МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

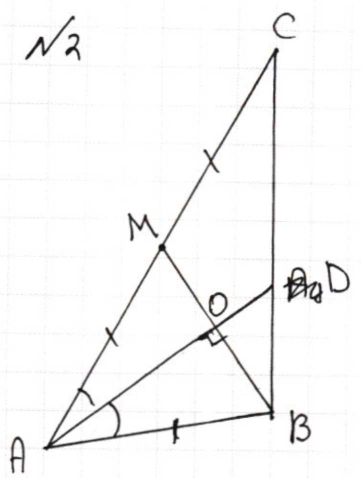
Пусть соседние члены прогрессии отличаются в K раз.

$ax^2+2aKx+aK^2=0$, $D=4a^2K^2-4a^2K^2=0$, $x=\frac{-2aK}{2a}=-K$.

$aK^3=-K$ (по условию корень — четвёртый член прогрессии). $\Rightarrow aK^2=-1$ (т.к. $K\neq 0$). aK^2 — это и есть третий член прогрессии.

Ответ: -1.

№2



1) AD — биссектриса $\angle BAC$; BM — медиана. $AD \perp BM$. $\Rightarrow$ AO — и биссектриса, и высота в $\triangle AMB \Rightarrow$ он равнобедренный. $\Rightarrow AM = AB$. И наоборот: если AC в 2 раза больше AB, то $\triangle AMB$ равнобедренный, AO — биссектриса, проведённая из вершины равнобедренного треугольника $\Rightarrow$ высота. $AD \perp BM$ тогда и только тогда, когда $AC = 2AB$.

2) $AB = a$. $AC = 2a$, $BC = 1200 - 3a$.

$3a > 1200 - 3a$, $a > 200$; $1200 - 2a > 2a$, $a < 300$;

$1200 - a > a$, $a < 600$. $\Leftrightarrow$ $200 < a < 300$. $\Rightarrow$ таких треугольников ~~100~~ 99, т.к. a целочисленное.

Ответ: 99.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Ла~~ №3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} & (1)\\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 & (2)\end{cases}$$

(1):

ОДЗ: $xy-2x-y+2\geq 0$; возведём в квадрат:

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$y^2-(5x-1)y+(4x^2+2x-2)=0$, $D=25x^2-10x+1-16x^2-8x+8=$

$=9x^2-18x+9=9(x-1)^2$

$y=\dfrac{5x-1\pm 3|x-1|}{2}=\dfrac{5x-1\pm3(x-1)}{2}$, $y_1=x+1$, $y_2=4x-2$

Вернёмся к ОДЗ: • $x^2+x-2x-x-1+2=(x-1)^2\geq 0$ всегда

~~......~~ • $4x^2-2x-2x-4x+2+2=4x^2-8x+4=$

$=4(x-1)^2\leftarrow$ тоже верно всегда.

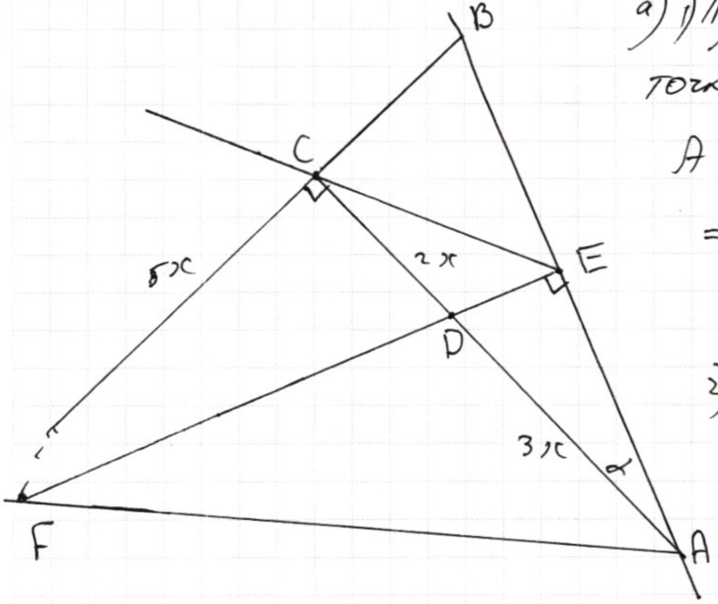
(2):

