МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

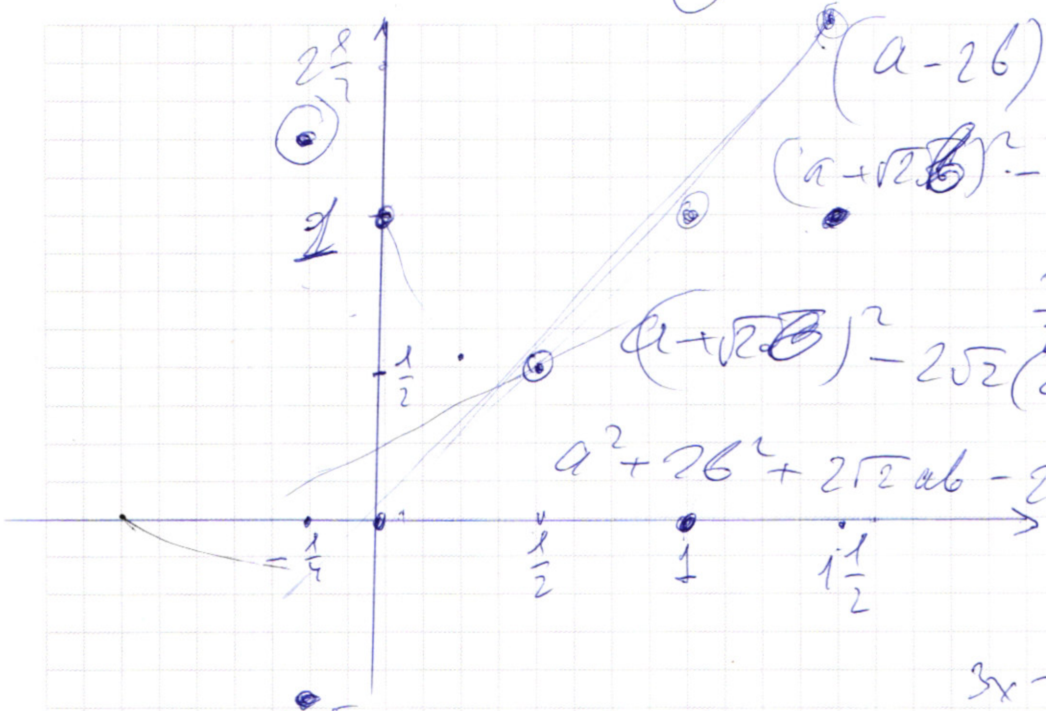
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$(a-2b)^2 = ab$

$(a+\sqrt{2}b)^2 - 2\sqrt{2}ab = 3$

$(a+\sqrt{2}b)^2 - 2\sqrt{2}(a-2b)^2 =$

$\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2} = -\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = -\frac{5}{8}$

$a^2+2b^2+2\sqrt{2}ab - 2\sqrt{2}a^2 - 8\sqrt{2}b^2 + 4\sqrt{8}$

$2\cdot\frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{9}{2} \quad \frac{6}{2}$

$3x-1$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$

$1-x$

$2\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-1 = \frac{1}{8}+\frac{2}{8}-1 = -\frac{5}{8}$

$2\cdot\frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = \quad \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2};2\right)$

$\frac{9}{2} - \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = 2$

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \quad \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{y-\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}}$

$\frac{3}{2}x - \frac{3}{4} = y - \frac{1}{2}; \quad x - \frac{1}{2} = \frac{y-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$

$\frac{3}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = y; \quad \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} = y$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-2x)^2 = xy-2x-y+2 \\ \cancel{xy-2x} \quad y-2x \geq 0 \end{cases}$$

$y-2=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$y=-\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \\ y \geq 2x \end{cases}$$

$y=$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$\frac{x-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=\frac{y-2}{\frac{1}{2}}$

