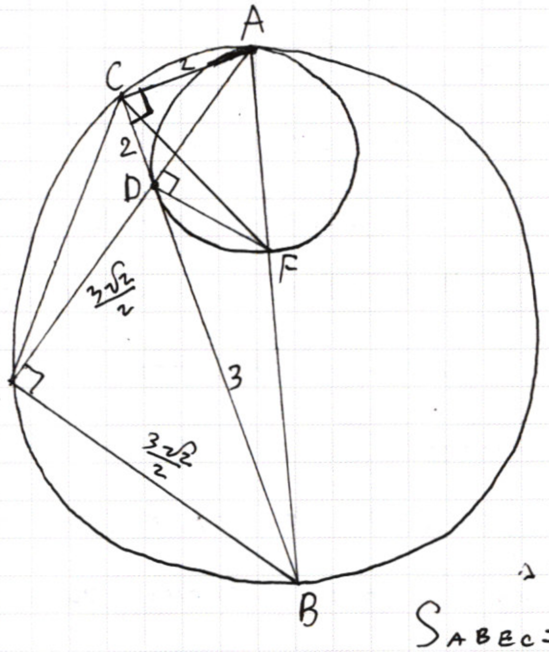
$$a+b+c=900 \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{2}+b+\frac{b}{2} < 900 \\ \frac{b}{2}+b+\frac{3b}{2} > 900 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b < 900 \\ 3b > 900 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 450 \\ b > 300. \end{cases}$$

Так как $a = \frac{b}{2}$ и a – целое число (по усл.), то b должно быть чётным. Остаётся найти количество чётных чисел в интервале $(300; 450)$. Обозначим количество чётных чисел

в этом интервале за k. Тогда $302+2k=448 \Rightarrow 151+k=224 \Rightarrow$
$\Rightarrow k=73$. Остаётся добавить к k единицу, чтобы посчитать крайнее чётное число. Итого существует 74 треугольника с периметром 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

Ответ: 74.

№5



$AC=CD=2$ (как отрезки касательных)
$\angle ACB=90^\circ$ (т.к. опирается на диаметр) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle ACD$ – равноб. прямоуг. $\Rightarrow$
$\Rightarrow AD^2=AC^2+CD^2$ (по т. Пифагора) $\Rightarrow$
$\Rightarrow AD^2=4+4=8 \Rightarrow AD=2\sqrt{2}$.
$AD\cdot DE=BC\cdot CD$ (по св. хорд в окр.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow DE=\frac{BC\cdot CD}{AD}=\frac{3\cdot 2}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.
$\triangle ACD$ – равноб. прямоуг. $\Rightarrow \angle ADC=\angle CAD=45^\circ$.

$S_{ABEC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AE\cdot \sin\angle ADC=$
$=\frac{1}{2}(2+3)\left(2\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{4\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5}{2}\cdot\frac{7\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5\cdot 7\cdot 2}{4\cdot 2}=\frac{35}{4}=8{,}75$.

По т. косинусов для $\triangle DEB$: $BE^2=DE^2+BD^2-2DE\cdot BD\cdot\cos\angle BDE=$
$=\frac{9}{2}+9-2\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{9}{2}+9-\frac{3\cdot 3\cdot 2}{2}=\frac{9}{2}+9-9=\frac{9}{2} \Rightarrow BE=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.
$AE=DE+AD=\frac{3\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$. $\angle AEB=90^\circ$ (т.к. опирается на диаметр) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle ABE$ – прямоугольный. По т. Пифагора в $\triangle ABE$: $AB^2=AE^2+BE^2=$
$=\frac{49}{2}+\frac{9}{2}=\frac{58}{2}=29 \Rightarrow AB=\sqrt{29}$. Пусть R и r – радиусы большой и маленькой окружностей соответственно. Т.к. AB – диаметр, то $AB=2R \Rightarrow$
$\Rightarrow R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{29}}{2}$. Пусть F – т. пересечения AB с маленькой окружностью. $\angle ADF=90^\circ$ (т.к. опирается на диаметр) $\Rightarrow \triangle ADF$ – прямоугольный. $\triangle ADF \sim \triangle ABE$ (по I признаку подобия треугольников) $\Rightarrow$ $\cancel{\frac{DE}{BE}=\frac{AF}{AB} \Rightarrow AF=\frac{AB\cdot DF}{BE}=\sqrt{29}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AF = \frac{AB \cdot AD}{AE} = \frac{\sqrt{29} \cdot 2\sqrt{2}}{\frac{7\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{29} \cdot \sqrt{2}}{1} \cdot \frac{2}{7\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{29}}{7}$. Так как AF - диаметр, то $AF = 2r \Rightarrow r = \frac{AF}{2} = \frac{2\sqrt{29}}{7}$.