$$\left[\begin{array}{l}2x^2+y_1^2-4x-4y_1+3=0\\ 2x^2+y_2^2-4x-4y_2+3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x^2+x^2+2x+1-4x-4x-4+3=0\\ 2x^2+16x^2-16x+4-4x-16x+8+3=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-6x=0\\ 18x^2-36x+15=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0;\ x=2\quad (y=1;\ y=3)\\ x=1-\frac{\sqrt6}{6};\ x=1+\frac{\sqrt6}{6}\quad \left(y=2-\frac{3\sqrt6}{3};\ y=2+\frac{2\sqrt6}{3}\right)\end{array}\right.$$

Ответ: $(0;1)$, $(2;3)$, $\left(1-\frac{\sqrt6}{6};\ 2-\frac{2\sqrt6}{3}\right)$, $\left(1+\frac{\sqrt6}{6},\ 2+\frac{2\sqrt6}{3}\right)$.

№4



а) 1) Пусть BC пересекает DE в точке F. Четырёхугольник $AECF$ вписанный, т.к. $\angle ACF = \angle AEF = 90°$. $\Rightarrow \angle CAF = \angle FEC = 45°$. $\Rightarrow AC = CF$.

2) Пусть также $AD = 3x$, тогда $DC = 2x$, $AC = 5x$.

$\Rightarrow CF = 5x$.

3) Четырёхугольник $DCBE$ тоже вписанный, т.к. $\angle DCB + \angle BED = 2\cdot 90° = 180°$

$\Rightarrow \angle BAC = \angle CFD$. $\Rightarrow tg\angle BAC = \frac{2}{5} = 0,4$

б) $CD = \frac{2}{5}\sqrt{29}$; $\cancel{tg}\angle BAC = \alpha$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$; $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$.

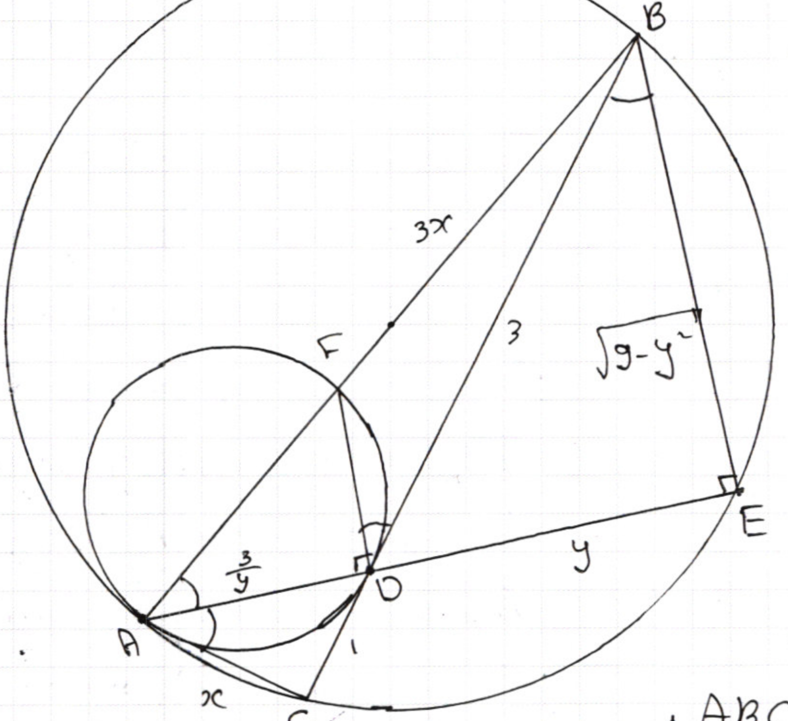
$DE = \frac{2}{\sqrt{29}}\cdot\frac{3}{5}\sqrt{29} = \frac{6}{5}$. $S_{CDE} = \frac{CD\cdot DE\cdot \sin\angle CDE}{2} =$

$= \frac{CD\cdot DE\cdot\cos\alpha}{2} = \frac{\sqrt{29}}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{6}{5} = 1,2$.