$(x-2)^2-4+(y-2)^2-4+3+x^2=0$

$(y-2)^2-4-4x+3+2x^2$

$(y-2)^2+2x(x-2)=1$

$2(x-1)^2+1+(y-2)^2-4=$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

$(\frac{1}{2};1)$ $\frac{y-2}{1\frac{1}{2}-2}=\frac{x-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$ $(\frac{3}{2};2)$

$(x+y)^2+x^2-2xy-4x-4y+3$

$(x+y)^2+x(x-2y)-4(x+y)+3=0$

$(x+y)^2-4(x+y)+3+x(x-y)$

$(y-2x)^2=(x-1)(y-2)$

$y^2-4xy+4x^2$

$$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \\ y \geq 2x \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

y^2+4x^2-4xy

$y \geq 2x$

$y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0$

$x-1=t$

$y-2=z$

$x=t+1$

$y=z+2$

$2x^2+y^2-4x-4y+3-y^2+5xy-4x^2-2x-y+2$

$(z-2t)^2=t\cdot z$

$2t^2+z^2=3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Если $x = 1$~~

$x + 2x + 3d =$

$= 3x + 3d = 1200$

$x + d = 400$

При этом $x = 201$

$x + 3d > 2x$ $x > d$

$3x > 3d$ $3d > x$

$2x = 402$

$3d \le 1200 - 603$ 597

Если $x = 300$, то $d = 100$

$3d = x$

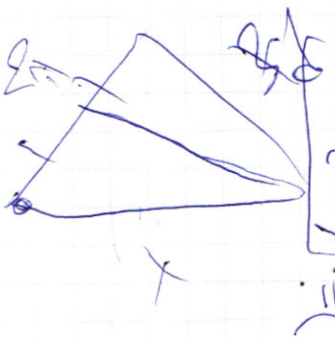
Значит,

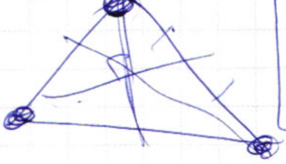
$201 \le x \le 299$ 101

99 вар

Для

Пусть





$2(x-1)^2 + 1 +$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$(x^2-2x+1)=(x-1)^2+x^2+y^2-2x-4y+2$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

$y^2+4x^2-4xy=(x-1)(y-2)$

$(x-1)+((x-1)-(y-2))^2+2(x-1)(y-2)=3$

$y^2+4x^2-4xy=xy-y-2x+2$

$((y-2)-2(x-1))=\sqrt{(x-1)(y-2)}$

$(y-2)^2+4(x-1)^2-4(y-2)(x-1)=(x-1)(y-2)$

$$\begin{cases} (y-2)^2+4(x-1)^2-5(y-2)(x-1)=0 \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+4b^2-5ab=0 \\ 2b^2+a^2=3 \end{cases}$$

$2b^2-5ab+3=0$

$a^2+2b^2-5ab=2b^2+a^2-3$

a^2+4b^2-5ab

$a^2=3-2b^2$

$2b^2+3-5ab=0$

$2b^2-5ab+3=0$

$D=\sqrt{25a^2-24}$

$4b-5a=\sqrt{25a^2-24}$

$4b^2-10a=-6$

$2b^2-5a=-3$

$b=\dfrac{5a\pm\sqrt{25a^2-24}}{4}$

$16b^2+25a^2-40a=25a^2-24$

☑ черновик ☐ чистовик

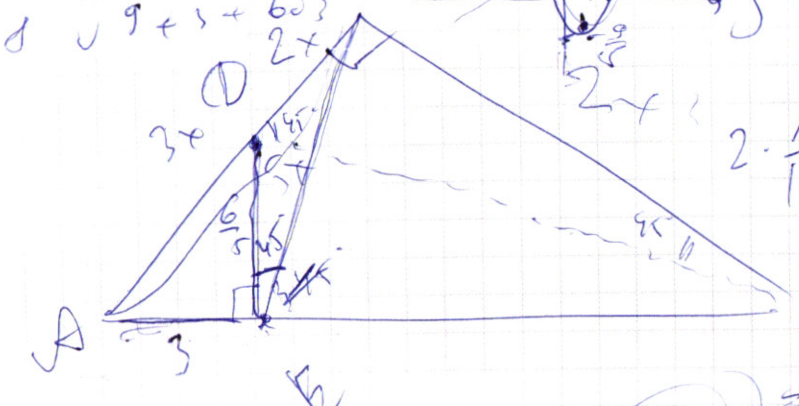
(Поставьте галочку в нужном поле)

