МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан. – проверить на дублезис

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] ~~а)~~ В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30°$.

   ~~б)~~ Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

$\frac{3-\sqrt{65}}{8} \vee -\frac{1}{2}$? $<$

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

$3-\sqrt{65} \vee -4$? $<$

$7 \vee \sqrt{65}$ $<$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

$6 - \frac{4}{2} = 6 - 2 = 4$

$\times 125$
$\times 3$
375

Отв: y_3: $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}; 0\right) \\ \left(\frac{3}{10}; 0\right) \\ \left(\frac{1}{2}; 4\right) \end{array}\right.$

$-\frac{8}{4} + \frac{6}{2} + 7 =$

$= -2 + 3 + 7 =$

$= 8$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Пусть $\exists q: b = qa$, $\Rightarrow c = q^2a$ по опр. геом. прогр., $q \neq 1$, $q \neq 0$. Подставим в ур-е: $ax^2 - 2bx + c = 0$,

$ax^2 - 2qax + q^2a = 0$,

т.к. $a \neq 0$: $x^2 - 2qx + q^2 = 0 \Rightarrow (x-q)^2 = 0 \Rightarrow x = q$.

По опр. геом. прогр. четвёртый член равен aq^3, но по усл. $aq^3 = q$, $\Rightarrow aq^2 = 1$, т.к. $q \neq 0$.

Заметим, что третий член прогр. $c = aq^2 = 1$.

Ответ: Третий член прогрессии равен 1.

№3.

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 6 - 6y + 6 = \sqrt{x(y-1) - 6(y-1)}, \\ x^2 - 12x + 36 + 2y^2 - 4y + 2 - 38 + 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-6) - 6(y-1) = \sqrt{(y-1)(x-6)}, \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0. \end{cases} \Rightarrow \text{Пусть} \begin{cases} x - 6 = p, \\ y - 1 = q. \end{cases}$$

$$\begin{cases} p - 6q = \sqrt{pq}, \\ p^2 + 2q^2 - 18 = 0 \end{cases}$$ — Заметим, что $p - 6q \geq 0$.

$$\begin{cases} p^2 - 12pq + 36q^2 = pq, \\ p^2 + 2q^2 - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 - 13pq + 36q^2 = 0, & (1) \\ p^2 + 2q^2 - 18 = 0 & (2) \end{cases}$$

(1): $p^2 - 13pq + 36q^2 = 0$,

$D = (169 - 4 \cdot 36)q^2 = (169 - 144)q^2 = 25q^2$, $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} p = \frac{13q + 5q}{2} = 9q. \\ p = \frac{13q - 5q}{2} = 4q. \end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

(продолжение к №3)

I) Пусть $p = 9q$. Подставим в систему.

$$\begin{cases} 9q - 6q = \sqrt{9q \cdot q}, \\ 81q^2 + 2q^2 - 18 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3q = \sqrt{9q^2} \Rightarrow q \geq 0. \\ 83q^2 = 18 \Rightarrow q^2 = \frac{18}{83}, \Rightarrow q = \frac{\pm 3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}. \end{cases}$$

Заметим, что $q \geq 0, \Rightarrow q = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}, \Rightarrow p = \frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}, \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 6 + \frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}} \\ y = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}} \end{cases}$$

II) Пусть $p = 4q$. Подставим в систему.

$$\begin{cases} 4q - 6q = \sqrt{4q \cdot q}, \\ 16q^2 + 2q^2 - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2q = \sqrt{4q^2}, \Rightarrow q \leq 0. \\ 18q^2 = 18 \Rightarrow q = \pm 1. \end{cases}$$

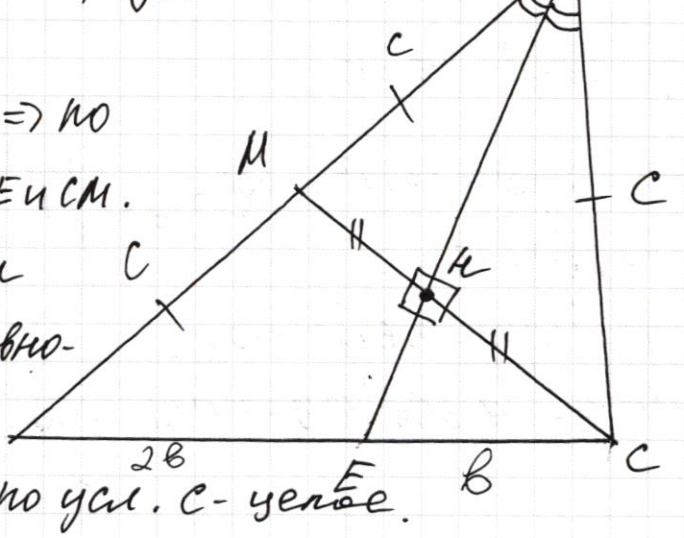
Заметим, что $q \leq 0, \Rightarrow q = -1, \Rightarrow p = -4, \Rightarrow \begin{cases} x = 6 - 4 = 2 \\ y = 1 - 1 = 0 \end{cases}$