Ответ: $S_{ABEC} = 8,75$; $R = \frac{\sqrt{29}}{2}$; $r = \frac{2\sqrt{29}}{7}$.

№3

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$xy - 6y - x + 6 = x(y-1) - 6(y-1) = (y-1)(x-6)$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \Rightarrow (x^2 - 12x + 36) + 2y^2 - 4y - 16 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-6)^2 + (y^2 - 2y + 1) + (y^2 - 2y + 1) - 18 = 0 \Rightarrow (x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \cancel{\Rightarrow (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 2,9 \Rightarrow}$

$\cancel{\Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4. \end{cases}}$

~~Подставим найденные значения x и y в первое уравнение:~~

$\cancel{\sqrt{xy - 6y - x + 6} \geq 0 \Rightarrow x - 6y \geq 0 \Rightarrow x \geq 6y.}$ ~~При $x = 6y$~~

$\cancel{6y^2 - 6y - 6y + 6 = 0 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 6.}$ ~~Подставим во 2 ур-ие:~~

$\cancel{6^2 + 2 \cdot 1^2 - 12 \cdot 6 - 4 + 20 = 36 + 2 - 72 + 16 =}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\overset{1}{a}, \; \overset{2}{b} = aq, \; \overset{3}{c} = aq^2$

$\overset{4}{a}x^2 - 2bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0 \Rightarrow a(x^2 - 2qx + q^2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a(x-q)^2 = 0$

$\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ x = q \end{array}\right.$

$q = aq^3 \Rightarrow$

$x = ax^3 \Rightarrow x(ax^2 - 1) = 0$

1) При $a = 0 \Rightarrow b = 0, c = 0$, а т.к. пр-сия геом, то и d (четв. член) равен нулю. ~~Подставим a, b, c в ур-ие 4 члена. $ax^2 - 2$~~

2) При $x = q \Rightarrow a = a, \; b = ax, \; c = ax^2 \Rightarrow x = ax^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow ax^3 - x = 0 \Rightarrow x(ax^2 - 1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = \frac{1}{a} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{a}} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} q = 0 \\ q = \pm\frac{1}{\sqrt{a}} \end{array}\right.$

При $q = 0 \Rightarrow c = 0$.

При $q = \frac{1}{\sqrt{a}} \Rightarrow c = a \cdot \frac{1}{a} = 1$, При $q = -\frac{1}{\sqrt{a}} \Rightarrow c = a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

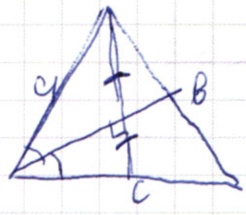
$a(x-q)^2 = 0 \Rightarrow a(aq^3 - q) = 0$

$c = 0 \Rightarrow a = 0, \; b = 0, \; c = 0$

$3\,4y^2 - 13xy$

$b_2 = b_1 q \Rightarrow q = \frac{b_2}{b_1}$

$x^2 + 36y^2 - 13xy + x + 6y - 6 - x^2 - 2y^2 + 12x + 4y - 20 = 0$



$a + b + c = 900$

$34y^2 - 13xy + 13x + 10y - 26 = 0$

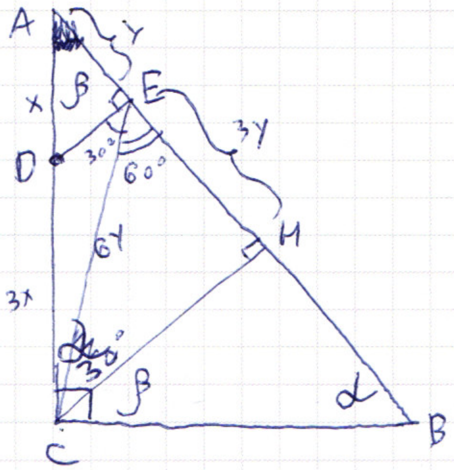
$a, b, c \in \mathbb{N}$

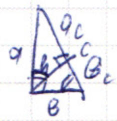
$x^2 - 12xy + 36y^2$

$\left\{\begin{array}{l} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{array}\right.$

Т.к. $\sqrt{xy - 6y - x + 6} \geq 0$, то $x - 6y \geq 0 \Rightarrow$ возведем в кв

$\left\{\begin{array}{l} x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6 \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + 36y^2 - 13xy + x + 6y - 6 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{array}\right.$





$\cancel{h = \sqrt{c \cdot a_c}}$

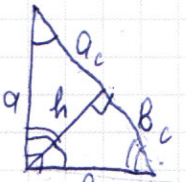
$\frac{h}{a_c} = \frac{b}{a} = \frac{b}{h} a \Rightarrow$ $h = \sqrt{a_c \cdot c}$