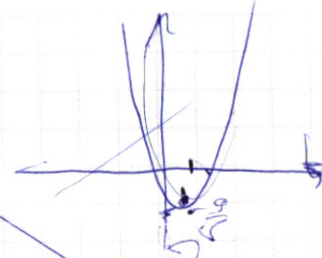
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$3\sqrt{2} \vee 3+\sqrt{3}$

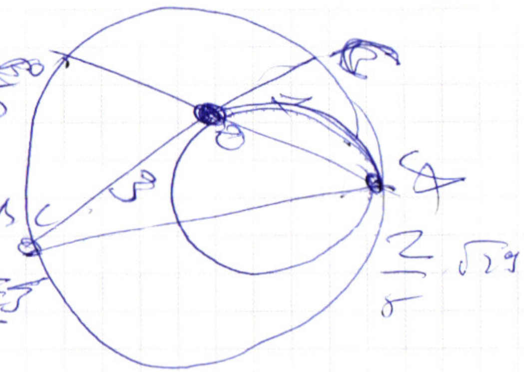
$18 \vee 9+3+6\sqrt{3}$





$x6 = \frac{1}{4}$

$tg\angle BAC - ?\quad \angle CED = 45$



$\triangle ADE \sim \triangle ABC$

$\frac{2}{5}\sqrt{29}$

$2\cdot\frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

$\frac{1}{8} - \frac{2}{8} - \frac{8}{8} =$

$AD \cdot AC = AB \cdot AE \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{29}}\cdot\frac{2}{5}\sqrt{29}$

$= -\frac{1}{8} = -\frac{9}{8}$

$15x^2 = AB \cdot AE$

$\frac{3}{\frac{3\sqrt{29}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$\frac{3\sqrt{29}}{5}$

$2x^2 - x - 1 = 0$

$D = 1 + 8 \quad x = 1$

$x = -\frac{1}{2}$

$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$

$\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}} \quad \alpha = \arcsin\frac{5}{\sqrt{29}}$

$2x^2 - x - 1 \quad \frac{2}{5}$

$2\cdot\frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 \quad DE = x \quad \frac{x}{AE} = \frac{2}{5}$

$\frac{9}{2} - \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = 2 \quad 2\frac{3}{2}$