Ответ окончательный: $x_1 = 6 + \frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$; $y_1 = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$;
$x_2 = 2$; $y_2 = 0$.

№2.

1) Пусть $AM = MB$, $\angle ABE = \angle EBC$, $\Rightarrow$ по усл. $BE \perp CM$, H - т. пересеч. BE и CM.

2) Заметим, что $BH \perp CM$ и $\angle MBH = \angle HBC$, $\Rightarrow \triangle BMC$ - равнобедренный, $\Rightarrow$ Пусть $AM = MB = c$, $\Rightarrow MB = BC = c$; по усл. c - целое.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(продолжение к №2)

3) По свойству бисс. внутр. угла в треуг.: $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC}$, $\Rightarrow$
$\Rightarrow AE = 2EC$. Пусть $EC = b$, $\Rightarrow AE = 2b$.

4) $P_{\triangle ABC} = 3c + 3b = 900$, $\Rightarrow c + b = 300$. Т.к. c - целое, 300 - целое, то b - целое.

5) По неравенству сторон в треуг.: $\begin{cases} 2c + c > 3b \\ 2c + 3b > c \\ 3b + c > 2c \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} c > b \\ 3b > -c \text{ - верно всегда, т.к. } c>0,\ b>0. \\ 3b > c \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3b > c > b$. Из п.4: $c = 300 - b$, $\Rightarrow 3b > 300 - b > b$, $\Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} 3b > 300 - b \\ 300 - b > b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4b > 300 \\ 300 > 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 3 \cdot 25 \\ 150 > b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 75 \\ 150 > b \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow 149 \geq b \geq 76$ - для каждого из этих b существует единственное допустимое c, $\Rightarrow$ сколько b, столько и треугольников, удовлетворяющих условию.

Количество b: $149 - 76 + 1 = \underline{140} + 9 - \underline{70} - 6 + 1 = 70 + 3 + 1 = 74$.

Ответ: Условию удовлетворяют 74 треугольника.

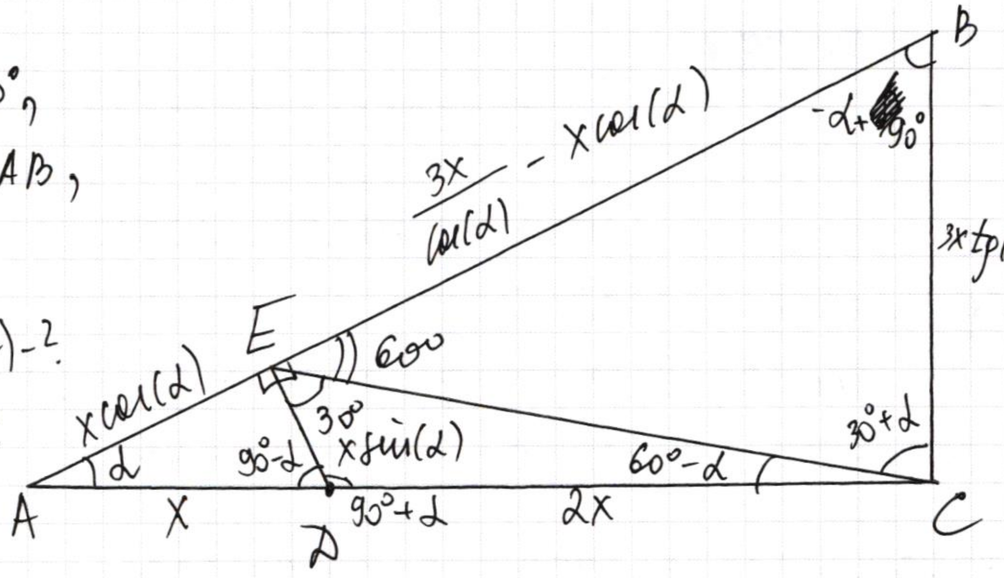
№4.

