МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2+2bx+c=0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}, \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD:AC=3:5$ и $DE\perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED=45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC=\sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD=1$, $BD=3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$2x^2-x-1\leqslant ax+b\leqslant x+|2x-1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 21$, $1\leqslant y\leqslant 21$ и $f(x/y)<0$.

$\sin^2 + \cos^2 = 1$

$tg^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2}$

$\cos = \sqrt{\frac{1}{tg^2+1}}$

$\sin = \sqrt{1-\cos^2} = \sqrt{1-\frac{1}{tg^2+1}} = \sqrt{\frac{tg^2+\cancel{1}-\cancel{1}}{tg^2+1}}$

$\frac{\frac{4}{25}}{\frac{4}{25}+1} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{29}{25}} = \sqrt{\frac{4}{29}}$

$f(-1) = 0$

$f(2)$

$f(9) = 2$

$f(21)$ $f(y) > f(x)$

$f(3) = f(9) + f(\frac{1}{3})$

$f(\frac{1}{9})$

$f(1) = f(y) + f(\frac{1}{y}) = 0$

$f(\frac{1}{y}) = -f(y)$

$f(0) = f(0) + f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = 0$?

1	0
√ 2	1
√ 3	1
4	2
√ 5	2
6	2
√ 7	3
8	3
9	2
10	3
√ 11	5
12	3
√ 13	6
14	4
15	3
16	4
√ 17	8
18	3
√ 19	9
20	4
21	4
24	

$36 + 16 + 8 = 60$

$48 + 17 = 65$

$+37$

$\|$

$125 + 37 =$

$= 162$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

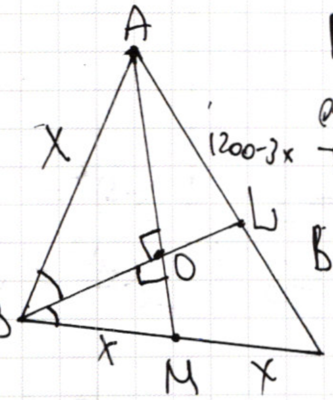
№1

Если a, b, c - геом. прогр. $\Rightarrow b = ap;\ c = ap^2$, где p - шаг прогрессии. Тогда $ax^2+2bx+c = ax^2+2(ap)x+ap^2=0$. Есть 2 случая: $a=0$ и $a\neq 0$. Пусть $a\neq 0$. Тогда $x^2+2px+p^2=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x+p)^2=0 \Rightarrow x=-p$. Тогда 4-й член равен с одной стороны $-p$, а с другой стороны ap^3. Тогда $-p=ap^3 \overset{p\neq 0}{\Rightarrow} -1=ap^2=c$.
Если же $a=0 \Rightarrow ap^2=0\cdot p^2=0$.

Ответ: $a=0 \to c=0$

$a\neq 0 \to c=-1$

№2.



Пусть такой $\triangle$ в принципе существует. Рассмотрим его. Пусть $AM \perp BL$, где AM - мед., BL - бис. Тогда $\triangle ABM$ - р/б, т.к. если $AM \cap BL = O$, то BO - бис. и выс. в $\triangle ABM \Rightarrow$ и медиана, а значит $\triangle ABM$ - р/б. Тогда $AB=BM=MC$; пусть также $AB=x \Rightarrow BC=2AB=2x \Rightarrow$
$\Rightarrow AC = 1200-AB-BC = 1200-3x$. Тогда из нер-ва Тр-у имеем систему: $\begin{cases} 3x>1200-3x \\ 1200-x>x \\ 1200-2x>2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>200 \\ 600>x \\ 300>x \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow 300>x>200 \Rightarrow 299\geq x\geq 201 \Rightarrow$ всего возможных x 99.
При этом каждый x даёт ровно 1 треугольник, т.к. x определяет все 3 стороны, а треугольник определяется по 3 сторонам. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ треугольников тоже 99

Ответ: 99

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y-2x\geq 0 \\ (x-1)(y-2)\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\geq 2x \\ \left[\begin{array}{l} x\geq 1;\ y\geq 2 \\ x\leq 1;\ y<2 \end{array}\right. \end{cases}$$

Также $2(x-1)^2\geq 0$
$(y-2)^2\geq 0$, отсюда

имеем, что $\begin{cases} 2(x-1)^2\leq 3 \\ (y-2)^2\leq 3 \end{cases}$. Получив данные ограничения на x и y

можем начать решать.

(1): $(y-2x)^2=xy-2x-y+2$

$y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0$

$(y-x-1)(y-4x+2)=0$

$y=x+1 \lor y=4x-2$

Тогда $\left[\begin{array}{l} 2(x-1)^2+(x+1-2)^2=3 \\ 2(x-1)^2+(4x-2-2)^2=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3(x-1)^2=3 \\ 18(x-1)^2=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)^2=1 \\ (x-1)^2=\frac{1}{6} \end{array}\right.$

В первом случае $x=0 \lor 2 \Rightarrow y=1 \lor 3$ соотв., но под все ограничения подходит только пара $(0;1)$.