$\frac{5x}{2}$

$x^2 + \frac{25x^2}{4} = \frac{29x^2}{4} = \frac{9\cdot 29}{25}$

$\frac{\frac{6}{5}}{AE} = \frac{2}{5}$

$\cancel{AE = \frac{3}{2}}$

$\frac{6}{5AE} = \frac{2}{5}$

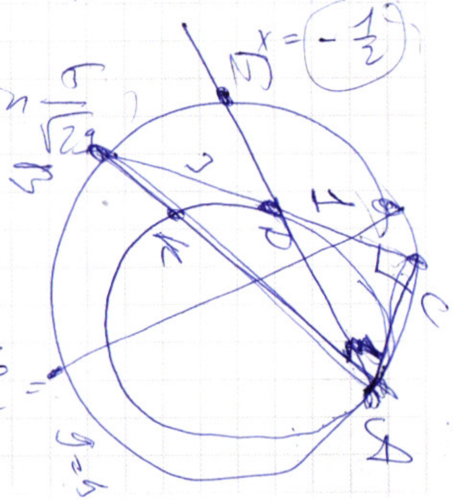
$AE = 3$

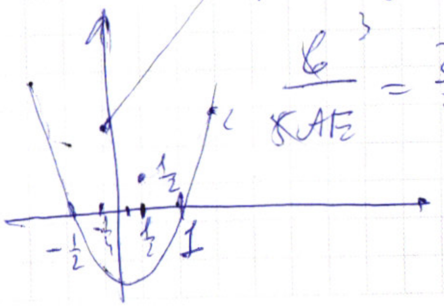
$9 + \frac{36}{25} =$

$x^2 = \frac{36}{25}$

$x = \frac{6}{5}$

$9 = 36 \cdot AB$





$f(x) = x + |2x-1|$

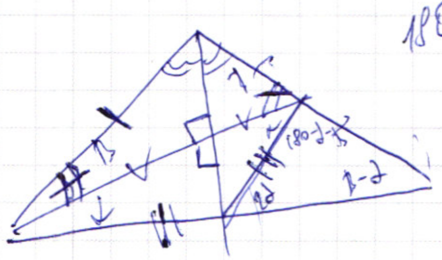
если $x \geq \frac{1}{2}$ $3x-1$

$\frac{9\cdot 25 + 36}{25}$

$(x-1)(2x+1)$

600

$180-\beta+\alpha$



21 : ~~188~~

$180-\beta-\alpha+2\alpha+x=\cancel{180}$

$\alpha-\beta+x=0$

$\beta+\alpha+\beta-\alpha+2y=180$

Соответственно

2x - чётное:

кол-во четном $2\beta+2y=180$ $y=90-\beta$;

$x+\alpha=400$

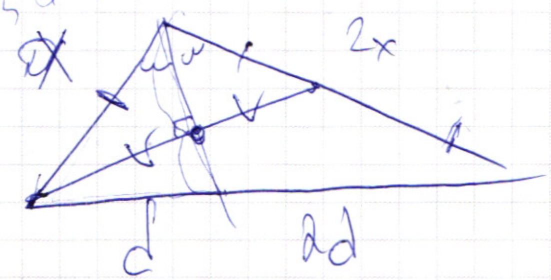
$\beta=90-y$

$2x+x$

$180-2\beta+\beta+\alpha+\beta-\alpha$

1 1200:

1 2 3 4



$\frac{x}{\alpha}=\frac{2x}{y}$

$y=2\alpha$

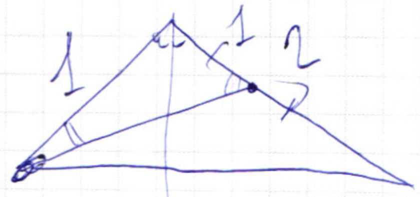
$3x+3\alpha=1200$

$x+\alpha=400$

$\frac{h}{\beta}\cdot\frac{1}{2}=21$

$\frac{2\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{x}{2x}=1$

$x+\alpha=400$:



Если сторона, к которой проведена биссектриса в 2 раза длиннее, чем сторона, из которой является стороной угла из которой выходит биссектриса то

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a, b, c - члены геометр прогрессии!