а) Дано: $\angle C = 90°$, $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$, $DE \perp AB$, $\angle CED = 30°$.

Найти: $tg(BAC)$ - ?

б) Дано: $AC = \sqrt{7}$.

Найти: $S_{\triangle CED}$.



Решение:

а) 1) Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\Rightarrow \angle ADE = 90° - \alpha$, $\angle ABC = 90° - \alpha$ по сумме углов треугольника.

2) $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$, $\Rightarrow AC = 3AD$. Пусть $AD = x$, $\Rightarrow AC = 3x$, $\Rightarrow DC = 2x$.

3) Из $\triangle AED$: $\frac{AE}{x} = \cos(\alpha)$, $\Rightarrow AE = x\cos(\alpha)$.

4) Из $\triangle ABC$: $\frac{3x}{AB} = \cos(\alpha)$, $\Rightarrow AB = \frac{3x}{\cos(\alpha)}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ из п. 3 и п. 4: $EB = \frac{3x}{\cos(\alpha)} - x\cos(\alpha)$.

5) Из $\triangle ABC$: $\frac{BC}{3x} = tg(\alpha)$, $\Rightarrow BC = 3x\,tg(\alpha)$.

6) По сумме углов в $\triangle EBC$: $\angle ECB = 180° - 60° + \alpha - 90° = 30° + \alpha$.

7) ~~По т. синусов для~~ Из $\triangle EDC$, и $\triangle EBC$, и $\triangle ABC$:

$\angle DCE + \angle ECB = \angle ACB = 90°$, $\Rightarrow \angle DCE + 30° + \alpha = 90°$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DCE = 60° - \alpha$.

8) Из $\triangle AED$: $\frac{ED}{x\cos(\alpha)} = tg(\alpha)$, $\Rightarrow ED = x\sin(\alpha)$.

9) По т. синусов для $\triangle EDC$: $\frac{x\sin(\alpha)}{\sin(60° - \alpha)} = \frac{2x}{\sin(30°)}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(\alpha)\sin(30°) = 2\sin(60° - \alpha)$, $\Rightarrow \sin(\alpha) = 4\sin(60° - \alpha)$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(\alpha) = 4(\sin(60°)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(60°))$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow tg(\alpha) = 4(\sin(60°) - tg(\alpha)\cos(60°))$ $\Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(продолжение к №4)

$\Rightarrow \quad tg(\alpha) = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} tg(\alpha),$

$tg(\alpha) = 2\sqrt{3} - 2tg(\alpha), \Rightarrow 3tg(\alpha) = 2\sqrt{3}, \Rightarrow tg(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$

Ответ а): $tg(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$

б) $!AC = \sqrt{7}, \Rightarrow 3x = \sqrt{7}, \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}.$

10) Из п. 8: $ED = x\sin(\alpha)$. Из п. 9: $tg(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{3}}, \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{7}},$ $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \Rightarrow ED = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{3};\ DC = 2x = \frac{2\sqrt{7}}{3}.$

11) $\angle EDC = 180° - \angle ADE = 180° - 90° + \alpha = 90° + \alpha, \Rightarrow$

$\sin(EDC) = \sin(90° + \alpha) = \sin(90°)\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$