$h = \sqrt{a \cdot a_c}$

$$\frac{CH}{AH} = \frac{BH}{CH} = \frac{BC}{AC}$$

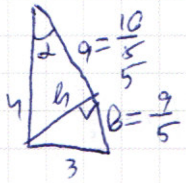
$\cancel{\frac{CH}{BC}} \Rightarrow \frac{CH}{BC} = \frac{AH}{AC} \cancel{= \frac{AC}{AB}} \Rightarrow CH = \frac{AC \cdot BC}{AB}$

$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$



$\frac{b_c}{h} = \frac{h}{a_c}$

$\frac{b_c}{b} = \frac{h}{a} \Rightarrow h = \frac{a b_c}{b}$



$h = \frac{12}{5} = 2,4$

$\cancel{\sin \alpha = \frac{3}{5} = \frac{h}{4}}$ $\cos \alpha = \frac{4}{5} = \frac{a}{4} \Rightarrow a = \frac{16}{5}$

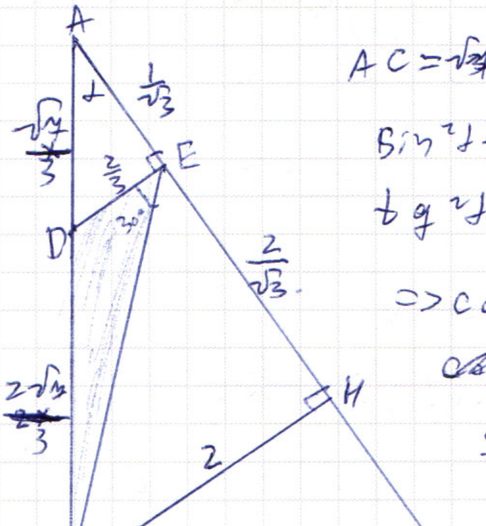
$b = 5 - \frac{16}{5} = \frac{25-16}{5} = \frac{9}{5}$

$640 | 5$, 128

$h = \sqrt{a_c \cdot c} = \sqrt{\frac{16}{5} \cdot 5} = \sqrt{16} = 4$

$h = \sqrt{a_c \cdot a} = \sqrt{\frac{16}{5} \cdot 4} = \sqrt{\frac{640}{5}} = \sqrt{128}$

$tg\, \beta = \frac{CH}{4Y}$, $CH = \sqrt{36Y^2 - 9Y^2} = \sqrt{27Y^2}$ $\quad ctg^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$



$AC = \sqrt{7} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $CD = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 = \mid : \cos^2 \alpha$

$tg^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cancel{\frac{1}{\cos}} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{4 \cdot 3}{9} + 1 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{3}{7} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. (т.к. α - острый).

$\cancel{\cos \alpha = \frac{AE}{}}$

$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

$\sin \alpha = \frac{DE}{AD} = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow DE = \frac{2AD}{\sqrt{7}} = \frac{2 \cdot \sqrt{7}}{3 \cdot \sqrt{7}} = \frac{2}{3}$

$\sin \alpha = \frac{CH}{AC} = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow CH = \frac{2AC}{\sqrt{7}} = \frac{2 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7}} = 2$.

$AE = \sqrt{\frac{7}{9} - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$EH = 2AE = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

$S_{CDEH} = \frac{DE + CH}{2} \cdot EH = \frac{\frac{2}{3} + 2}{\cancel{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{8}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$.

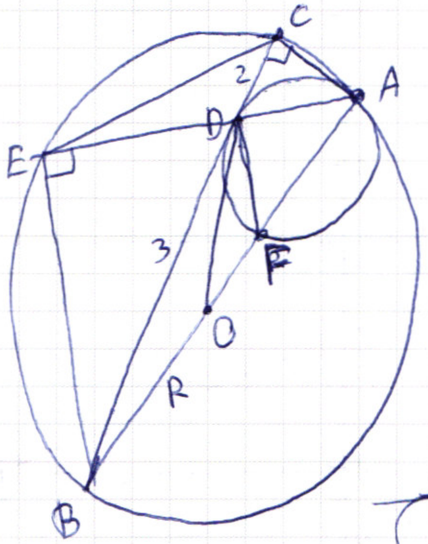
$S_{CEH} = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot EH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$!

