МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

По условию a, b, c - первые три члена геом. прогр. $\Rightarrow$ $a, b, c \neq 0$;

$c = a \cdot q^2$ $\quad$ q - зн. геом. пр.

$b = a \cdot q$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$ax^2 + 2qax + q^2 \cdot a = 0 \; (:a)$, т.к. $a \neq 0$

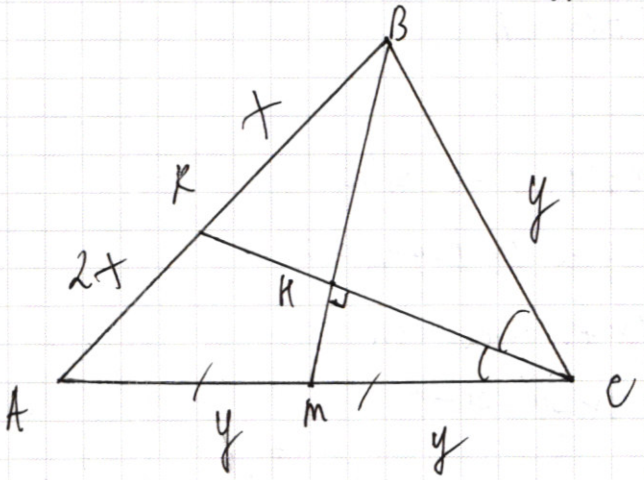
$x^2 + 2q + q^2 = 0$

$(x+q)^2 = 0$

$\underline{x = -q}$ $\Rightarrow$ IV член геом. пр. $\Rightarrow$ III член $= \frac{-q}{q} = -1$

Ответ: $c = -1$

№2



CK - бис-са; Bm - медиана;

$CK \perp Bm$.

тогда для $\triangle BmC$: CK - высота, бис-са:

$\Downarrow$

$\triangle CmB$ - равноб:

$Cm = CB = y$

По св-ву бис-сы: $\frac{AK}{KB} = \frac{AC}{CB} = \frac{2y}{y} = \frac{2}{1}$

$AK = 2x$; $KB = x$, тогда

$3x + 3y = 1200$

$x + y = 400$

по нер-ву $\triangle$: $3y > 3x$ $\quad$ $2y - y < 3x$

$y > x$; $\quad$ $y < 3x$.

$\Rightarrow$ $4x > x + y = 400$

$x > 100$

$400 = x+y > 2x$

$\Downarrow$

$\underline{x<100}$ $\quad \underline{x<200}$

$x+y=400$, тогда для люб. знач. $x \in (100;200)$

найдётся соотв значение

$y=400-x$ и

$\underline{y>x;\ y<3x}$

тогда всего $200-100-1=99$ $\triangle$.

Ответ: всего таких $\triangle = 99$.

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases}$$

$y-2x = y-2-2x+2 =$

$=(y-2)-2(x-1)$

$(x-1)(y-2)= xy-2x-y+2$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=$

$=2(x-1)^2+(y-2)^2-3$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} y>2x \\ ((y-2)-2(x-1))^2=(x-1)(y-2) \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y>2x \quad (3) \\ (y-2)^2+4(x-1)^2-5(x-1)(y-2)=0. \quad (1) \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0. \quad (2) \end{cases}$$

(1): $4(x-1)^2-4(x-1)(y-2)-(x-1)(y-2)+(y-2)^2=0.$

$4(x-1)(x-1-y+2)-(y-2)(x-1-y+2)=0.$

$(x-y+1)(4x-4-y+2)=0.$

$(x-y+1)(4x-y-2)=0.$

I сл. $x=y-1$: в (2):

$y=x+1$

$3(x-1)^2-3=0$

$(x-1)^2=1$

$$\left[\begin{array}{ll} x=0 & y=1 \\ x=2 & y=3 \text{ — неуд. (3)} \end{array}\right.$$

$0<2$

$3 \not< 4$

II сл. $y=4x-2$ в (2):

$(4x-4)^2+2(x-1)^2=3$

$18(x-1)^2=3$

$(x-1)^2=\frac{1}{6}.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

см.(3)

$$\left[\begin{array}{l} x = 1-\sqrt{\frac{1}{6}} \quad y = 2-4\sqrt{\frac{1}{6}} \\ x = 1+\sqrt{\frac{1}{6}} \quad y = 2+4\sqrt{\frac{1}{6}} \end{array}\right.$$

$2-4\sqrt{\frac{1}{6}} < 2-2\sqrt{\frac{1}{6}}$

$-2\sqrt{\frac{1}{6}} < 0$

неуд.