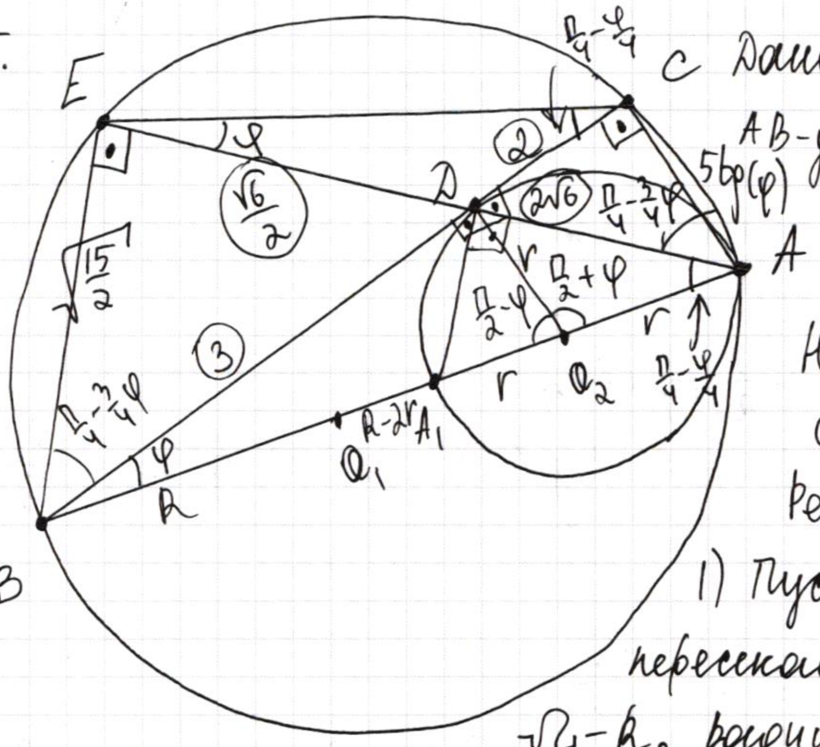
12) $S_{\triangle EDC} = \frac{1}{2} \cdot ED \cdot DC \cdot \sin(90° + \alpha) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{2\cancel{\sqrt{7}}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{7}}} =$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot 3} = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$

Ответ б: $S_{\triangle EDC} = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$

Ответ окончательный: $tg(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{3}},\ S_{\triangle EDC} = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$

№5.



Дано: A-точка касания; AB-диаметр Ω, BD-касательная к ω, CD=2, BD=3.

Найти: Радиусы Ω и ω, S BECA.

Решение:

1) Пусть точка, в которой AB пересекает ω, A_1; радиус Ω – R, радиус ω – r, $\Rightarrow AB=2R$, $AA_1=2r$; O_1 - центр Ω, O_2 - центр ω, $\Rightarrow BO_1=O_1A=R$, $A_1O_2=O_2A= =r$, $O_1A_1=R-2r$.

2) Заметим, что $\angle BEA=\angle BCA=\angle A_1DA=\frac{\pi}{2}$, т.к. опираются на диаметр, а O_1, O_2 и A лежат на одной прямой-AB.

3) Пусть $\angle CBA=\varphi$, $\Rightarrow \angle CEA=\varphi$, т.к. впис. и опир. на $\overset{\frown}{CA}$. $\angle BAC=\frac{\pi}{2}-\varphi$ из ΔBCA. Из ΔBCA: $\frac{CA}{5}=tg(\varphi)$, $\Rightarrow CA=5tg(\varphi)$.

4) По т. о касательной и секущей, проведенных из 1 точки: $9=(2R-2r)\cdot 2R$, $\Rightarrow$ $\boxed{9=4(R-r)R}$

~~5) Из ΔBAC: $\frac{5}{2R}=\cos(\varphi)$, $\Rightarrow$ $\boxed{5=2R\cos(\varphi)}$~~

6) Т.к. BD - касат. к ω, $O_2D\perp BD$, $\Rightarrow \angle BO_2D=\frac{\pi}{2}-\varphi$, $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle DAA_1=\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$, т.к. $\angle A_1O_2D$ - центральный, а $\angle DAA_1$ - впис. опир. на ту же дугу, $\Rightarrow \angle DAC=\angle BAC-\angle BAD= =\frac{\pi}{2}-\varphi-\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\varphi=\angle EBC$, как впис. опир. на ту же дугу. Аналог. $\angle ECB=\angle EAB=\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{4}$.

~~7) Из ΔDCA: $\boxed{\frac{2}{5tg(\varphi)}=tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\varphi\right)}$ $\varphi\neq\frac{\pi}{2}$, иначе $tg(\varphi)$ неопр.~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(продолжение к N5)

$$\cancel{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\varphi\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\varphi\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\varphi\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{3}{4}\varphi\right)-\sin\left(\frac{3}{4}\varphi\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{3}{4}\varphi\right)+\sin\left(\frac{3}{4}\varphi\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}=}$$

$$\cancel{=\frac{\cos\left(\frac{3}{4}\varphi\right)-\sin\left(\frac{3}{4}\varphi\right)}{\cos\left(\frac{3}{4}\varphi\right)+\sin\left(\frac{3}{4}\varphi\right)}=\frac{1-\operatorname{tg}\left(\frac{3}{4}\varphi\right)}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{3}{4}\varphi\right)}}$$