$S_{DEC} = \frac{8}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3\sqrt{3}} - \frac{6}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$BD^2 = BF \cdot BA \Rightarrow$

$\Rightarrow 9 = (R + OF)\, 2R$

$8x - 6|2x-1| \le ax + b$

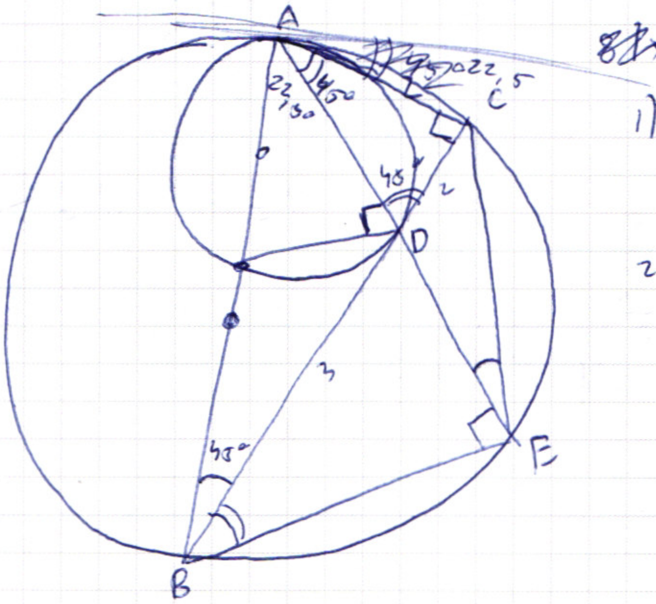
$\cancel{8x}\ 8x - 6|2x-1|$

1) $2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

$8x - 12x + 6 = 6 - 4x$

2) $2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$

$8x + 12x - 6 = 20x - 6$



$Y = ax + b$

$\begin{cases} 2 = -\frac{1}{2}a + b \\ 5 = a + b \end{cases}$

$a + b + \frac{1}{2}a - b = 3$

$\frac{3}{2}a = 3 \Rightarrow \frac{1}{2}a = 1 \Rightarrow a = 2$

$b = 3$

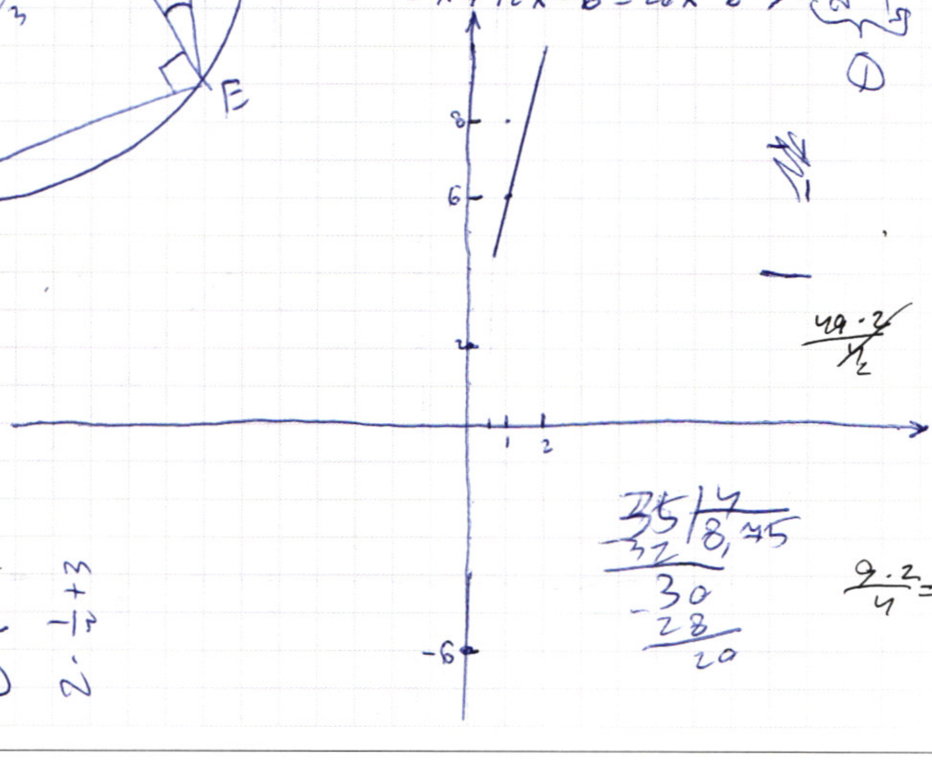
$y\left(-\frac{1}{2}\right) = -8 \cdot \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{2} + 7 = -2 - 3 + 7 = 2$

$A\left(-\frac{1}{2}; 2\right),\ B(1; 5)$

$k(x) = \boxed{2x + 3}$

$C\left(\frac{1}{2}; 4\right)$

$2 \cdot \frac{1}{2} + 3$



$\frac{49 \cdot 2}{1/2}$

$35 : 4 = 8{,}75$
-32
30
-28
20

$\frac{9 \cdot 2}{4} = \frac{9}{2}$

$y = \begin{cases} 6-4x, & x \geq \frac{1}{2} \\ 20x-6, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