Во втором случае $x=1+\frac{1}{\sqrt{6}} \lor 1-\frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow y=\underbrace{4+\frac{4}{\sqrt{6}}-2}_{=2+\frac{4}{\sqrt{6}}} \lor \underbrace{4-\frac{4}{\sqrt{6}}-2}_{=2-\frac{4}{\sqrt{6}}}$

Подставим все 3 решения:

1) $(0;1)$ $\begin{cases} 1-0=\sqrt{0-0-1+2} \ (+) \\ 0+1-0-4+3=0 \ (+) \end{cases}$

3) $\left(1-\frac{1}{\sqrt{6}};\ 2-\frac{4}{\sqrt{6}}\right)$

$2-\frac{4}{\sqrt{6}}-2\left(1-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=-\frac{2}{\sqrt{6}}<0 \ (-)$

т.к. справа корень

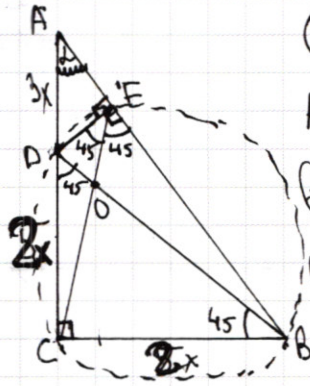
2) $\left(1+\frac{1}{\sqrt{6}};\ 2+\frac{4}{\sqrt{6}}\right)$

$\underbrace{2+\frac{4}{\sqrt{6}}-2-\frac{2}{\sqrt{6}}}_{=\frac{2}{\sqrt{6}}}=\underbrace{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{4}{\sqrt{6}}}}_{=\frac{2}{\sqrt{6}}}$

Ответ: $(0;1)$ и $\left(1+\frac{1}{\sqrt{6}};\ 2+\frac{4}{\sqrt{6}}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



~~Сразу скажем, что можно считать, что AD = 3, DC = 5 для пункта а), т.к. в нём в конструкции фиксированы углы и отношения ⇒ при рассмотрении подобного треугольника ничего не изменится.~~

а) Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда $tg\,\alpha = \frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}$ (т.к. $\triangle AED$ и $\triangle ABC$ – прямоуг.)

Пусть $AC = 5x \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow AD = 3x$, $DC = 2x$. Заметим, что $DEBC$ – вписанный, т.к. $\angle C = \angle E = 90° \Rightarrow \angle C + \angle E = 180°$.

Тогда из вписанности $\angle DEC = \angle DBC = 45°$, а $\angle CEB = \angle CDB = (180° - 90°) - 45° = 45° \Rightarrow \triangle DBC$ – р/б и пр. уг. $\Rightarrow CB = CD \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{2}{5} = tg\,\alpha$. Ответ: $tg\,\alpha = \frac{2}{5}$

б) $AC = \sqrt{29} = 5x$

Заметим, что $S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot CE \cdot \sin 45°$

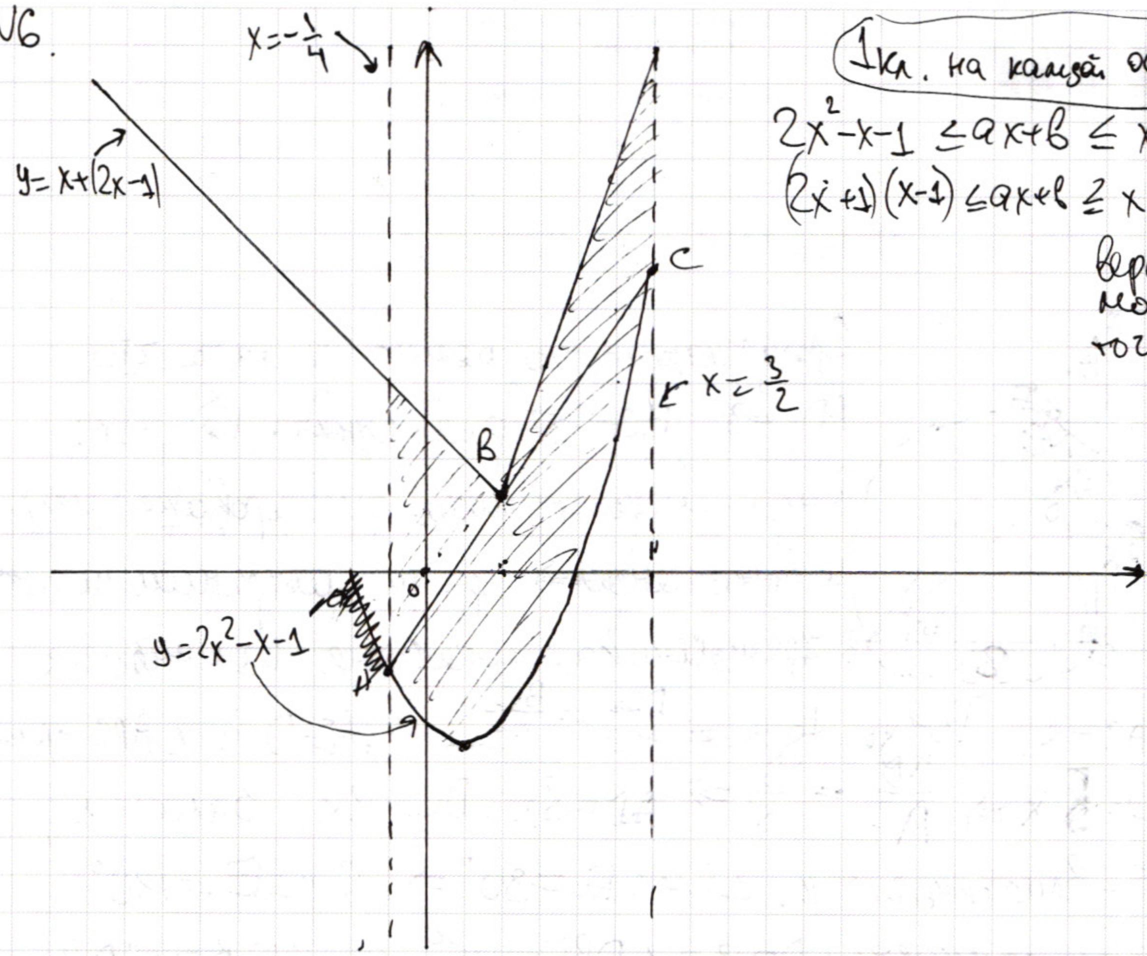
$DE = AD \sin\alpha = AD\sqrt{\frac{tg^2\alpha}{tg^2\alpha + 1}} = AD \cdot \sqrt{\frac{4}{29}} = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{6}{5}$