$ax^2+2bx+c=0$ $\qquad b^2=a\cdot c$

$D=b^2-4ac$

$D=0$

$a\cdot c=$

$a=b\cdot h\cdot q^n$

$b=h\cdot q^{n+1}$

$c=h\cdot q^{n+2}$

$b=a\cdot q;\quad c=a\cdot q^2$

$x=\frac{-b}{a}$

$a,\ b,\ c;\ \frac{-b}{a}$

$\frac{-b}{a}=a\cdot q^3$

$a;\ aq;\ aq^2;\ \frac{-b}{a}$

$c^2=\frac{-b}{a}\cdot b=\frac{-b^2}{a}$

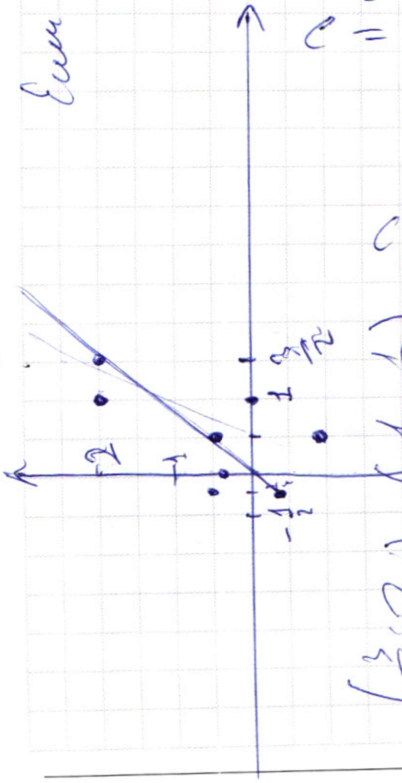
$b^2=a\cdot c$

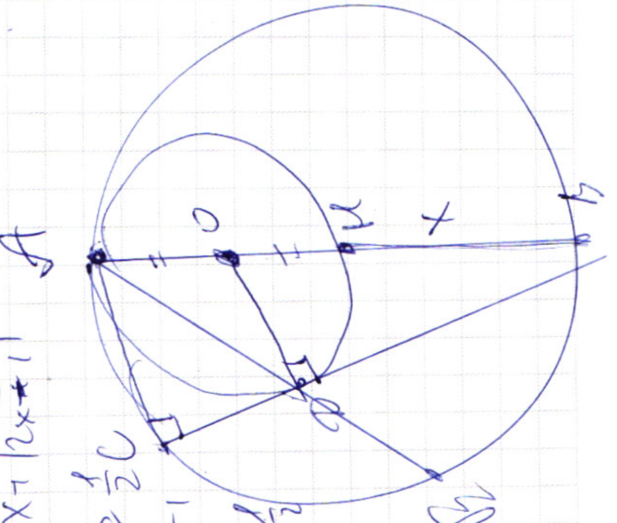
$c^2=\frac{-a\cdot c}{a}$

$c^2+c=0$

$c(c+1)=0$

$c=0;\quad c=-1$





Если $x\geq\frac{1}{2}$

$f(x)=3x-1$

Если $x<\frac{1}{2}$

$1-x$

$f(x)=x+|2x-1|$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

a, b, c – члены геометр. прогрессии.

Тогда, $b^2 = a \cdot c$,

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$D = b^2 - ac$

$b^2 = a \cdot c$

$D = a \cdot c - ac$

$D = 0$

$x = -\frac{b}{a}$; $x = -\frac{b}{a}$ – четвёртый член прогрессии.

Тогда,

$c^2 = \left(-\frac{b}{a}\right) \cdot b$

$c^2 = \frac{-b^2}{a}$

$b^2 = a \cdot c$

$c^2 = \frac{-a \cdot c}{a}$, $a \neq 0$

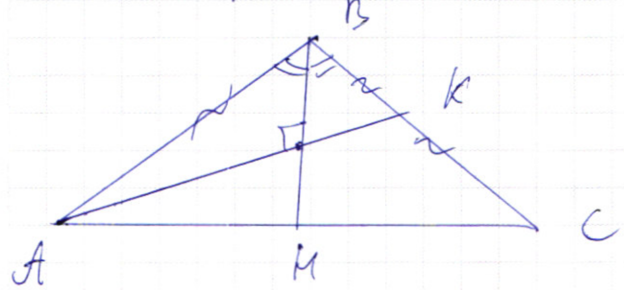
$c^2 + c = 0$

$c(c+1) = 0$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = -1 \end{array} \right. \\ c \neq 0 \end{cases}$ $c = -1$

Ответ: -1

№2.



1) Заметим, что если биссектриса BH перпендикулярна медиане AK, то

$\triangle ABK$ - равнобед.; $AB = BK = KC$

Верно и обратное, что если $\triangle ABC$ т.ч. $AB = \frac{1}{2}BC$, и из точки A проведена медиана, то биссектриса угла B перпендикулярна медиане.