$8x^2-6x-7=0$

$D=36+24=280$

$x=\frac{6\pm2\sqrt{70}}{16}=\frac{3\pm\sqrt{70}}{8}$

280 | 2
140 | 2
70 | 2
35 | 5
7 |

$28 \cdot 8 = 224$

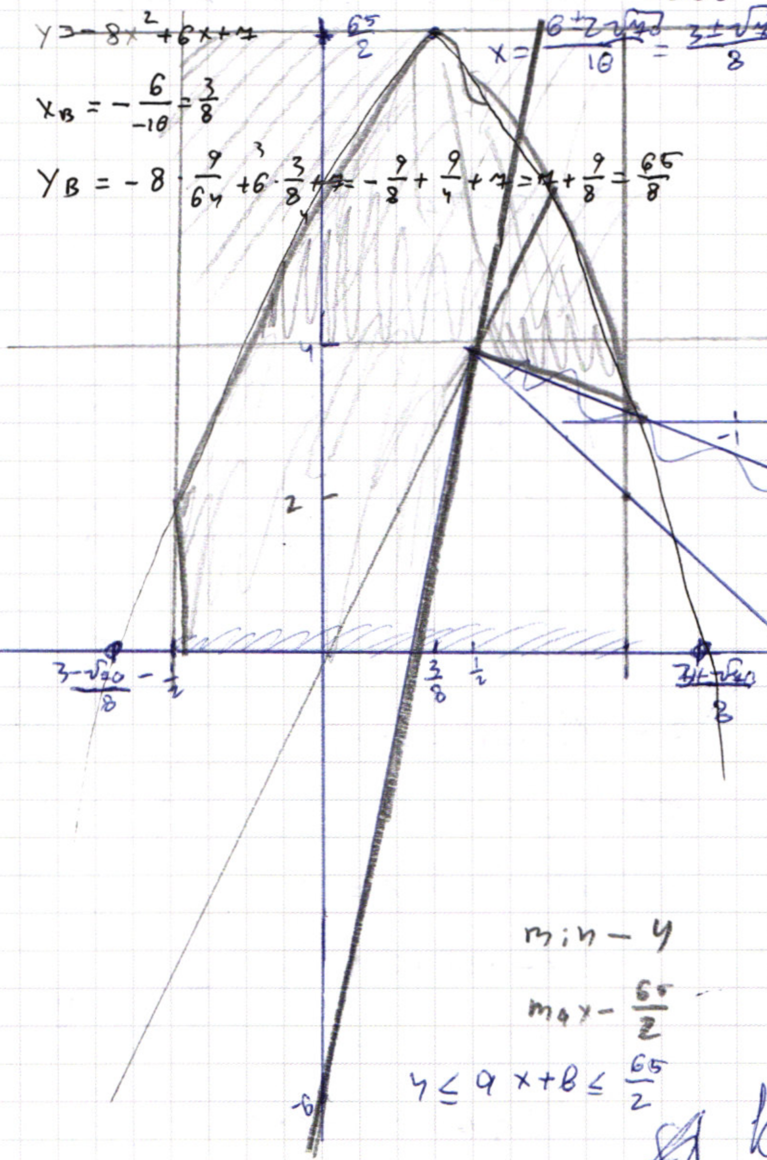
$224 + 36 = 280$

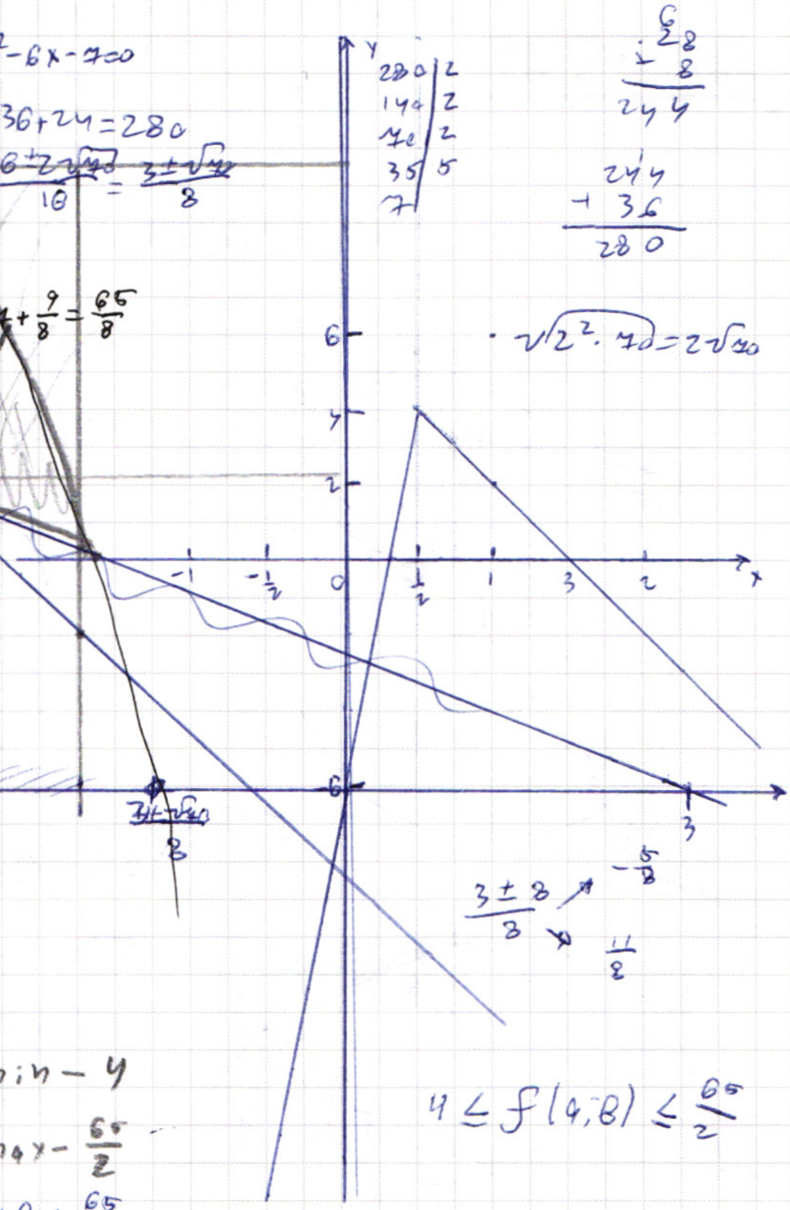
$\sqrt{2^2\cdot 70}=2\sqrt{70}$

$y=-8x^2+6x+7$

$x_B=-\frac{6}{-16}=\frac{3}{8}$

$y_B=-8\cdot\frac{9}{64}+6\cdot\frac{3}{8}+7=-\frac{9}{8}+\frac{9}{4}+7=7+\frac{9}{8}=\frac{65}{8}$