Из $\triangle ACE$: $\frac{CE}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin 135°} = \frac{AC}{\sin 45°}$

$CE = \frac{AC \cdot \sin\alpha}{\sin 45°} = \frac{\sqrt{29} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}$

$S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{6}{5}$ Ответ: $S_{CED} = \frac{6}{5}$

N6.



1кл. на каждой оси $=\frac{1}{4}$

$2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|$

$(2x+1)(x-1) \le ax+b \le x+|2x-1|$

вершина модуля в точке $x=\frac{1}{2}$

Построим графики левой и правой частей нер-ва. Тогда все искомые прямые на промежутке от пунктира до пунктира должны лежать ~~в~~ в заштрихованной области (т.е. отрезок этой прямой от $-\frac{1}{4}$ до $\frac{3}{2}$ целиком лежит в заштрих обл-ти. Заметим, что точки A, B, C лежат на 1 прямой, для которой $a=1,5$; $b=-\frac{1}{4}$, при этом эта прямая одна из искомых. Пусть теперь $b\neq-\frac{1}{4}$. Тогда значение в точке $-\frac{1}{4}$ сдвинется вверх по прямой $x=-\frac{1}{4}$ или вниз. Если вниз, то значение прямой в этой точке строго меньше значения параболы, а если вверх, то тогда значение будет равно $-\frac{1}{4}a+b$ (пусть это A_1), ~~а значение в точке~~ тогда наша прямая не должна пересекать модуль более чем в 1 точке $\Rightarrow$ наша прямая имеет угл. коэф. меньше чем (A_1B). ~~Найдем a для (A_1B)~~. ~~AB:~~ $\cancel{\begin{cases} \frac{1}{2}a+b\neq\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}a+b>-\frac{1}{4} \end{cases}}$ ~~значение в B и A_1~~

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Получаем $\frac{3}{2}a+3b$~~

Рассмотрим прямую A_1B. Для неё $b > -\frac{1}{4}$ и в точке B верно
$\frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2}$

Тогда $\frac{3}{2}a + 3b = \frac{3}{2}$

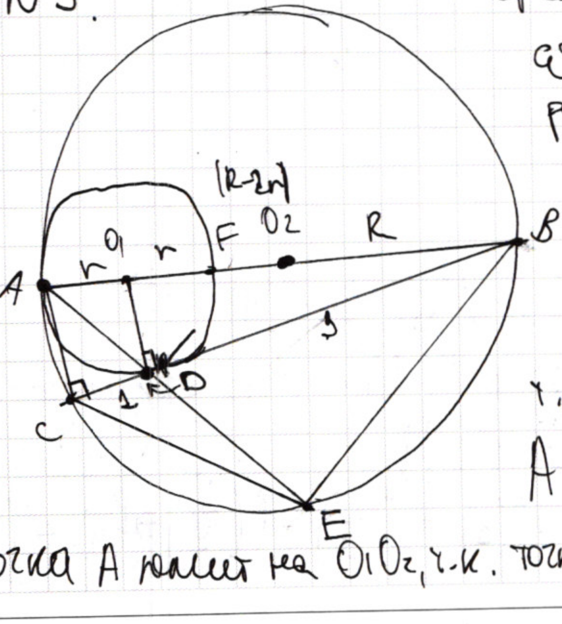
Но значение прямой в точке $\frac{3}{2}$ будет равно $\frac{3}{2}a + b$.

Заметим, что $\frac{3}{2}a + b = \frac{3}{2} - 2b < 2$, т.к. $b > -\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ значение в точке $\frac{3}{2}$ будет строго меньше, чем у параболы, (К).

Значит если (A_1B) не подходит, то не подходят и прямые с меньшим a, т.к. в точке $x = \frac{3}{2}$ их значения будут ещё меньше. Таким образом мы имеем, что любая другая прямая, кроме (AB) будет на заданном промежутке нарушать требуемое нер-во $\Rightarrow$ $a = 1{,}5$ и $b = -\frac{1}{4}$ — единственные a и b.

Ответ: $(1{,}5; -\frac{1}{4})$

N5.