2) Пусть $AB = x$; $BC = 2x$

по св-ву ~~медиа~~ биссектрисы,

$$\frac{AB}{AH} = \frac{BC}{HC}; \quad AH = \frac{1}{2}HC$$

$AH = d$; $HC = 2d$;

$AC = 3d$;

$3d + 3x = 1200$; $\quad d + x = 400$

При этом из неравенства треугольника)

$$\begin{cases} x + 3d > 2x \\ 3x > 3d \end{cases} \quad \begin{cases} 3d > x \\ x > d \end{cases}$$

Тогда, $x \geq 201$; $x \leq 299$, иначе

$d \leq 100$; $\cancel{3d < x}$ $3d \geq x$

значит, $201 \leq x \leq 299$

x может принимать 99 значений

3) Если провести биссектрису или медиану

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (продолж.)

из другого угла, то начав изменять стороны этого треугольника, мы будем получать равный треугольнику, который рассмотрим в начале (равенство по трём сторонам)

Значит, треугольников 99

Ответ: 99 вид.

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{y(x-1)-2(x-1)} \\ (x^2-2x+1)+(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((y-2)-2\cdot(x-1))=\sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0 \end{cases}$$

Пусть $a=(y-2)$; $b=(x-1)$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{a\cdot b} \\ 2\cdot b^2+a^2-3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a-2b)^2=ab \\ a-2b\geq 0 \\ 2b^2+a^2-3=0 \end{cases}$$

№3 (продолж.)

$$\begin{cases} a^2+4b^2-4ab=a\cdot b \\ 2b^2+a^2=3 \\ a-2b\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2+4b^2-5ab=0 \\ 2b^2+a^2=3 \\ a-2b\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b^2-5ab+3=0 \quad (1) \\ 2b^2+a^2=3 \\ a-2b\geq 0 \end{cases}$$

(1) $D=25a^2-24$

$$b=\frac{5a\pm\sqrt{25a^2-24}}{4}$$

$$\left[\begin{array}{l} 4b-5a=\sqrt{25a^2-24} \\ 4b-5a=-\sqrt{25a^2-24} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 16b^2+\cancel{25a^2}-40ab=\cancel{25a^2}-24 \\ 4b-5a\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 16b^2+\cancel{25a^2}-40ab=\cancel{25a^2}-24 \\ 5a-4b\geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2b^2-5ab=-3 \\ 4b-5a\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2b^2-5ab=-3 \\ 5a-4b\geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Если $a-2b\geq 0$
$5a\geq 10b$;

Значит,

$$\begin{cases} 2b^2-5ab=-3 \\ a-2b\geq 0 \\ 2b^2+a^2=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2b^2-5ab=-2b^2-a^2 \\ \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

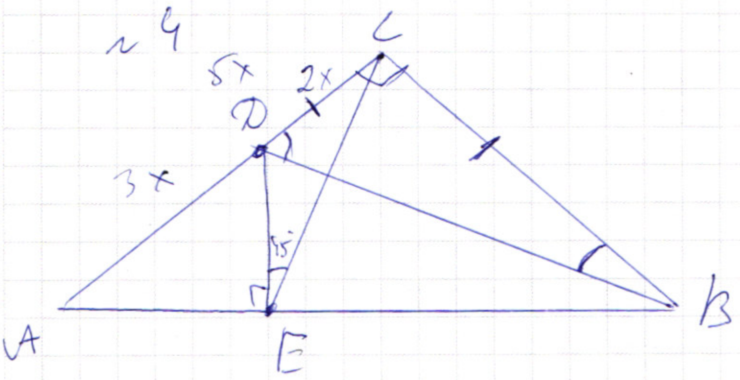
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Решение:

а) 1) $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$; Значит, $DC = 5x - 3x = 2x$

2) $DCBE$ – четырёхугольник

т.к. $\angle DEB + \angle DCB = 90° + 90° = 180°$

$DCBE$ – вписанный (по признаку)

Тогда, $\angle DEC = \angle DBC = 45°$ (как вписанные углы)

3) $\triangle DCB$ – прямоугольный

$\angle DBC = 45°$, тогда, $\angle CDB = 90° - 45° = 45°$

$\triangle DCB$ – равноб. (по признаку)

Значит, $DC = CB = 2x$.