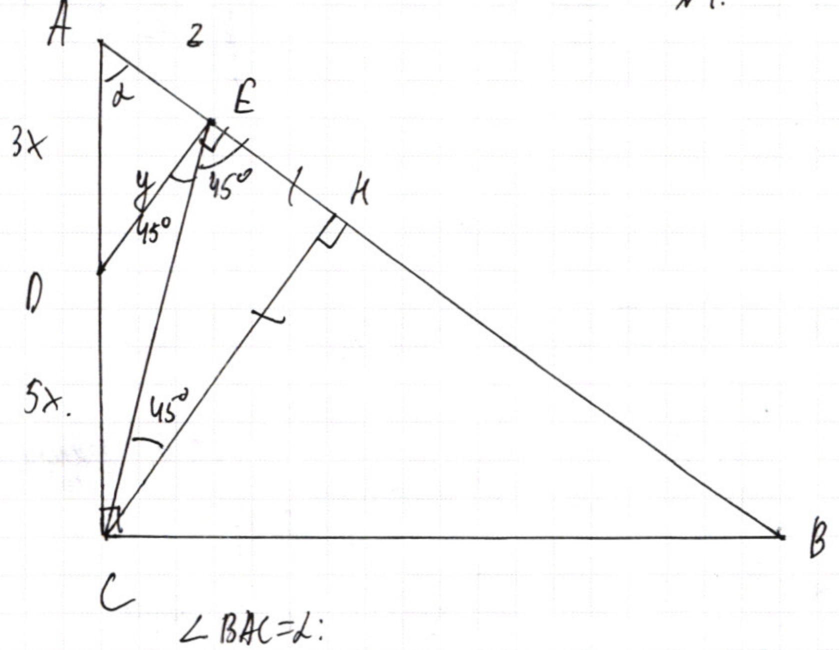
уд.

$2+2\sqrt{\frac{1}{6}} < 2+4\sqrt{\frac{1}{6}}$

$2\sqrt{\frac{1}{6}} > 0.$

Ответ: $\left\{ (0;1); \left(1+\sqrt{\frac{1}{6}};\ 2+4\sqrt{\frac{1}{6}}\right) \right\}$

№4.



$\angle BAC = \alpha$:

$tg\angle BAC = tg\alpha = \frac{DE}{AE} = \frac{y}{z} = \frac{5}{8}$

Проведем $CH \perp AB$.

$\angle DEC = 45°$; $\angle CEH = 90-45° = 45° = \angle ECH$

$\Downarrow$

$EH = CH$.

пусть $DE = y$; $AE = z$:

$DE \parallel CH$, т.к. $DE \perp AB$; $CH \perp AB$;

по теор. Фалеса: $\frac{AE}{EH} = \frac{AD}{DC} = \frac{3}{5}$.

$\Downarrow$

$EH = \frac{5}{3}z$.

$\triangle ADE \sim \triangle AHC$, т.к. $\angle A$ - общ. $\angle DEA = \angle CHA = 90°$.

$\frac{CH}{DE} = \frac{8x}{3x} \Rightarrow CH = \frac{8}{3}y$

$\frac{y}{z} = \frac{5}{8}$ $\quad CH = EH$: $\frac{8}{3}y = \frac{5}{3}z$ $\quad z = \frac{8}{5}y$

б) $S_{CED} = \dfrac{CE \cdot DE \cdot \sin 45^\circ}{2}$ (1)

$CE = CH \cdot : \sin 45^\circ = \frac{8}{3} y \cdot \sqrt{2}$ (2)

$DE = y$ (3)

$AC = 8x = \sqrt{29}$

$\Downarrow$ $x = \frac{\sqrt{29}}{8}$;