~~Проведём~~ Пусть O_1 и O_2 — центры ω и Ω соотв. Пусть BA второй раз пересекает ω в точке F.

Тогда проведём O_1D. Тогда $O_1D \perp BC$ как отр. к кас. $\Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle O_1DB \sim \triangle ACB$, т.к. $O_1D \parallel AC$, т.к. $AC \perp CB$, т.к. $\angle ACB$ опир. на диаметр AB. Из подобия получаем:

(точка A лежит на O_1O_2, т.к. точка касания 2 окр-тей лежит на их линии цент.)

$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA}$

Перепишем: $\frac{3}{3+1} = \frac{2R-r}{2R}$. Отсюда получаем, что $\boxed{R = 2r}$.

Тогда для $\triangle O_1DB$, т.к. он прямоугольный:

$O_1D^2 + DB^2 = O_1B^2$ или же $r^2 + 3^2 = (2R-r)^2$ или же

$r^2 + 9 = 9r^2 \Rightarrow r = \frac{3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow R = 2r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

угол между диаг.

Найдём S_{BACE} как $\frac{AE \cdot BC \cdot \sin(\widehat{AE, BC})}{2} = \frac{AE \cdot \overset{4}{BC} \cdot \sin\alpha}{2}$

Проведём FD, тогда $\triangle AFD \sim \triangle ABE$, т.к. и $\angle ADF$ и $\angle AEB = 90^\circ$, т.к. опир. на диаметры.

Тогда $\frac{AD}{AE} = \frac{AF}{AB} = \frac{2r}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ если $AD = x$, то $AE = 2x$.

Тогда по Т о произв. отр. хорд: $AD \cdot DE = BD \cdot DC = 3 = x \cdot x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{3} \Rightarrow AE = 2\sqrt{3}$

$BC = BD + DC = 4$

$\sin\alpha = \frac{AC}{AD}$ из $\triangle ACD$, $AC = \frac{4}{3}r$ из первого подобия;

$AD = \sqrt{3} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Тогда $S_{BACE} = \frac{4 \cdot \cancel{2}\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\cancel{2}} = 4\sqrt{2}$

Ответ: $4\sqrt{2}$

№7.

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/2]$

Заметим, что $f(1 \cdot b) = f(1) + f(b) = f(b) \Rightarrow f(1) = 0$.

Заметим также, что $f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y})$ и это должно быть < 0. $\Rightarrow f(\frac{1}{y}) < 0$ и $|f(\frac{1}{y})| > |f(x)|$

По [illegible] верно следующее рав-во $0 = f(1) = f(y) + f(\frac{1}{y}) \Rightarrow f(y) = -f(\frac{1}{y})$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значит теперь достаточно найти все пары x и y для которых $f(y) > f(x)$. и $x \neq y \neq 1$

Распишем все значения f для чисел (натур.) от 1 до 21, пользуясь 2 данными условиями

a	f(a)
1	0
2	1
3	1
4	2
5	2
6	2
7	3
8	3
9	2
10	3
11	5
12	3
13	6
14	4
15	3
16	4
17	8
18	3
19	9
20	4
21	4

f(x) принимает значения:

0 – 1 раз → не берём !

т.к. f(0) не определено, $f(0) = f(0) + f(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) = 0$ для $\forall$ x, что неверно (!)

1 – 2 раза
2 – 4 раза
3 – 6 раз
4 – 4 раза
5 – 1 раз
6 – 1 раз
8 – 1 раз
9 – 1 раз

Тогда для каждого возм. f(y) посчитаем сколько x есть таких, что $f(x) < f(y)$.

$1\cdot19 + 1\cdot18 + 1\cdot17 + 1\cdot16 + 4\cdot12 + 6\cdot6 + 4\cdot2 = 19+18+17+16+48+36+8 = 37+33+56+36 = 73+89 = 162$.