7) $\Delta BDO_2 \sim \Delta BCA$: $\frac{BD}{BO_2}=\frac{BC}{BA}$, $\frac{3}{2R-r}=\frac{5}{2R}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow 6R=10R-5r$, $\Rightarrow \boxed{4R=5r}$

8) Сост. систему из п.7 и п.4: $\begin{cases} 9=4R^2-4Rr \\ 4R=5r \Rightarrow r=\frac{4R}{5} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 9=4R^2-4R\cdot\frac{4R}{5}$, $\Rightarrow 9=4R^2\left(1-\frac{4}{5}\right)=4R^2\cdot\frac{1}{5}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow R^2=\frac{45}{4}$, $\Rightarrow R=\frac{3}{2}\sqrt{5}$, $\Rightarrow r=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{5}=\frac{6\sqrt{5}}{5}=\frac{6}{\sqrt{5}}$.

9) Из ΔDAC: $\frac{5}{2R}=\cos(\varphi) \Rightarrow 5=2R\cos(\varphi)$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(\varphi)=\frac{5}{2\cdot\frac{3}{2}\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\Rightarrow \sin(\varphi)=\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}(\varphi)=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

~~А) По т. синусов для~~ $\cancel{\Delta BEC: \frac{5}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}=\frac{EC}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\varphi\right)}=\frac{EB}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{4}\right)}=2R=3\sqrt{5}}$

10) По теореме о пересекающихся хордах: $ED\cdot DA=BD\cdot DC=6$.

11) По т. Пифагора для $\Delta\ CDA$: $DA=\sqrt{4+20}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$.

(продолжение к задаче 5)

12) Из п. 11 и п. 12: $ED \cdot 2\sqrt{6} = 6$, $\Rightarrow ED = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

14) Из $\triangle DA_1A$: $\angle DA_1A = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{4}$.

15) По т. синусов для $\triangle DA_1A$: $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{4}\right)} = 2r = \dfrac{12}{\sqrt{5}}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{4}\right) = \dfrac{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{5}}{12} = \dfrac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5}}{6} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$,

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\dfrac{\varphi}{4}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\dfrac{\varphi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$, $\Rightarrow \sin\left(\dfrac{\varphi}{4}\right) + \cos\left(\dfrac{\varphi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

13) По т. Пифагора для BED: $EB = \sqrt{9 - \dfrac{6}{4}} = \sqrt{\dfrac{36-6}{4}} = \sqrt{\dfrac{30}{4}} = \sqrt{\dfrac{15}{2}}$.

14) Из $\triangle EBD$: $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3}{4}\varphi\right) = \dfrac{ED}{BD} = \dfrac{\sqrt{6}}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

15) $S_{\triangle EBC} = \dfrac{1}{2} \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3}{4}\varphi\right) \cdot EB \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\dfrac{15}{2}} \cdot 5 =$

$= \dfrac{5}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{15}{12}} = \dfrac{5}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{4}$.

16) $S_{\triangle BCA} = \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot CA = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{5}} = 5\sqrt{5}$.

17) $S_{BECA} = S_{\triangle BCA} + S_{\triangle BEC} = 5\sqrt{5} + \dfrac{5\sqrt{5}}{4} = 5\sqrt{5}\left(\dfrac{5}{4}\right) =$

$= \dfrac{25\sqrt{5}}{4}$.

Ответ: $R = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$, $r = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$, $S_{BECA} = \dfrac{25\sqrt{5}}{4}$.

№6.

Найти все $(a; b)$ такие, что нер-во вып. $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

$$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$$

Пусть $y_1 = -8x^2 + 6x + 7$, $y_2 = ax + b$, $y_3 = 8x - 6|2x-1|$.

$$y_3 = \begin{cases} 8x - 12x + 6, & x \ge \frac{1}{2}, \\ 8x + 12x - 6, & x < \frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow y_3 = \begin{cases} -4x + 6, & x \ge \frac{1}{2}, \\ 20x - 6, & x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(продолжение к задаче 6)