по теор. Пифагора:

$DE^2 + AE^2 = AD^2$:

$z^2 + y^2 = 9x^2$

$y^2 + \frac{64}{25} y^2 = 9x^2$

$y = \sqrt{\frac{9 \cdot 25}{89}} x$ (4) $=$

$= y \cdot \sqrt{\frac{9 \cdot 25}{89}} \cdot \frac{\sqrt{29}}{8}$

2, 3, 4 в (1):

$S_{CED} = \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\cancel{2} \cdot 2} \cdot y^2 = \frac{4}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{9}^{3} \cdot 25}{89} \cdot \frac{29}{\cancel{64}_{16}} =$

$= \frac{3 \cdot 25 \cdot 29}{89 \cdot 16}$

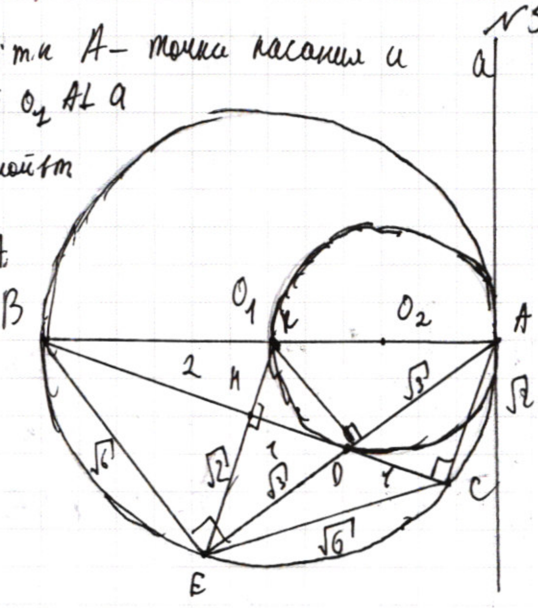
Ответ: а) $tg \angle BAC = \frac{5}{8}$; б) $S_{CED} = \frac{3 \cdot 25 \cdot 29}{89 \cdot 16}$

№5

$O_2 \in AB$; т.к. A – точка касания и $O_2A \perp a$; $O_2 A \perp a$

$\Downarrow$

т.к. $\perp$ к прямой $\exists$ только 1, то $O_2 \in O_1A$.



$KA = 2$ рад

(Изначально $2 O_2A \neq O_1A$);

O_1, O_2 – центры окр.

Проведём O_1E, тогда по св-ву: H – т. пересеч. EO_1 и BC;

BC – хорда: $BH = HC$
$EO_1 \perp BC$;

$BH = HC = \frac{BD + DC}{2} = 2$

$\Downarrow$

$HD = 1$

$\angle BCA = 90^\circ$, т.к. опир. на диаметр AB

$\triangle HDE = \triangle CDA$ по ~~II~~ признаку катету и остр. углу:

$\angle ADC = \angle BDE$ – как вертик.

и $HD = DC$ – по доказ.

$AD = DE$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle KDA = 90°$ - опир на диаметр KA;

$\angle BEA = 90°$ - опир. на диаметр AB;

тогда $KD \perp AE$; $BE \perp AE$;

$KD \parallel BE \Rightarrow$ по теор. Фалеса: $\frac{AK}{BK} = \frac{AD}{DE} = 1$ - подоб.

$\Downarrow$

точки K и O_1 - совп.

тогда пусть R - радиус большой опр

r - радиус мал опр

$R = 2r$

по св-ву: $BD \cdot DC = ED \cdot AD = ED^2 = 3$

$\Downarrow$

$ED = AD = \sqrt{3}$.

тогда по теор. Пиф: $EH = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$; $EH \parallel AC$

$BE = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$.