Ответ: 162 пары

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

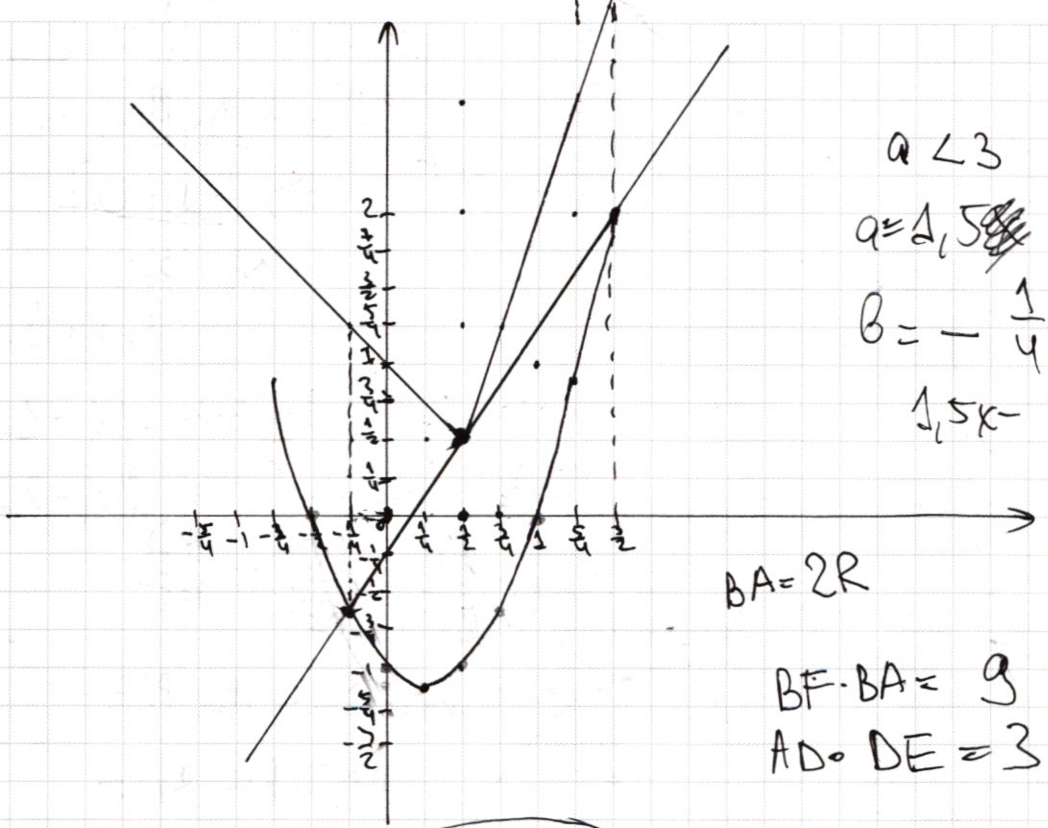
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$a < 3$

$a = 1,5$

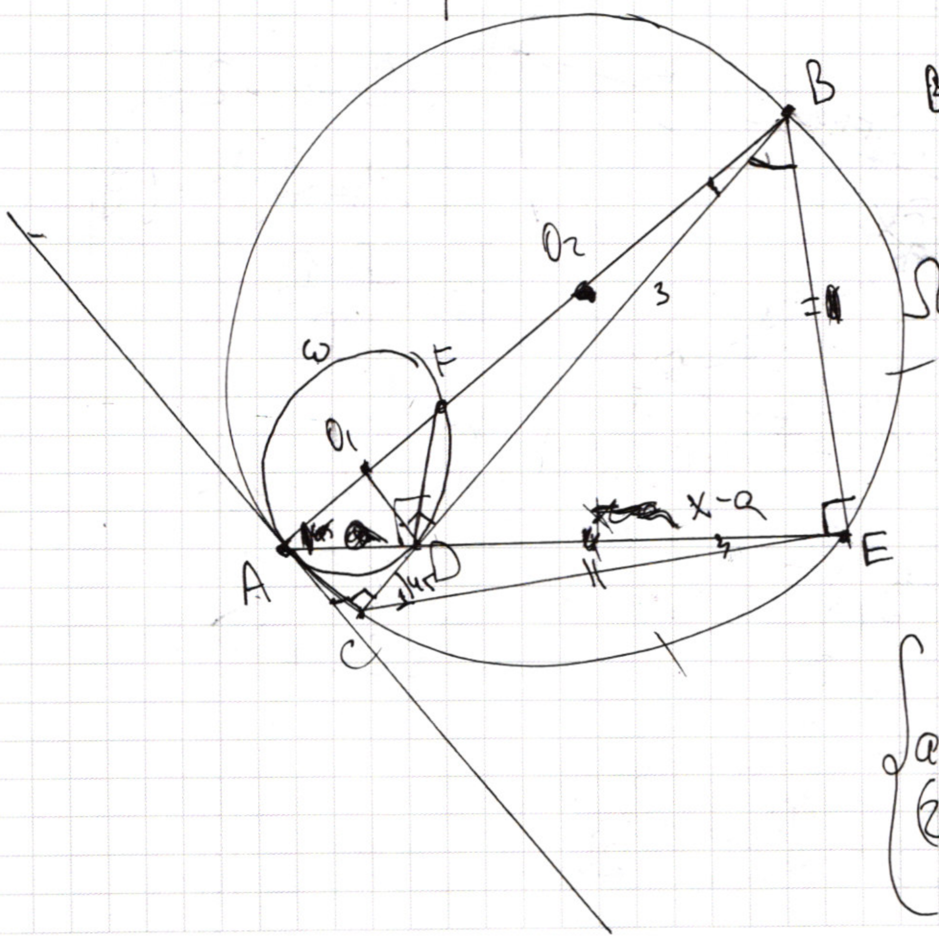
$b = -\frac{1}{4}$

$1,5x - \frac{1}{4}$

$BA = 2R$

$BF \cdot BA = 9$

$AD \cdot DE = 3$



$\cancel{BE = 4}$

$a(x-a) = 3$

$\Omega\ 2x^2 = 4R^2$

$BE \parallel DF$

$\frac{AD}{AE} = \frac{2r}{2R} = \frac{r}{R}$

$$\begin{cases} \frac{a}{x} = \frac{r}{R} \\ a(x-a) = 3 \\ (2R-2r)2R = 9 \end{cases}$$