Ответ: а) 0,4; б) 1,2.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



1) Пусть AB повторно пересекает ω в точке F. AF — диаметр ω; 2) пусть $\angle BDF = \alpha$, тогда $\angle BAD = \alpha$ и $\angle DBE = \alpha$, т.к. $DF \parallel BE$ ($\angle ADF = \angle AEB = 90^\circ$).
$\Rightarrow \angle DAC = \alpha$
$\Rightarrow AD$ — биссектриса $\triangle ABC$. 3) Пусть $AC = x$, тогда $AB = 3x$, т.к. отношение $CD : BD = 1:3$.

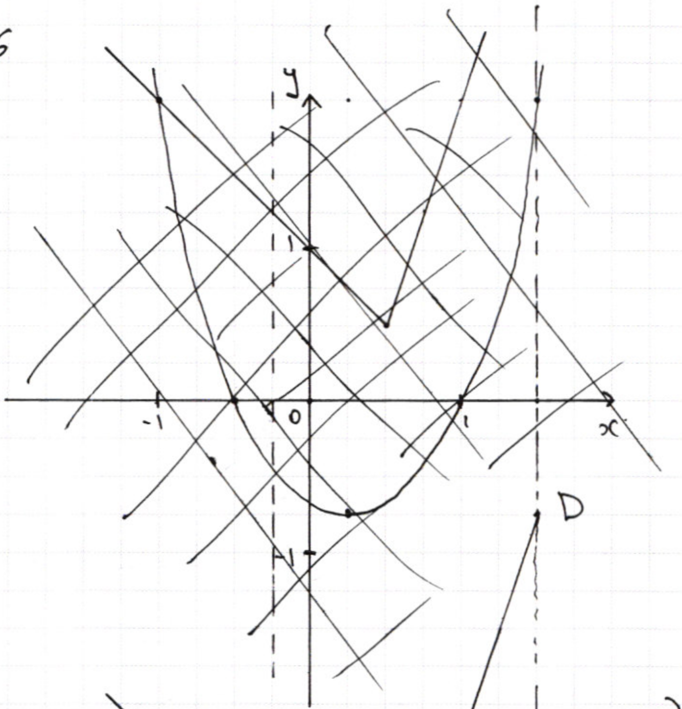
По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$, $9x^2 = x^2 + 16$
$\Rightarrow x = \sqrt{2}$. $\Rightarrow AB = 3\sqrt{2}$, радиус Ω равен $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. (R)

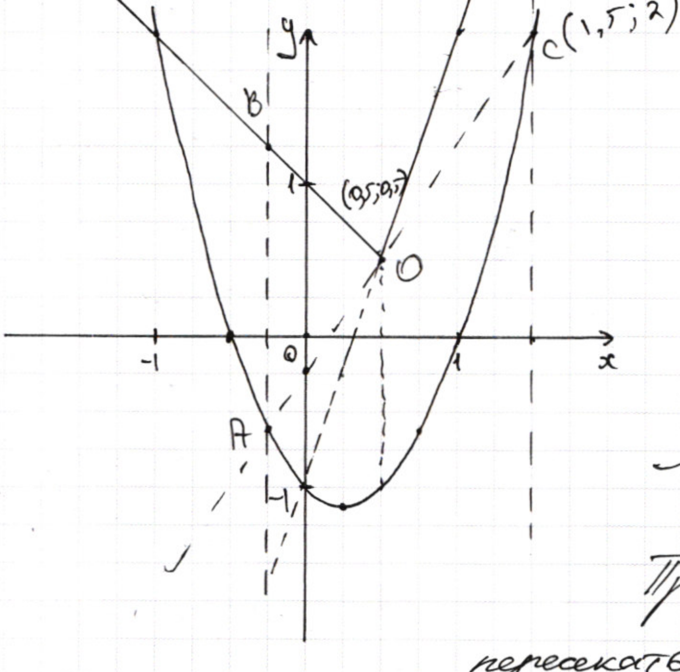
4) Пусть $DE = y$, тогда $BE = \sqrt{9-y^2}$. $\triangle DBE \sim \triangle ABE$.
$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{9-y^2}}{y+\frac{3}{y}} = \dfrac{y}{\sqrt{9-y^2}}$, $y^2+3 = 9-y^2$, $2y^2 = 6$, $y = \sqrt{3}$.
$\Rightarrow AD = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, $\Rightarrow DF$ — средняя линия $\triangle ABE$.
$\Rightarrow$ радиусы ω и Ω относятся $2:1$. $\Rightarrow r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