$EC = \sqrt{6}$;

$O_1H = R - \sqrt{2}$; т.к. $O_1E = R$

$O_1B = R$

по теор. Пиф. для $\triangle BO_1H$:

~~$R^2 = R^2 - 2\sqrt{2}R$~~

$R^2 = R^2 - 2\sqrt{2}R + 2 + 4$

$2\sqrt{2}R = 6$

$R = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow r = \frac{3}{\sqrt{8}}$

$S_{ABCE} = S_{ABC} + S_{BEH} + S_{HEC} =$

$= \frac{BC \cdot AC}{2} + \frac{EH \cdot BH}{2} + \frac{HC \cdot EH}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{2} =$

$= 4\sqrt{2}$

Ответ: $R = \frac{3}{\sqrt{2}}$; $r = \frac{3}{\sqrt{8}}$; $S_{ABCE} = 4\sqrt{2}$

№6.

$2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|$ $\qquad x\in[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$

I сл. $x\in[-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$: $2x-1\le 0$

$(2x-1)(x-1) \le ax+b \le 1-x$ $\qquad -(1-x)$ $\qquad (+x-1)$

~~$ax+b\le 1-x$.~~ $\qquad \cancel{(2x-1)(x-1)}$

$2x(x-1) \le (a+1)x+(b-1) \le 0.$

II сл. $x\in[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$: $2x-1\ge 0$.

$(2x-1)(x-1) \le ax+b \le 3x-1$

№7.

Возьмём простое число p:

$f(p)=f(p)+f(1)$

$\Downarrow$

$f(1)=0$, значит $f(\frac{x}{y})\ne f(1)$, т.к. нам нужно

$f(\frac{x}{y})<0$.

$\Downarrow$

$\frac{x}{y}\ne 1$ $\qquad x\ne y$.

т.к. $f(p)=[\frac{p}{2}]$, $p>0$, то $f(p)>0$

$\Downarrow$

аналогично $\frac{x}{y}\ne p$.

Пусть $\frac{x}{y}=a$, где a - число составное

$a=p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n$, - могут быть равные.

$f(\frac{x}{y})=f(a)=f(p_1)+f(p_2)+\ldots+f(p_n)=$

$=\underset{\overset{\vee}{0}}{[\frac{p_1}{2}]}+\ldots+\underset{\overset{\vee}{0}}{[\frac{p_n}{2}]}>0 \Rightarrow \frac{x}{y}\ne a$

$\frac{x}{y}\ne$ сост. числу

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что всевозможных пар $x, y = 21 \cdot 21 = 441$.

тогда любое натур. число $= \frac{x}{y}$ — неуд-по доказанному

тогда рассмотрим скольку делителей у чисел от 1 до 21 —

каждый делитель = -пара т.к $\frac{x}{y}$ тогда будет натур. числом

~~число кол-во дел~~

~~1 – 1~~

~~2 – 1~~

3 – 1

~~4 – 2~~

~~5 – 1~~

6 – ~~1~~

$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ $p_1, \ldots p_n$ – пр. числа

тогда кол-во делит числа $n = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)$

число	количество делителей	число	кол-во дел.
1	1	14	4
2	2	15	4
3	2	16	5
4	3	17	2
5	2	18	6
6	4	19	2
7	2	20	6
8	4	21	4.
9	3		
10	4		
11	2		
12	6		
13	2		

всего = 70.

Осталось $441 - 70 = 371$ возм. пара

p_1, p_2 – пр. числа. $p_2 > p_1 > 2$

$f\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$: $f(p_1) = f\left(\frac{p_1}{p_2}\right) + f(p_2)$, т.к. нет 2-ух подряд идущих

⇓

простых чисел (кроме из кот >2), то разность м/у ними хотя бы 2.

$f\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \left[\frac{p_1}{2}\right] - \left[\frac{p_2}{2}\right] < 0$ – уд.

$\left[\frac{a}{2}\right] < \left[\frac{a+2}{2}\right]$.

$\left[\frac{a}{2}\right] < \left[\frac{a}{2}\right]+1$

$2 < x < y$; x, y – пр. – уд

$6+5+4+3+2+1 = 21$ ~~уд~~ пара-уд.

а для $x=2$: 6 пар: $\Rightarrow 27$ пар-уд.

Все пары x, y, которые сводятся к $\frac{x}{y} = \frac{p_1}{p_2}$, где $p_1 < p_2$; $p_2 - p_1 \geq 2$ уд.