☒ черновик ☐ чистовик

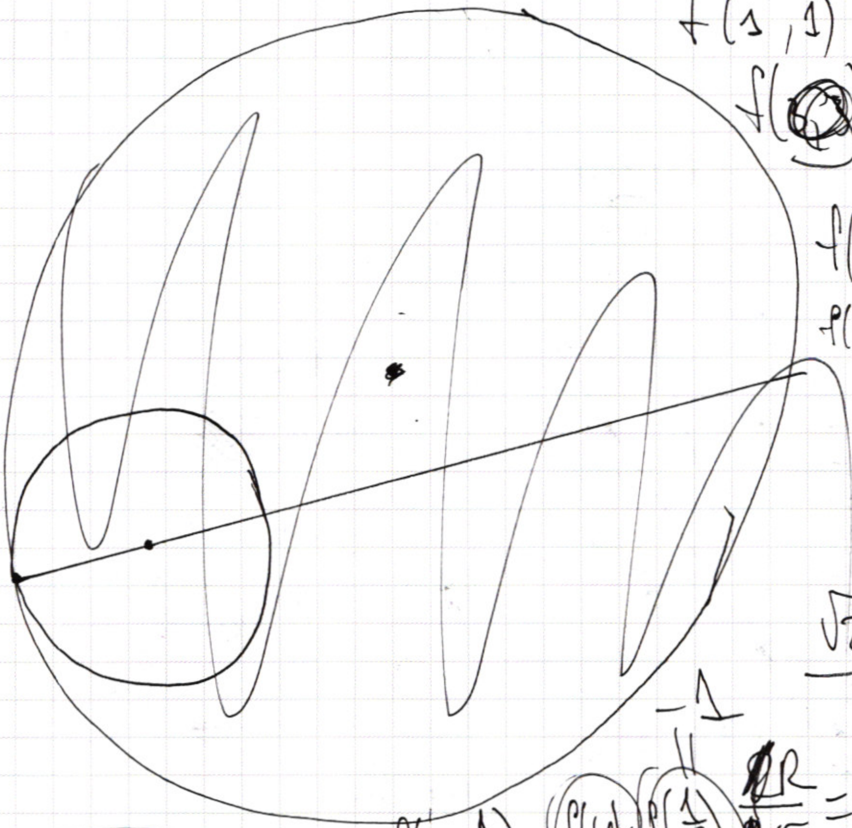
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(1,1) = 2f(1)$

$f(3) = 2f(3) = 2$



$f(4) = 2f(2) = 2$

$f(4) = f(1) + f(4) =$

$\Rightarrow \boxed{f(1) = 0}$

☒ $S = 1$

$\sin = 1$

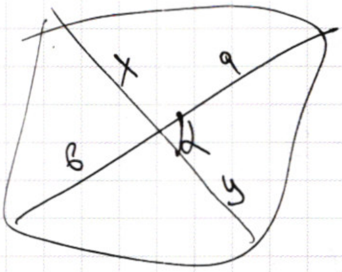
$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot\sin$ $f(2) = 1$

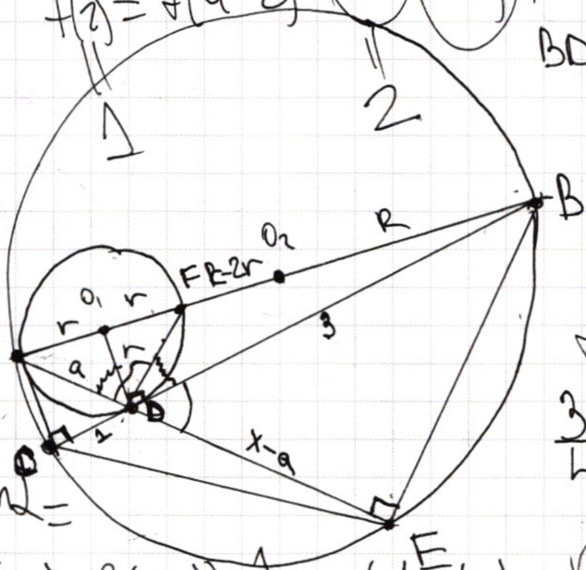
$f(4) = 2$

-1

$f(2) = f\left(4\cdot\frac{1}{2}\right) = f(4) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$\frac{2R}{4r} = \frac{DF}{BE} = \frac{AD}{AE}$





$BD \cdot DC = AD \cdot AE$

$BD^2 = BF \cdot BA =$

$= (2R - 2r)\cdot 2R$

$f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\frac{3}{4} = \frac{2R - r}{2R}$