5) $S_{ADC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $S_{BED} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $\cancel{\sin}$ $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$
$\Rightarrow S_{ABD} = \frac{\sqrt{6}}{3}\cdot 3\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $S_{CDE} = 1\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
$\Rightarrow S_{ABEC} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\frac{3\sqrt{2}}{4}$, $4\sqrt{2}$.

№6





Парабола пересекает вертикальную прямую $x = -0{,}25$ в точке $(-0{,}25; -0{,}625)$. ← A

Она также пересекает вертикальную прямую $x = 1{,}5$ в точке $(1{,}5; 2)$. ← C

„Галочка" пересекает эти две прямые в точках $(-0{,}25; 1{,}25)$ ← B и $(1{,}5; 3{,}5)$ ← D.

Прямая $ax+b$ должна пересекать AB и CD в точках X и Y, находящихся между A и B, C и D, а также $0{,}5a + b \le 0{,}5$. AC содержит O, B и D выше A и C.

=> есть лишь одна подходящая прямая (проходит через A и C):

$$\begin{cases} -0{,}625 = -0{,}25a + b \\ 2 = 1{,}5a + b \end{cases} \Rightarrow -\frac{15}{4} + 2 = 7b,\ b = -0{,}25$$

$$\to a = \frac{2{,}25}{1{,}5} = 1{,}5$$

Ответ: $(1{,}5; -0{,}25)$.

№7

$f(a \cdot 1) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0, \; f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{p}\right) = \cancel{\frac{1}{p}} - \left[\frac{p}{2}\right],$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$. Нужно найти кол-во пар $(x;y)$ таких, что $f(x) \cancel{\neq} < f(y)$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
f(n)	0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4

f	кол-во
0	1
1	2
2	4
3	6
4	4
5	1
6	1
7	0
8	1
9	1

Произвольным образом выбрать пару $(x;y)$ можно $\frac{21 \cdot 20}{2} = 210$ способами. Если $f(x) \neq f(y)$, то пара подходит (т.к. порядок не имеет значения, можно поменять местами). $\Rightarrow$ чтобы получить ответ нужно из 210 вычесть кол-во способов выбрать пару с равными значениями функции.

f	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
кол-во способов	0	1	6	15	6	0	0	0	0	0

$\Rightarrow$ кол-во пар равно $210 - (15 + 2 \cdot 6 + 1) = 210 - 28 = 182$.

Ответ: 182.

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$a, K, \ b = aK, \ c = aK^2;$

$ax^2 + 2aKx + aK^2 = 0$

$D = 4a^2K^2 - 4a^2K^2 = 0$

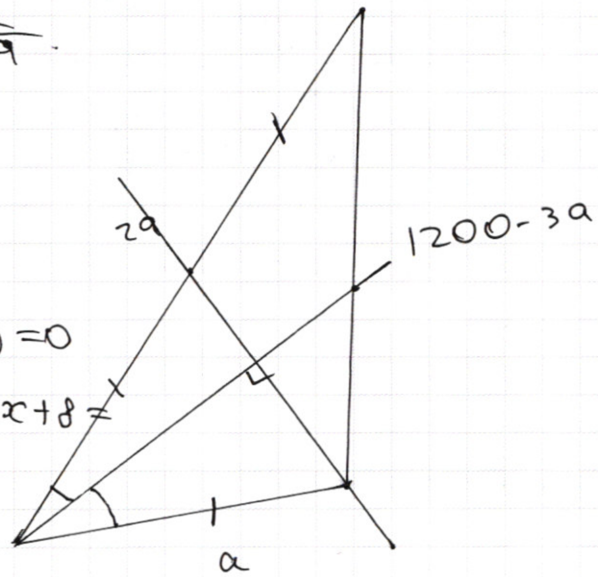
$x = \frac{-2aK}{2a} = -\cancel{2a}K \leftarrow$ четвёртый член прогрессии.