$y_1 = -8x^2+6x+7$

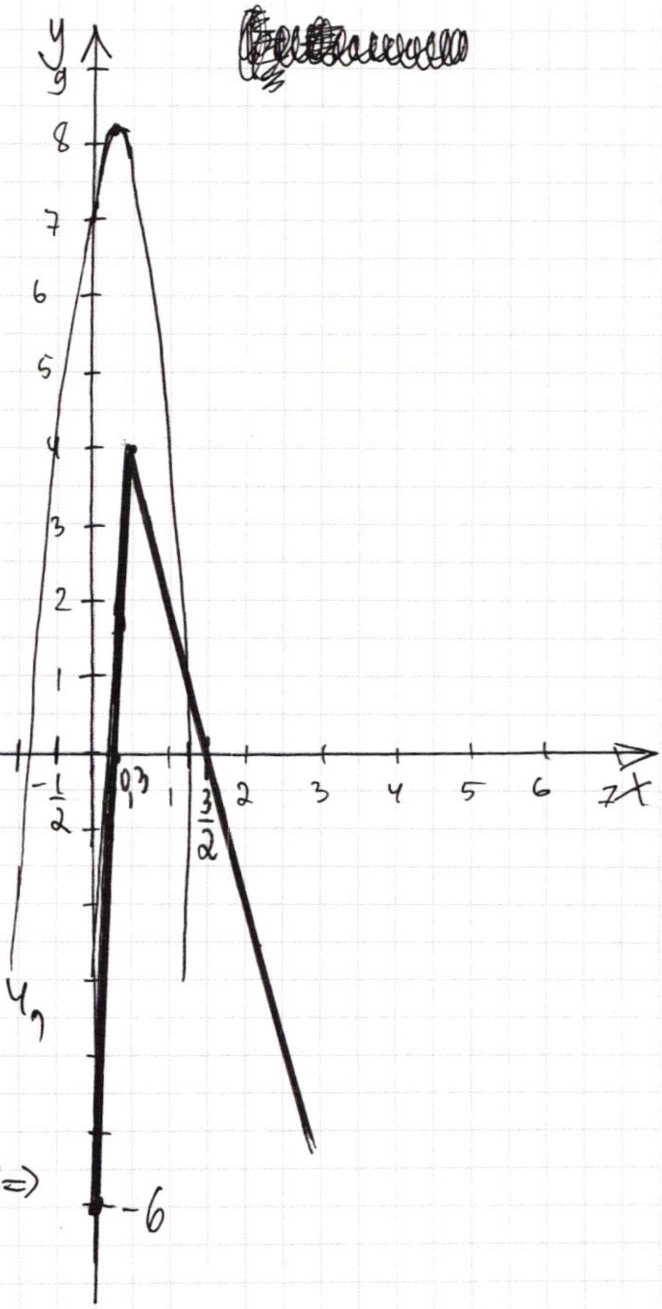
Координаты вершины:

$x_0 = \frac{-6}{-16} = +\frac{3}{8}$

$y_0 = -8\cdot\frac{9}{64}+6\cdot\frac{3}{8}+7 =$

$= -\frac{9}{8}+\frac{18}{8}+7 = \frac{9}{8}+7 =$

$= \frac{65}{8}.$



$8x^2-6x-7=0,$

$D = 36+4\cdot8\cdot7 =$

$= 4(9+56) = 4\cdot65.$

$x_{1,2} = \frac{6\pm2\sqrt{65}}{16} = \frac{3\pm\sqrt{65}}{8}.$

Сравним: $\frac{3-\sqrt{65}}{8} \vee -\frac{1}{2},$ $3-\sqrt{65} \vee -4,$

$7 \underset{<}{\vee} \sqrt{65} \Rightarrow -\frac{1}{2} > \frac{3-\sqrt{65}}{8}$

$\frac{3+\sqrt{65}}{8} \vee \frac{3}{2},$ $3+\sqrt{65} \vee 12,$ $\sqrt{65} \underset{<}{\vee} 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3}{2} > \frac{3+\sqrt{65}}{8} > 1,$ т.к. $8=\sqrt{64}.$

$y_2 = ax+b$ - прямая. ~~Она будет больше~~ Если $a<0$, b не может быть меньше 4, Если $a>0$, b не может быть больше 8, ~~Причём если $a>0$, b не может быть меньше~~ ~~-6~~ и не м.б. меньше -6. Если $a<0$, b не больше 8.