$r = \frac{1}{4}$

$6R = 8R - 4r$

$2R = 4r$

$R = 2r$

$S = \frac{1}{2}ax\sin\alpha +$

$+ \frac{1}{2}ay\sin\alpha +$

$+ \frac{1}{2}by\sin\alpha + \frac{1}{2}bx\sin\alpha =$

$= \frac{1}{2}\sin\alpha(a(x+y) + b(x+y)) = \frac{1}{2}\sin\alpha(d_1 d_2)$

$\frac{1}{2}3a$

$r^2 + 9 = (3r)^2$

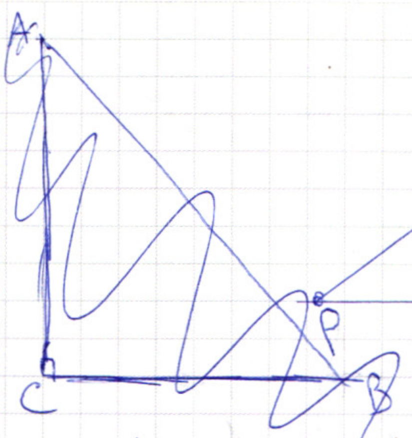
$r^2 + 9 = 9r^2$

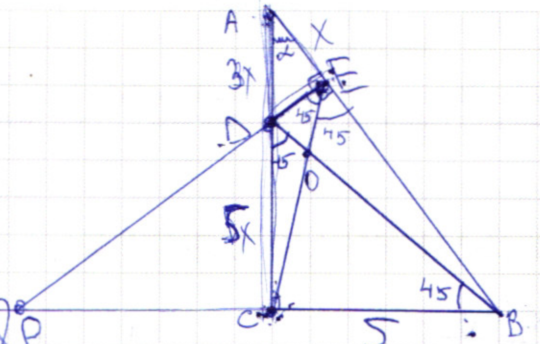
$9 = 8r^2$

$r = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow R = \frac{3}{\sqrt{2}}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)





$DE = \sqrt{3-x^2}$

$tg = \frac{5}{8}$

$\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}$

$\frac{CE}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin 135} = AC\sqrt{2}$

$\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{8}$ $\quad$ $\frac{BE}{BE} = \frac{DO}{BO}$

$192\frac{3}{64}$

$CE = AC\sqrt{2} \cdot \sin\alpha$

$\cancel{\frac{8}{\sin 135^\circ} = \frac{x}{\sin \angle ACE}}$

$\cancel{\frac{x}{\sin 45}}$

$x^2 + y^2 = 3$

$y = \sqrt{3-x^2}$

$\frac{\sqrt{3-x^2}}{x} = \frac{BC}{8}$

$\frac{5}{8} = \sqrt{\frac{25}{64}}$

$BC^2 +$ $\quad = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$267 - 192 = 75$

$\cancel{8\sqrt{2} = \frac{x}{\sin \angle ACE}}$

$S = \frac{1}{2} CE \cdot AE \cdot \sin 135^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2}} CE \cdot AE$

$\frac{\sqrt{3-x^2}}{x} = \frac{5}{8}$

$\cancel{3 - \frac{8}{11}}$

$5x = 8\sqrt{3-x^2}$

$25x^2 = 64(3-x^2)$

$25x^2 = 192 - 64x^2$

$89x^2 = 192$

$x = \sqrt{\frac{192}{89}}$

$\cancel{5x = 8\sqrt{3-x^2}}$

$\cancel{25x^2 = 24 - 8x^2}$

$\cancel{33x^2 = 24}$

$x^2 = \sqrt{\frac{24}{33}} = \sqrt{\frac{8}{11}}$

$x^2 = \frac{8}{11}$

$\times \frac{89}{3}$

$267 - 192 = \boxed{75}$

$\frac{\sqrt{3 - \frac{192}{89}}}{\sqrt{\frac{192}{89}}} = \sqrt{\frac{3 - \frac{192}{89}}{\frac{192}{89}}} \cancel{\frac{\sqrt{\frac{33-8}{11}}}{\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{11}}} = 5} = \sqrt{\frac{267-192}{192}} = \sqrt{\frac{75}{192}}$

☒ черновик ☐ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x \geq 1;\ y \geq 2 \\ x \leq 1;\ y \leq 2 \\ y \geq 2x \end{cases}$$

x	y	
2	3	−
0	1	
$\frac{2+\sqrt2}{2}$	$2+2\sqrt2$	
$\frac{2-\sqrt2}{2}$	$2-2\sqrt2$	−

$\sqrt2$

$2\cdot\frac{1}{16}-\frac14-1=$

$=\frac18-\frac14-1=$

$=\frac18-\frac28-\frac88=-\frac98$

$1=\sqrt{2-1}$ +

$1-4+3=0$ +

$2+2\sqrt2-2-\sqrt2=\sqrt{\quad}$

$\frac32\cdot-\frac34=-\frac98$

$(2x+1)(x-1)$ $1-x$

$(2+2\sqrt2)=2(1+\sqrt2)$

$4\cdot\frac12=\frac22\cdot-\frac12=-1$

$x>\frac12$ $3x-1$

$x<\frac12$ $-x+1$

$(1+\sqrt2)(2+\sqrt2)-2-\sqrt2-2-2\sqrt2+2=$

$\frac34 a+2b$

$\frac32 a+b \leq 2$

$\frac32 a+3b=\frac32$

$=2+2\sqrt2+\sqrt2+\cancel{2}-\cancel{2}-\cancel{\sqrt2}-\cancel{2}-\cancel{2\sqrt2}+\cancel{2}=$

$b<\frac34$

$x\geq\frac12$ $\frac32a+b=\frac32-2b$

$x<\frac12$

$=2$ +

$y\leq$

$2\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2+(2\sqrt2)^2=3$

$2x^2-x-1 \leq ax+b \leq x+|2x-1|$

$(2x+1)(x-1)\leq ax+b \leq x+|2x-1|$

$(2x+1)(x-1)\leq ax+b$

$2(x-1)^2+(4(x-1))^2=18(x-1)^2=3$

$6(x-1)^2=1$

$2\left(\frac{1}{\sqrt6}\right)^2+\left(\frac{4}{\sqrt6}\right)^2=3$

$2+\frac{4}{\sqrt6}-2-\frac{2}{\sqrt6}=\frac{2}{\sqrt6}$

$\frac26+\frac{16}{6}=3$ +

$\sqrt{\frac{1}{\sqrt6}\cdot\frac{4}{\sqrt6}}$

$2-\frac{4}{\sqrt6}-2+\frac{2}{\sqrt6}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$10+20=30$