$f(x) = f(y \cdot \frac{x}{y}) = f(y) + f(\frac{x}{y})$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) < 0$ если $f(x) < f(y)$.

– Всели дроби вида $\frac{1}{y}$ – уд $y > 1$. – 20 штук

$\frac{2}{y}$ – уд. при $y > 3$ – 18 штук.

$\frac{3}{y}$ – уд при $y > 3$ – 18 штук.

$\frac{4}{y}$ уд $y > 6$. – 15 штук

⋮

$\frac{5}{y}$ $y > 6$

$\frac{6}{y}$ $y >$

для $x = 2n$:

$f(\frac{x}{y}) < 0$ при $y > 3n$.

$x = 2n+1$:

$f_1(\frac{x}{y}) < 0$ при $y > 3n$.

$\overset{20}{20} + \overset{36}{18 + 18} + \overset{30}{15 + 15} +$

$+ \overset{24}{12 + 12} + \overset{18}{9 + 9} + \overset{12}{6 + 6} + \overset{6}{3 + 3} =$

$= 56 + 54 + 36 = 146$.

Ответ: всего 146 возможных пар.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

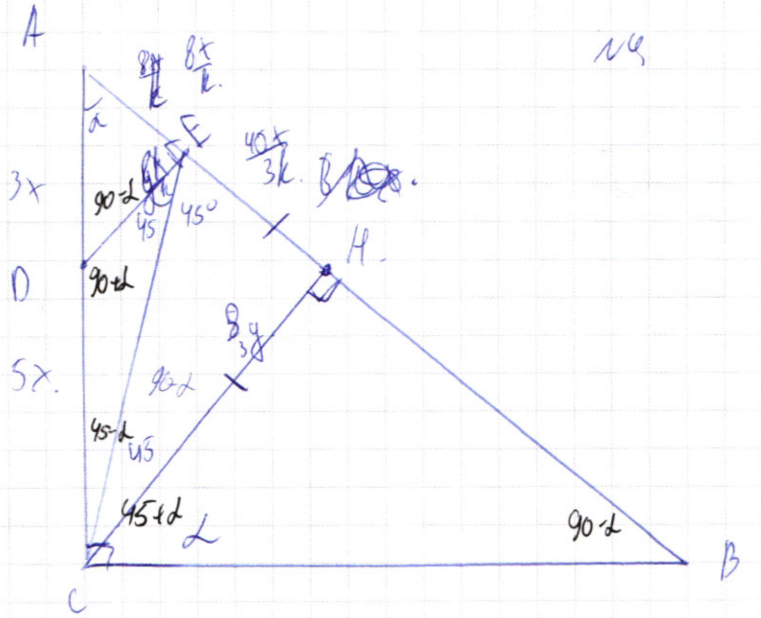
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



$180-90+\alpha-45=$
$=45+\alpha$

$\sin\alpha = \frac{DE}{3x} = \frac{CB}{AB}$.

$tg\,\alpha = \cancel{\frac{AE}{DE}} \quad \frac{DE}{AE} = \frac{CB}{8x}$

$\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{HB}$.

$\cancel{\frac{8}{3}y = \frac{40x}{3k}}$

$x = \frac{\sqrt{29}}{8}$.

$\frac{8}{3}y = \frac{40x}{3k}$

$y = \frac{8x}{k}$.

$y = \frac{5x}{k}$.

$\cancel{CE=}$

$S_{CDE} =$

$EC = \frac{40x}{3k} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$2 - \frac{89x^2}{k^2} = 9x^2$

$\cancel{k = \frac{8}{3\sqrt{2}}}$

$S_{CDE} = \sin 45 \cdot \frac{DE \cdot EC}{2} =$

$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5x}{k} \cdot \frac{40x}{3k\cdot\sqrt{2}}}{2} = \frac{x^2 \cdot 45}{6k^2} = \frac{29}{64} \cdot \frac{45 \cdot 81}{89} =$

$tg\,\alpha = \frac{5}{8}$

$81x^2 = \frac{64x^2}{k^2} + \frac{25x^2}{k^2}$

$k^2 = \frac{89}{81}$

$k = \frac{\sqrt{89}}{9}$.