$\frac{3\pm8}{8}$ → $-\frac{5}{8}$, $\frac{11}{8}$

min − 4

max − $\frac{65}{2}$

$4 \leq ax+b \leq \frac{65}{2}$

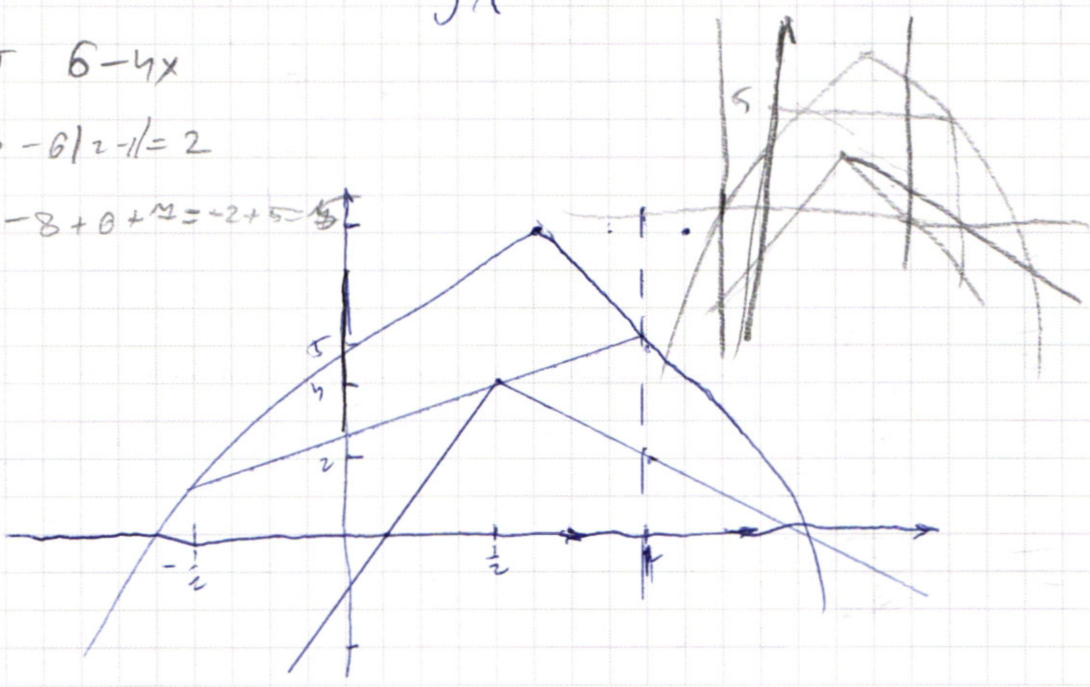
$4 \leq f(a;b) \leq \frac{65}{2}$

$k\left(-\frac{1}{2}\right) \leq$

от $6-4x$

$8-6|2-1|=2$

$-8+6+7=-2+5=...$



☐ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

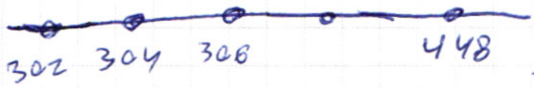
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$\cancel{B=x-6y}$