$a \geq 20$ или $a \leq -4.$

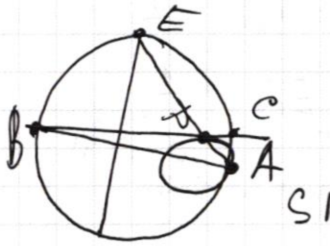
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



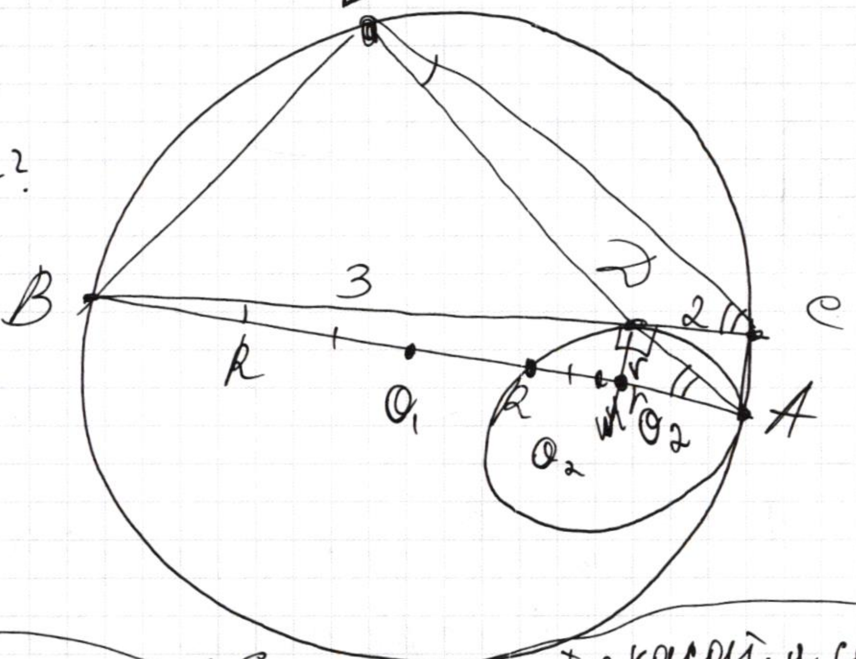
$R - ?$

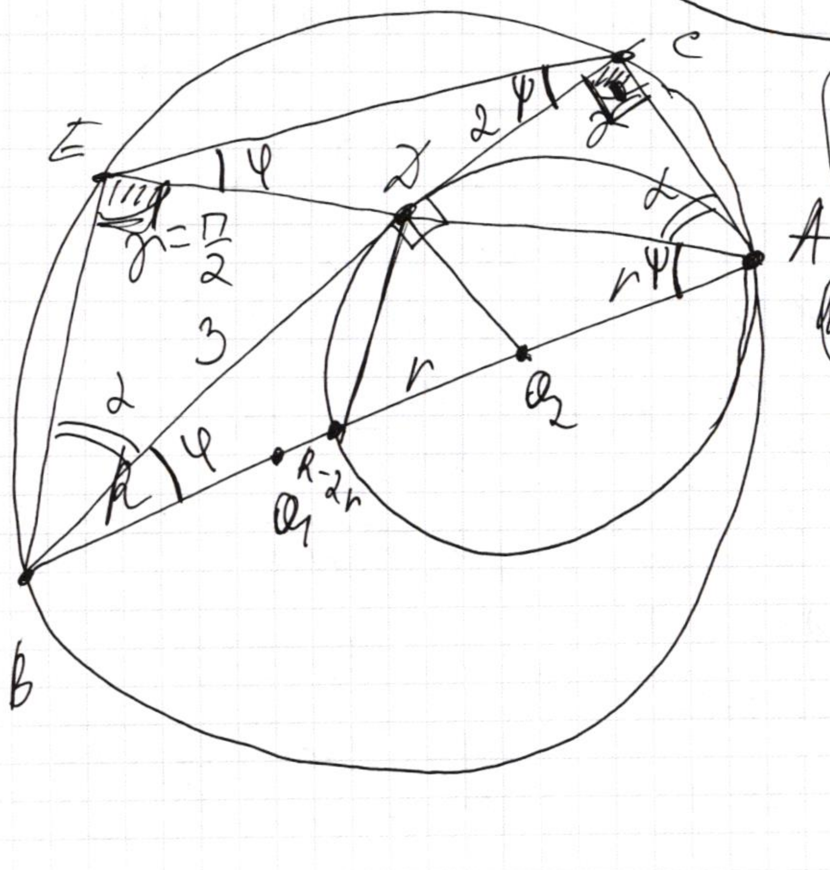
$r - ?$

$S_{BACE} - ?$

$CD = 2$

$BD = 3$





Т. о касат. и сек.