$tg \angle BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

б) 1) $AC = \sqrt{29}$; $S(CED)$ – ?

$AD = \frac{3\sqrt{29}}{5}$; $DC = \frac{2\sqrt{29}}{5}$

т.к. $tg \angle BAC = \frac{2}{5}$, то пусть $DE = x$;

Тогда $AE = \frac{5}{2}x$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 5
(Нумеровать только чистовики)

2) $\triangle ADE$:

По теореме Пифагора.

$$\frac{9\cdot 29}{25} = x^2 + \frac{25x^2}{4}$$

$$\frac{9\cdot 29}{25} = x^2\left(\frac{29}{4}\right)$$

$$x^2 = \frac{36}{25}; \quad x = \frac{6}{5}; \quad DE = \frac{6}{5}; \ AE = 3;$$

3) $\triangle ADE$:

$$\sin\angle ADE = \frac{AE}{AD} = \frac{3}{\frac{3\sqrt{29}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

4) $\triangle DEC$:

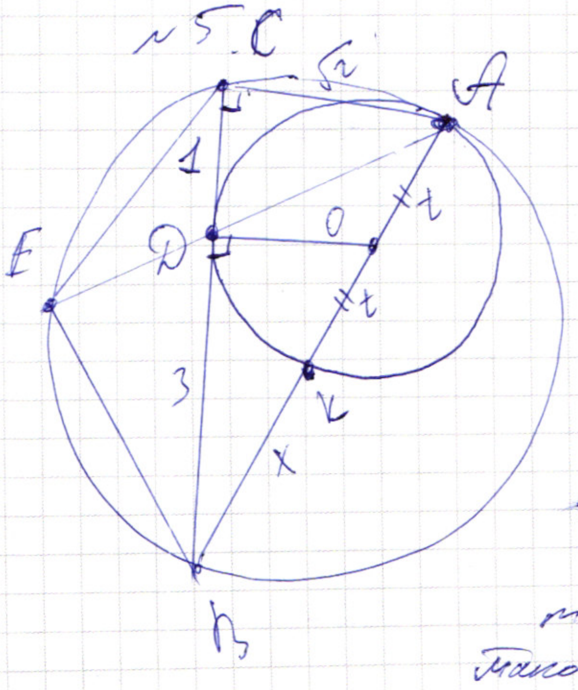
$$\sin\angle \cancel{A}DE = \sin(180^\circ - \angle ADE) = \sin\angle ADE$$

$$S(\triangle DEC) = \frac{1}{2}\cdot \sin\cancel{\angle DCE}\ \angle COE \cdot DC \cdot DE =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{29}}\cdot\frac{2\sqrt{29}}{5}\cdot\frac{6}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

Ответ: а) $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{2}{5}$; б) $S(\triangle DEC) = \frac{6}{5}$

№5.С



Решение

1) Пусть O - центр окружности ω, тогда, $O \in AB$, иначе проведём общую касательную через точку A, тогда из ~~O опустим~~ OA - перпендикуляр к касательной, но AB также перпендикулярна, такого быть не может, значит, $O \in AB$.

□ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолж.)

2) т.к. BC - касательная к ω.

BC касается в точке D

OD - перпендикуляр к BC

3) $\triangle BCA$, т.к. $\angle BCA$ опирается на диаметр окружности Ω, то $\angle BCA = 90°$

4) $\triangle BDO \sim \triangle BCA$ (по двум. углам)

($\angle BDO = \angle BCA$; $\angle CBA$ - общий)

Тогда,

$\frac{BO}{BA} = \frac{3}{4}$. Пусть $AB \cap \omega = K$.