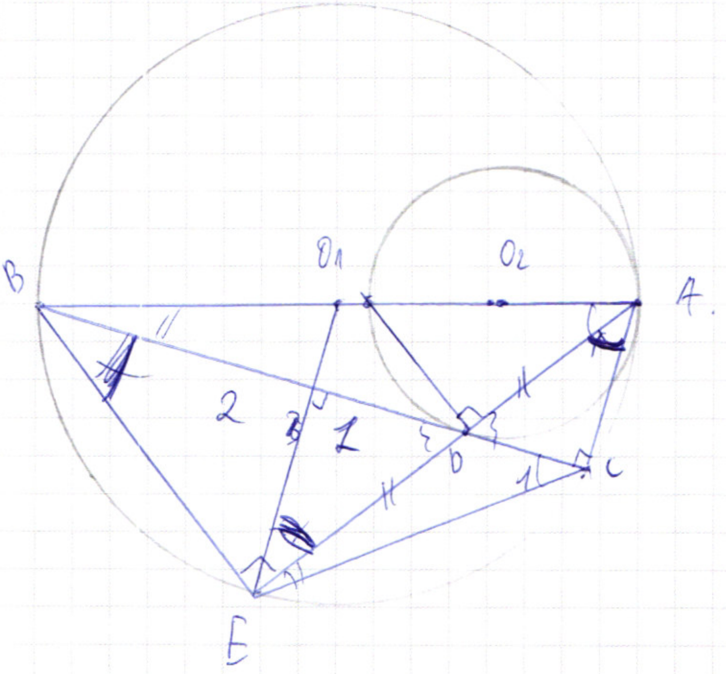
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№3.



$\frac{AD}{AE} = \frac{r}{R} = \frac{1}{2}$

$2r = R$

$4 + AC^2 = 4R^2.$

ADDE=3

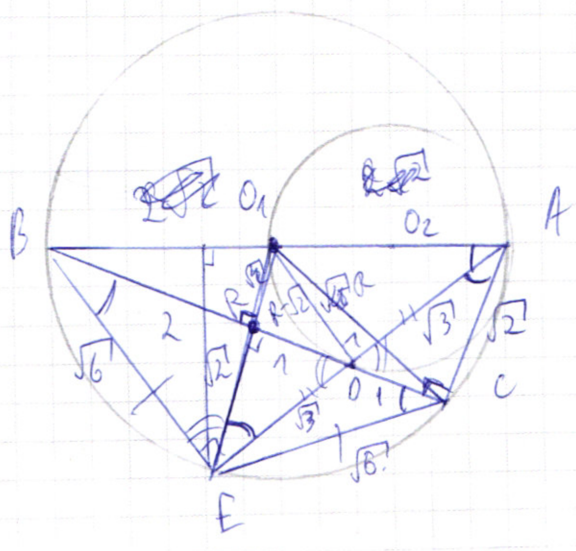
$\frac{BD}{ED} = \frac{AD}{DC}$

$EO_1 = R.$

BEEC

$S_{ABCE} = \frac{4\cdot\sqrt{2}}{2} +$
$+ \sqrt{2}\cdot 2 =$
$= \boxed{4\sqrt{2}}$

$\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}{2R} = h.$



$R^2 - 2\sqrt{2}R + 2 + 4 = R^2$

$R^2 2$

$R = \frac{6}{2\sqrt{2}} =$

$= \frac{3}{\sqrt{2}}$

$S_{ABEC} =$

$r = \frac{3}{\sqrt{8}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$ac=b^2$

$a=\quad b=aq \quad c=aq^2$

$ax^2+2bx+c=0$

$x_1+x_2=-\frac{2b}{a}$

$x_1+x_2=-2q$ (1)