$K^3 = -\frac{\cancel{2}K}{a}, \quad K^2 = -\frac{2}{a}.$

$aK^2 = -2.$

$\frac{5x-1+\cancel{2}-3x+3}{2} = x+$

$\frac{5x-1+3x-3}{2} = 4x-2$



$\cancel{y^2 - 5xy}$

$y^2 - (5x-1)y + (4x^2+2x-2) = 0$

$D = 25x^2 - 10x + 1 - 16x^2 - 8x + 8 =$

$= 9x^2 - 18x + 9$

$1200 - 3a \leq a + 2a$

$1200 \leq 6a$

$200 \leq a;$

$2a \leq 1200 - 2a$

$\cancel{4a \leq 1200}$

$4a \leq 1200$

$a \leq 2a + 1200 - 3a$

$2a \leq 1200$

201;299

~~гипербола~~
~~эллипс~~ парабола? .....

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

$(y-2)^2 - 4 + 2(x-1)^2 - 2 + 3 = 0$

$(y-2)^2 + 2(x-1)^2 = 3$

$\frac{(y-2)^2}{3} + \frac{2(x-1)^2}{3} = 1$

$x^2+x-2x-x-1+2=x^2-2x+1$

$4x^2-2x-2x-4x+2+2=4x^2-8x+4$

$2x^2+x^2+2x+1-4x-4x-4+3=0$

$3x^2-6x=0$

$2x^2+16x^2-16x+4-4x-16x+8+3=0$

$18x^2-36x+15=0$

$3x(x-2)=0$

$6x^2-12x+5=0$ $\qquad 5\cdot 24=120$ $\qquad \cos\angle$

$D=144-120=24=(2\sqrt{6})^2$ $\qquad 2;5;$

$x_1=\frac{12-2\sqrt{6}}{12}=1\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$ $\qquad \sqrt{29}$

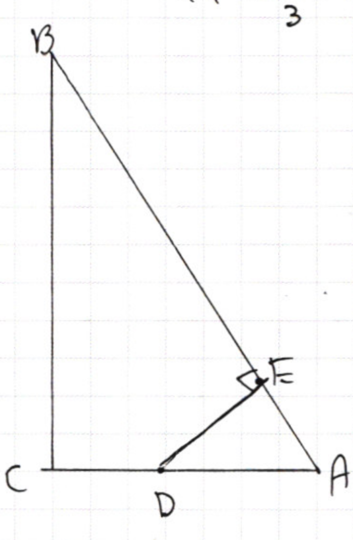
$4-\frac{2\sqrt{6}}{3}-2=2-\frac{2\sqrt{6}}{3}$