$$\begin{array}{r} 224 \\ -151 \\ \hline 73 \end{array}$$



204

$302+2k=402$

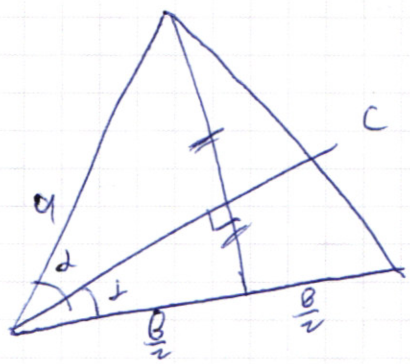
$151+k=204$

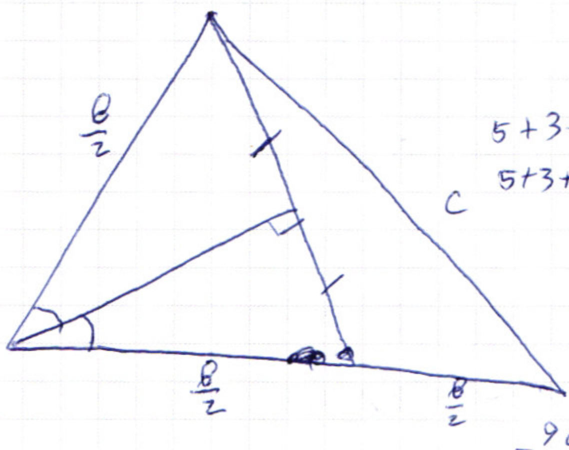
$\cancel{k=\sqrt{xy+6}-1}$

$\cancel{(x-6y)+x^2+2y^2-13x+2y+20=0 \Rightarrow x-6y=13x-x^2-2y^2-2y-20}$ $k=$

$$\begin{cases} xy-6y-x+6\geq 0 \\ x-6y\geq 0 \Rightarrow x\geq 6y \end{cases} \Rightarrow 6y^2-6y-6y+6\geq 0 \Rightarrow y^2-2y+1\geq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (y-1)^2\geq 0$

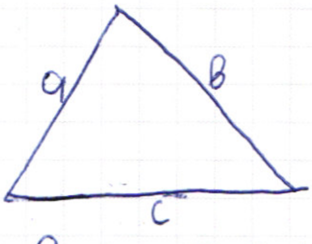




$5+3+4=12$

$5+3+3$

$\frac{3B}{2}+C=900 \Rightarrow 3B+2C=1800$



$a=\frac{B}{2}$

$\frac{180\cdot 3}{2}=270$

$$\begin{array}{r|l} -900 & 5 \\ \underline{5} & \overline{180} \\ 40 & \end{array}$$

$\cancel{C<a+B \Rightarrow C<\frac{3B}{2}}$

$\cancel{a+B+C=900 \Rightarrow \frac{B}{2}+B+\frac{3B}{2}<900 \Rightarrow 5B<900 \Rightarrow}$

$\cancel{\Rightarrow B<180 \Rightarrow a<90,\ C<270.}$

$a+B+C=900$

$$\begin{cases} C<a+B \Rightarrow C<\frac{3B}{2} \\ a+B+C=900 \Rightarrow \frac{3B}{2}+C=900 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C>\frac{B}{2} \\ C<\frac{3B}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{2}+B+\frac{B}{2}<900 \\ \frac{B}{2}+B+\frac{3B}{2}>900 \end{cases} \Rightarrow$$

$a<B+C \Rightarrow \frac{B}{2}<B+C \Rightarrow$

$B<a+C \Rightarrow B<\frac{B}{2}+C \Rightarrow \frac{B}{2}<C$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2B<900 \\ 5B>900 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B<450 \\ B>180 \end{cases}$$

2 4 6 8

$2+2k=8$

$1+k=4$

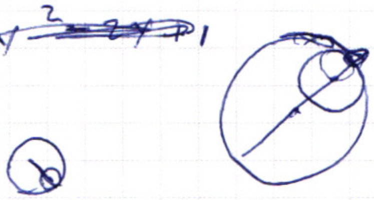
1 2) 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 (14