$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

$x_1\cdot x_2=q^2$

$a\neq 0$

$ax^2+2aqx+aq^2=0$

$x^2+2qx+q^2=0$

$(x+q)^2=0$

$x=-q$

$d=-q$

$c=-1$

$x_1=x_2-2q$

$x_2^2-2q\cdot x_2=q^2$

$\frac{5}{6}$ $f(5)=f(6)$

$x_2^2-2q\cdot x_2-q^2=0$

$D=4q^2+4q^2=8q^2$

$x_2=\frac{2q\pm 2q\sqrt{2}}{2}=$

$=q\pm q\sqrt{2}$

$x_1=-q\pm q\sqrt{2}$

86
24
110

110

$f(b)=f\left(\frac{1}{\frac{1}{b}}\right)=f(b)$

$f\left(\frac{1}{p}\right)=f\left(\frac{1}{p}\right)=$

$=$

$f(3)=f\left(\frac{3}{3}\right)+f(5)$

$\left(\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{5}{2}\right)=f\left(\frac{3}{3}\right)$

$f\left(\frac{1}{p+1}\right)=f\left(\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{p+1}\right)=f\left(\frac{1}{p}\right)$

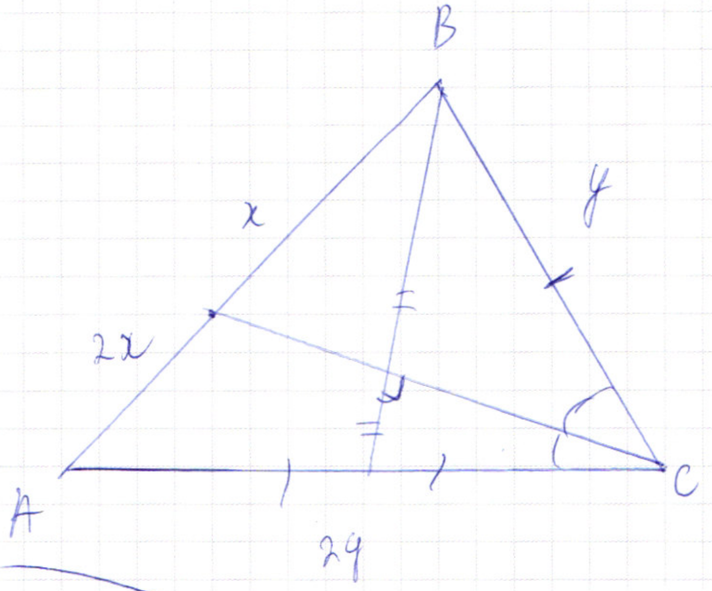
$f(x)=f(y)+f\left(\frac{x}{y}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$3y>3x$

$y>x.$

$3y+3x=1200$

$y+x=400$

$y<3x.$

$x\ \cancel{y}<100$

$y>200$

№3.

$y-2x=\sqrt{xy-2xy+2}$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0.$

$x^2+y^2+9-4x-4y+2xy=$

$=$

$xy-2x-y+2\geq 0.$

$y\geq 2x.$

$y^2-4xy+4x^2=$

$=xy-2x-y+2.$

$x(y-2)-(y-2)\geq 0$

$(x-1)(y-2)\geq 0.$

x^2-4x+4 $\quad x^2-3=$

y^2-4y+4

$x<y.$

$400=x+y<2y$

$y>200.$

$400\ \cancel{xy}=y+x<3x+x$

$x>100$

$400-x>200$

$x<\cancel{400}\ 200$

~~$x\in(100;200)$~~

$(00;102)$

$200-100-1=$

$=99$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$ $\quad x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

$x \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$.

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + 1 - 2x$.

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le 1 - x$.

$(2x+1)(x-1) \le ax + b \le 1 - x$.

$f(p) = f(1) + f(p)$

$f(1) = 0$

№7.

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad f(p) = [p/2]$

$\boxed{\frac{1}{2}, \dots \frac{1}{42}}$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = [\frac{x}{2}] + [\frac{1}{2y}] =$

$= [\frac{x}{2}]$

$f(ab) = [\frac{a}{2}] + [\frac{b}{2}]$.

$[\frac{x}{2}] < 0$

$a, b \ge 0$

$[\frac{a}{2}] \ge 0$ $\quad [\frac{b}{2}] \ge 0$.

$[\frac{a}{2}] + [\frac{b}{2}] \ge 0$.

№3.