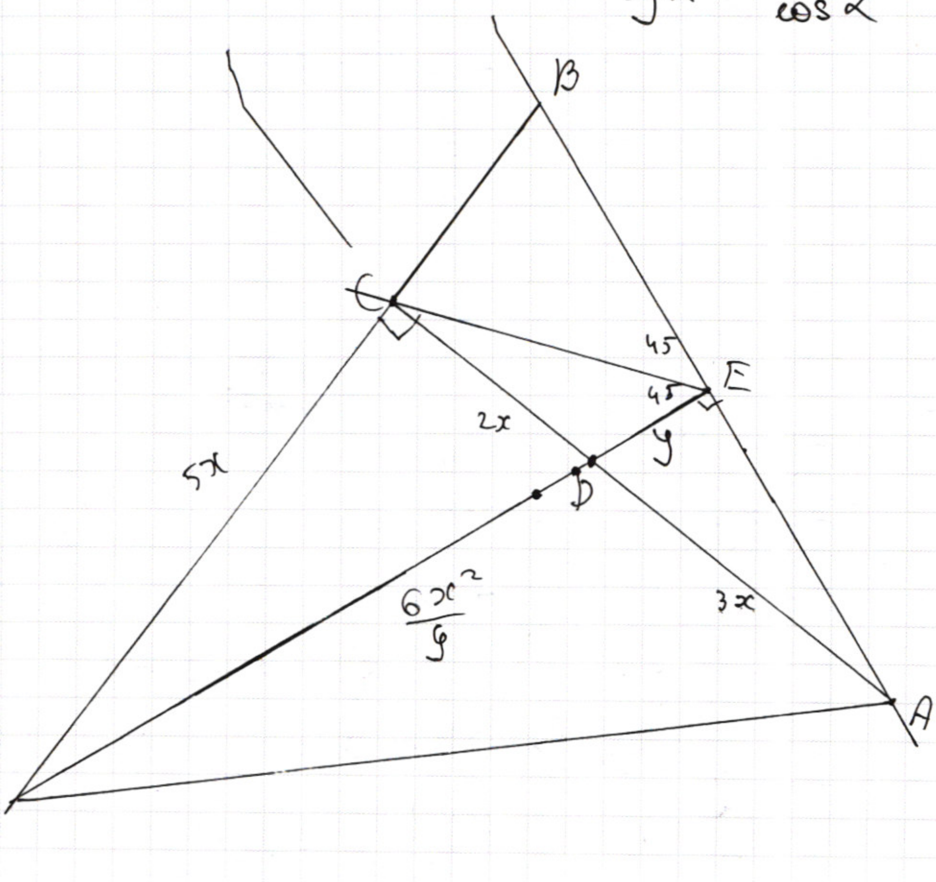
$AC=\sqrt{29}$

$4+\frac{2\sqrt{6}}{3}-2=2+$

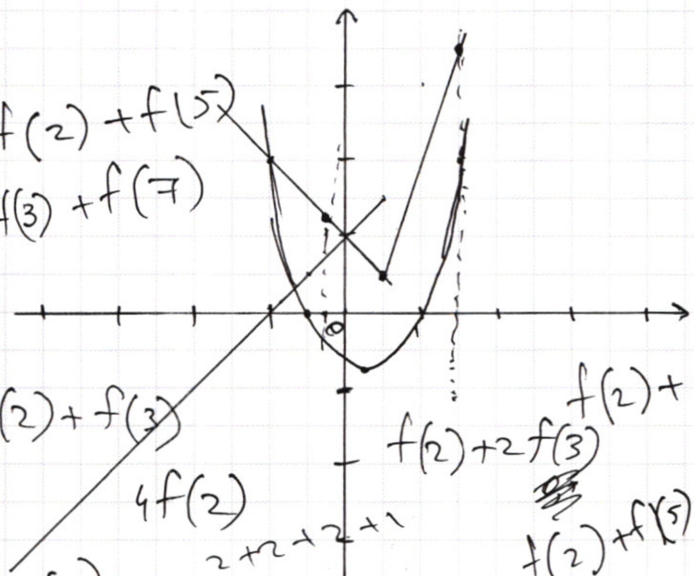
~~sin α~~

$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$





$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$



$2f(2) + f(5)$

$f(3) + f(7)$

$2f(2) + f(3)$

$4f(2)$

$8f(2)$

$f(8) = 4f(2) =$

$\frac{1}{4}$

$1 + 8 = 9$

$\frac{1+3}{4} = 1$

$\frac{1-3}{4} = -0,5$

$f(2) + f(3) + f(3)$

$f(2) + 2f(3)$

$f(2) + f(5) =$

$f(2) + f(2) + f(3)$

$f(2) + f(7)$

$0,5 - 0,25 - 1 =$

$= -(1,25 - 0,5) =$

$= -0,75$

$1,25$

$x - 2x + 1 = -x + 1$

$x - 2x + 1 = -x + 1$

$2 + 2 + 2 + 1$

$3 + 3 + 3 - 1 + 3$

$2 \cdot 2$

$f(2 \cdot 2 \cdot 2) = 3f(2)$

$f(1) = f(p) +$

$0,125 - 0,25 - 1 = -(1,25 - 0,125) =$

$= -1,125$

$f(b) = f(1) + f(b)$

$2f(3)$

$0,75^2 = \frac{9}{16}$

$y = ax + b$