Пусть $OA = OK = t$; $BK = x$;

Тогда, $\begin{cases} \frac{x+t}{x+2t} = \frac{3}{4} \\ 9 = x\cdot(x+2t) \end{cases}$

$BD^2 = BK \cdot BA$ - св-во касательной

$\begin{cases} x = 2t \\ 9 = 2t \cdot 4t \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2t \\ t^2 = \frac{9}{8} \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2t \\ t = \frac{3}{2\sqrt{2}} \end{cases}$

AK - диаметр ω;

$AK = 2t = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

AB - диаметр Ω;

$AB = x + 2t = 4t = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$; $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

5) CE ; BE - отрезки

6) $\triangle BCA$ - прямоугольный

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№5 (продолж.)

$CB = 4$; $AB = 3\sqrt{2}$

По т. Пифагора

$CA^2 = 18 - 16$; $CA = \sqrt{2}$;

7) $\triangle CAD$ – прямоуг.

$DA^2 = 2 + 1$, $DA = \sqrt{3}$.

8) CB и EA – хорды

По св-ву пересек. хорд

$ED \cdot DA = CD \cdot BD$

$ED \cdot DA = 3$

$ED = \sqrt{3}$; $DA = \sqrt{3}$

9) $S(BECA) = BC \cdot EA \cdot \sin\angle CDA =$

$= 4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{2}$

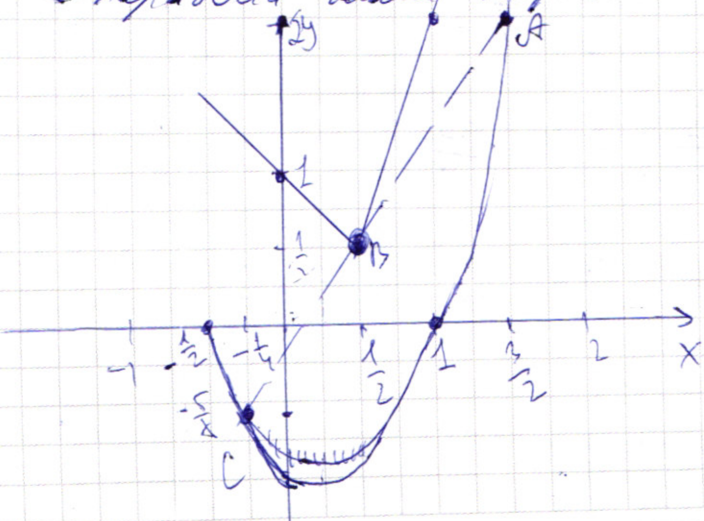
Ответ: 1) $R_\Omega = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; 2) $S(BECA) = 8\sqrt{2}$

$r_\omega = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

№6;

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$

1) Заметим, что $y = ax + b$ – прямая; $f(x) = x + |2x-1|$ – кусочно заданная функция, $g(x) = 2x^2 - x - 1$ – парабола ветви направлены вверх.



$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \ge \frac{1}{2} \\ 1 - x, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Зададим прямую через точки: $A\left(\frac{3}{2}; 2\right)$, $B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{y - \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}}$$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (продолж.)

$y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$;

При $x=-\frac{1}{4}$

$y=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}=-\frac{5}{8}$; $2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}-1=-\frac{5}{8}$

т.к. $C\left(-\frac{1}{4};-\frac{5}{8}\right)$; $C\in\left(y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\right)$

Заметим, что $\forall x: x\in\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$

выполняется неравенство

$2x^2-x-1\leq\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\leq x+|2x-1|$

Других значений a и b нет,

т.к. тогда если двигать точку A (точку пересечения прямой и параболы вверх по оси OY), то точка C начнёт двигаться вправо по оси OX, но тогда $\exists x$ $\left(x=-\frac{1}{4}\right)$, что

$ax+b<2x^2-x-1$

Точку B и точку C также нельзя сдвинуть так, чтобы выполнялось неравенство

Ответ: $a=\frac{3}{2}$; $b=-\frac{1}{4}$.