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases}$$

$y \geq 2x$

$y \geq x.$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0.$

$-4xy+2x^2+4x+4y-3 = xy-2x-y+2.$

$2x^2-5xy+6x+5y-5=0.$

$$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases}$$

$x^2-4x+4+y^2-4y+4+x^2-5=0.$

$\cancel{4x^2-2x}$

$\cancel{y^2+y+\frac{1}{2}+4x^2+2x+\frac{1}{2}-5xy-3=0.}$

$\cancel{(x-2)^2+(y-2)^2+(2x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2+x^2-8+5xy=0.}$

$\cancel{2x^2+y^2-4x-4y+3+2xy-2xy=0.}$

$\cancel{y(y-2x)}$

$-2x^2+y^2-4x-4y+3 \mid y-2x$

$y^2-2xy \qquad y-x-4+2$

$-2x^2-2xy-4x-4y+3$

$-xy+2x^2$

$-xy-4x-4y+3$

$-4y+8x$

$4x-xy+3$

$-4x-2y$

$-xy+3-2y$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y \geq 2x$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \quad +x^4$

$2x^2-4x+2+y^2-4y+4-3=0.$ $\quad \frac{y^2}{2}-2y+2$

$(\sqrt{2}x-\sqrt{2})^2+(y-2)^2-3=0.$

$2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0.$ $\quad 2(x-1)^2+(y-2)^2=3.$

$(x-1)^2=\frac{3-(y-2)^2}{2}$

$x(y-2)-y+2$ $\quad x^2+2x+1$

$\sqrt{(x-1)(y+2)}$

$(y-2x)^2=(x-1)\cdot(y+2)$ $\quad y^2-5xy+5x^2=(x-1)^2+1-y \quad +\frac{y^2}{4}$

$(y-2x)^2+3=2(x-1)^2+(y-2)^2+$
$+(x-1)\cdot(y-2)$ $\quad \frac{5y^2}{4}-5xy+5x^2=(x-1)^2+(\frac{y}{2}-1)^2$

$(y-2x)^2+2x(x-1)+1+(y-2)^2=$

$5(\frac{y}{2}-x)^2=(x-1)^2+(\frac{y}{2}-1)^2$

$=(x-1)(y-2)$

$5(\frac{y}{2}-x)^2=\frac{3-(y-2)^2}{2}+(\frac{y}{2}-1)^2$

$5(\frac{y}{2}-x)^2=3-(\frac{y}{2}+1)^2$

$\frac{5y^2}{4}+\frac{y^2}{4}+y+1-5xy+5x^2-3=0.$

$\frac{3}{2}y^2+y-4-5xy+5x^2-4=0.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№3.

$y \geq 2x.$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0. \end{cases}$$

$y-2x$

$y-2-2x+2=$

$=(y-2)-2(x-1)$

$(y-2)^2-4(x-1)(y-2)+4(x-1)^2=(x-1)(y-2)$

$2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0.$

$4(x-1)^2-5(x-1)(y-2)+(y-2)^2=0$

$2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0.$

$x-1=a$

$y-2=b$

$4a^2-5ab+b^2=0.$

$2a^2+b^2-3=0.$

$4a^2-4ab-ab+b^2=0$

$4a(a-b)-b(a-b)=0.$

$(4a-b)(a-b)=0.$

$(4x-4-y+2)(x-y+1)=0.$

$(4x-y-2)(x-y+1)=0.$

$4x-2\geq 2x$

$x\geq 1$

I сл.

$y\geq 4x-y-2=0$

$y=4x-2.$

$2(x-1)^2+(4x-4)^2-3=0$

$18(x-1)^2-3=0$

$(x-1)^2=\frac{1}{6}$

$\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{\frac{1}{6}}+1, \text{ неуд} \quad \underline{y=4\sqrt{\frac{1}{6}}+2} \\ x=-\sqrt{\frac{1}{6}}+1 \end{array}\right.$

II сл. $x=\underline{y-1}$

$\underline{y=x+1}$

$y\geq 2x.$

$2(x-1)^2+(x-1)^2-3=0$

$(x-1)^2=1$

$\left[\begin{array}{ll} x=0 & y=1 \\ x=2 & y=3 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{ уд} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \text{ неуд} \end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)