$\frac{9}{8} - \frac{3}{4} - 1 = \frac{9-6-8}{8} = \frac{-5}{8}$

$f(1) = f(p) + f(\frac{1}{p})$ $\quad \frac{5}{8} \cdot 3 + 2 = 4b,$ $\quad \frac{9}{16} - \frac{3}{4} - 1 =$

$f(x) = f(p_1) + f(p_2) + \ldots$

$-15 + 16$

$-0,625$

$f(p_1) + f(p_2) + \ldots + f(p_n) +$

$+ f(\frac{1}{q_1}) + f(\frac{1}{q_2})$

$6 \cdot \frac{-5}{8} = -\frac{15}{}$

$\frac{-15+8}{4} = -$

$\begin{array}{r} 210 \\ -\ 28 \\ \hline 182 \end{array}$

$f(x) > f(y)$

$\frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{2}}$

$\frac{\frac{7}{4}}{\frac{3}{2}}$

$\frac{1,75}{1,5}$

0; 1;

$\frac{6 \cdot 5}{2} =$

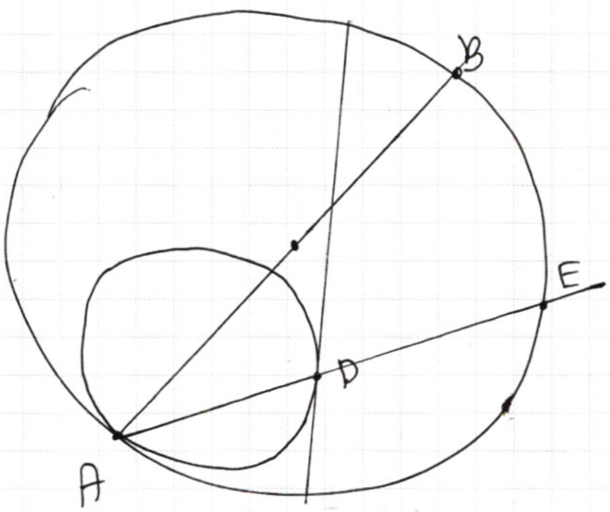
$\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

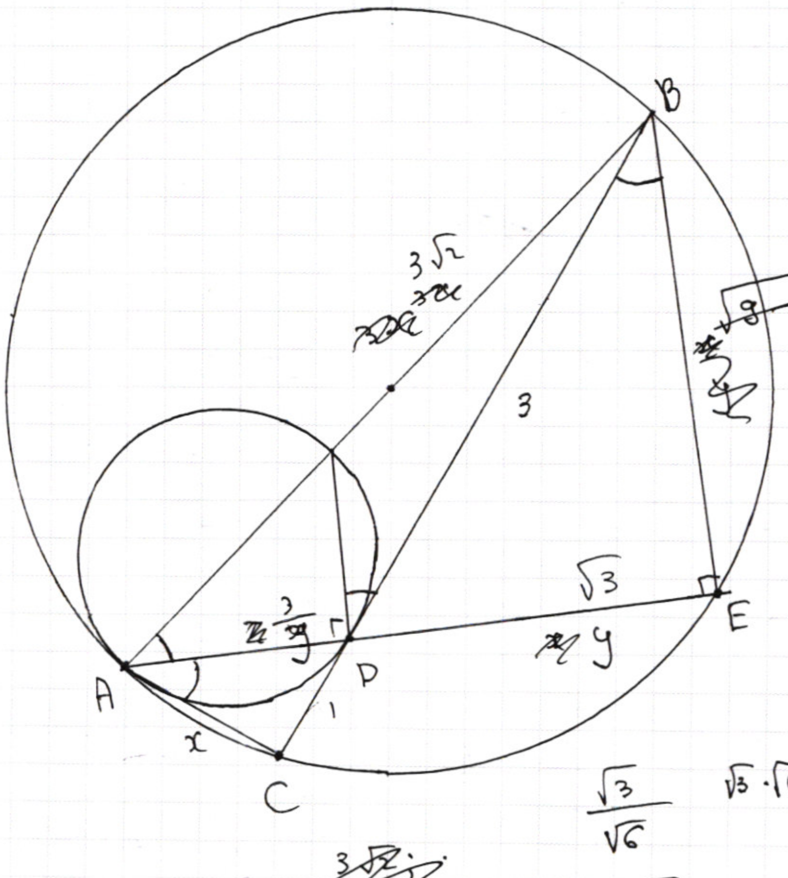
$15 + 12 = 27$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x + \frac{3}{x}}$$