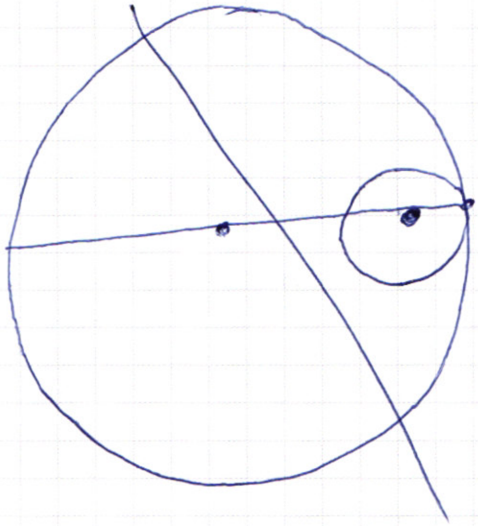
5

$4+2k=12 \Rightarrow 2+k=6 \Rightarrow k=4$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

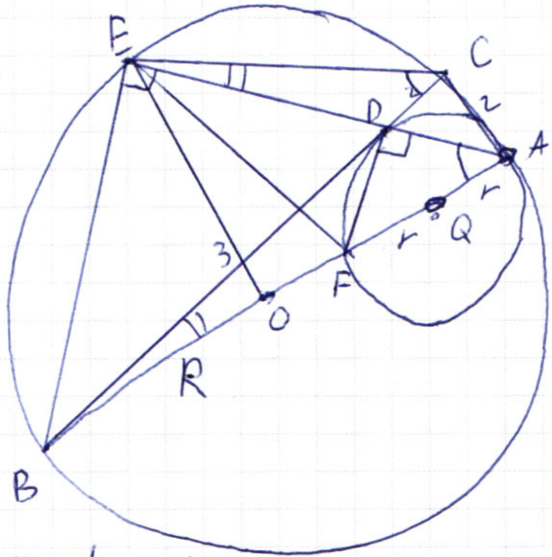




$\sqrt{x(y-6)}$

$\sqrt{xy-6y-x+6} = \sqrt{x(y-1)-6(y-1)} =$

$= \sqrt{(y-1)(x-6)}$



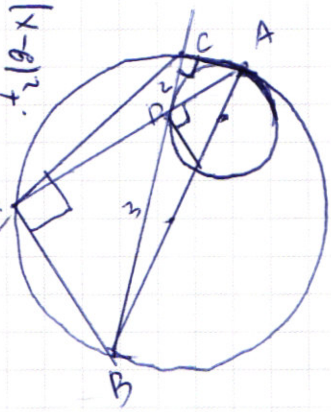
$BD \cdot BC = BF \cdot BA \Rightarrow$

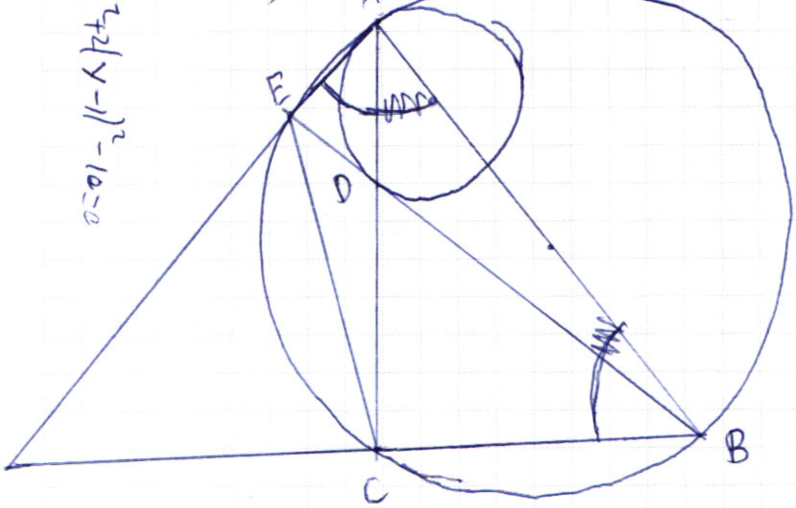
$\Rightarrow 15 = (R+OF)2R$

$(y-1)^2 = y^2-2y+1$

$x^2-12x = x(x-12)$

$2y^2-4y = 2y(2y-2)$





$x \geq 6y$

$x^2-12y+36y^2 = xy-6y-x+6$

$$\begin{cases} x^2+y^2-6y-xy+x-6 \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$x^2+2y^2-12x-4y+20-x^2-y^2+6y+xy-x+6=0$

$y^2-13x+2y+xy+26=0.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)