$a \quad ap \quad ap^2 \quad -p$

-1

$ax^2+2apx+ap^2=0$

$x^2+2px+p^2=0$

$(x+p)^2=0$

$-p=ap^3 \quad a<0$

$-1=a\cdot p^2$

$(x-1)(y-2)$

$xy-y-2x+2$

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$2(x-1)^2+(x-1)^2=3$

$2(x-1)^2+(4x-4)^2=3$

$3(x-1)^2=3$

$6(x-1)^2=3$

$6x>1200-3x$

$1200-x>x$

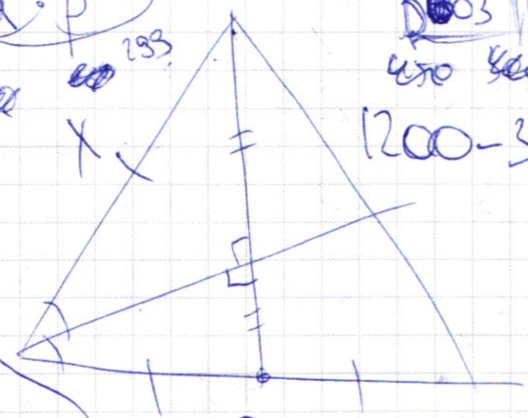
$1200-2x>2x$

$(x-1)^2=1$

$(x-1)^2=\frac{1}{2}$

303

что 4001



$1200-3x$

$6x>1200$

$1200>2x$

$1200>4x$

$2x \quad x^2-2x+1-\frac{1}{2}=0$

538 $x^2-2x+\frac{1}{2}=0$

$2x^2-4x+1=0$

299

$2a \ldots$

99

$x>200$

$300>x$

$2 \vee 0$

$\frac{2+\sqrt{2}}{2} \quad \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

$2+2\sqrt{2} \quad 2-2\sqrt{2}$

$y^2-5xy+4x^2+2x+y-2$

$(y-x-1)(y-4x+2)$

$y=x+1 \vee y=4x-2$

$y^2-4xy+2y-xy+4x^2-2x-y+4x-2=$

$=y^2-5xy+4x^2+y+2x-2$

$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot2\cdot1}}{4}=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 1 ; y\geq 2 \\ x\leq 1 ; y\leq 2 \end{cases}$$

$2x^2-4x+2+y^2-4y+4$ $y\geq 2x$

x	y
2	3
~~0~~	~~1~~
0	3
2	1

$(y-2x)^2=(x-1)(y-2)$

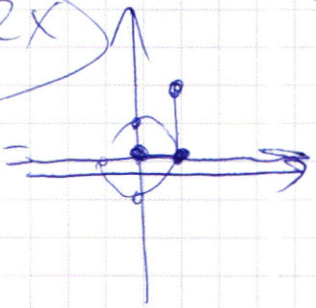
$y-2x\geq 0$

~~$\max y=2+\sqrt{3}$~~

$y\geq 2x$

$(y-2x)^2=xy-2x-y+2$

$-5-2(-3)=$

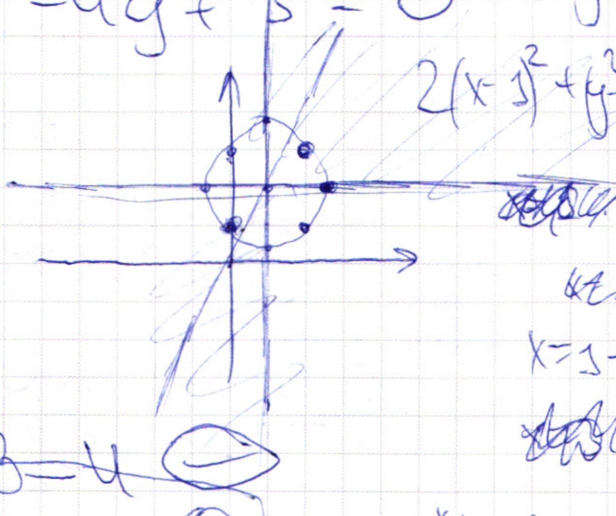


$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2=$

$$\begin{cases} y^2-5xy+4x^2+2x+y+2=0 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$x^2+y^2=1$

$2(x-1)^2+(y-2)^2>3$



$\sqrt{3}\sim 1{,}7$

$y^2-5xy+4x^2$

$y-2x\geq 0$

$x=1\Rightarrow y=2+\sqrt{3}\approx 3{,}7$

$(y-x)(y-4x)+2x+y-2$

$3-4$ $-$

$1-0$ $+$

$3-0$ $+$

$1-4$ $-$

$\frac{1{,}7+1{,}4}{1{,}4}=$

x_{max} $y=2\Rightarrow \frac{3{,}1}{1{,}4}>2$

$(x-1)^2=\sqrt{\frac{3}{2}}$

$x-1=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

~~$y^2-4xy+2y-xy+4x^2-2x-8y$~~

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)