$$x^2 + 3 = y^2$$

$18 - 6 = 12$

$2\sqrt{3}$

$$\frac{BE}{AE} = \frac{DE}{BE} = \sqrt{2}$$

$$BE^2 = AE \cdot DE$$

$$9 - y^2 = \left(\frac{3}{y} + y\right) \cdot y$$

$$9 - y^2 = 3 + y^2$$

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$ $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{2}$ $6 = 2y^2, \ y = \sqrt{3}$

$18 - 12 = 6$

$$\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{6}{\sqrt{3}} = AE$$

$$\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{2}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	~~22~~	~~23~~	~~24~~	~~25~~
0	1	1	2	2	2	3	4	3	3	5	3	6	4	3	8	8								

$ax^2+2akx+ak^2=0$

$D=4a^2k^2-4a^2k^2=0$

$x=\frac{-2ak}{2a}=-k$

$a^2k^2=-k$

$ak^2=-1$

$\frac{\sqrt{29}}{5}\cdot 2\cdot \frac{6}{8}\cdot\frac{8}{\sqrt{29}}$ $\frac{1}{2}$

$a < 2a+1200-3a$

$2a<1200,\ a<600$

$2a<a+1200-3a$

$4a<1200,\ a<300$

$1200-3a<a+2a$

$1200<6a,\ a>200$

$2x^2+x^2+2x+1-4x-4x-4+3=0$

$3x^2-6x=0$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$2x^2+16x^2-16x+4-4x^2 \quad -16x+8+3$

$-(5x-1)y+(4x^2+2x-2)=0$

$18x^2-36x+15=0$

$D=25x^2-10x+1-16x^2-8x+8=$

$6x^2-12x+5=0$

$=9x^2-18x+9=9(x^2-2x+1)=$

$D=144-120=24=(2\sqrt6)^2=$

$\frac{12\pm2\sqrt6}{12}$ $1\pm\frac{\sqrt6}{6}$

$\frac{5x-1-3x+3}{2}=x+1$

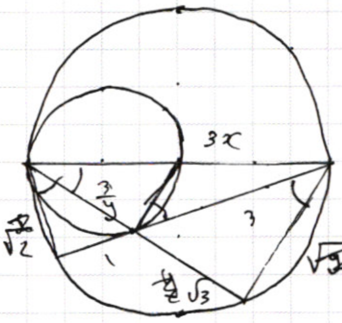
$\frac{5x-1+3x-3}{2}=4x-2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$\cancel{x^2+9}$

$9x^2 = x^2+16$

$$\frac{\sqrt{9-y^2}}{\frac{3}{y}+y} = \frac{y}{\sqrt{9-y^2}}$$

$y^2+3 = 9-y^2$

$2y^2 = 6$

$y = \sqrt{3}$

$\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}\cdot\cancel{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\cancel{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$+\ 1\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$2f(2)+f(3) = 2\cdot\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4

$1 + 12 + 15 = 28$