$9 = (2R - 2r)2R$

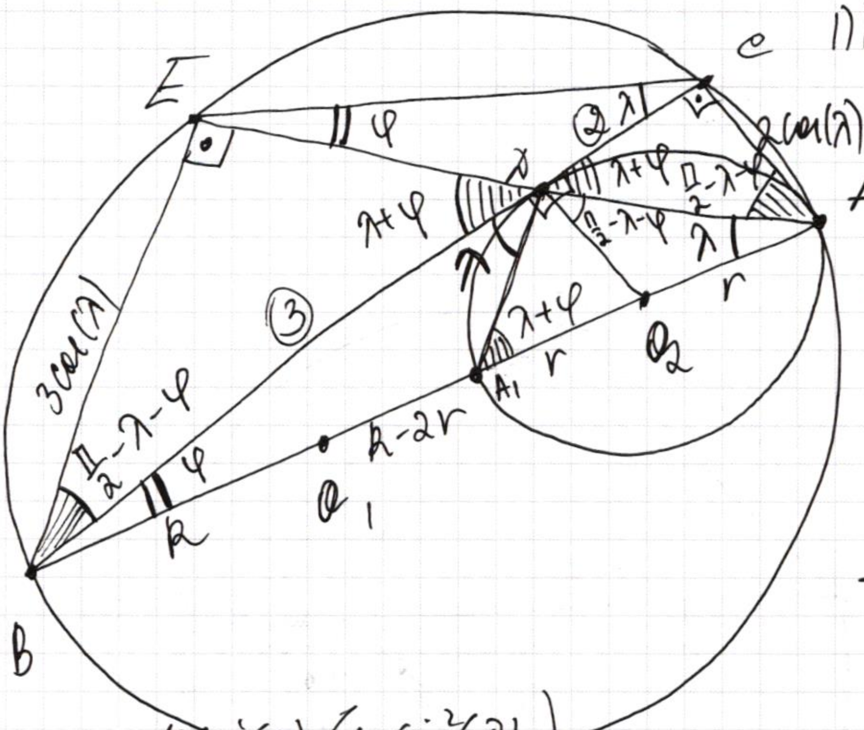
$9 = 4R(R - r)$

В усл.

$\gamma = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \psi = \dfrac{\pi}{2} - \alpha - \varphi$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



1) По т. о касат. и сек.:

$9=(2R-2r)\cdot 2R$,

$\boxed{9=4R(R-r)}$

Т. о пересек. кас.

2) $BD\cdot DC=ED\cdot DA$

$\boxed{6=ED\cdot DA}$

$4\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^3-10\left(\frac{5}{4}\right)$

3) $\triangle BDA$:

$\frac{DA}{\sin(\varphi)}=\frac{3}{\sin(\lambda)}$,

$DA=\frac{3\sin(\varphi)}{\sin(\lambda)}$

$\Downarrow$

$ED=\frac{2\sin(\lambda)}{\sin(\varphi)}$

$5=\frac{4\sin(\lambda)(1-\sin^2(\lambda))}{1-2\sin^2(\lambda)}$

$5-10\sin^2(\lambda)=4\sin(\lambda)-4\sin^3(\lambda)$

4) $\triangle EDC\sim\triangle BDA_1$ по двум углам: $4\sin^3(\lambda)-10\sin^2(\lambda)-4\sin(\lambda)+5=0$

$4\cdot125-10\cdot25-4\cdot5+5$

$4-10-4+5$

$-4-10+4+5$

$\frac{ED}{DC}=\frac{2R-2r}{DA_1}$,

$\frac{\pi}{2}-\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+2\lambda$

$\frac{4}{8}-\frac{10}{4}-\frac{4}{2}+5$

$\frac{1}{2}-\frac{5}{2}-2+5$

$-\frac{4}{2}-2+5$

$\frac{6}{DA\cdot 2}=\frac{2(R-r)}{DA_1}$.

$5=2\cos(\lambda)\frac{\sin(2\lambda)}{\cos(2\lambda)}$

$5=2\cdot\frac{2\sin(\lambda)\cos^2(\lambda)}{2\cos^2(\lambda)-1}$

5) Из $\triangle DAA_1$: $\frac{DA_1}{2r}=\sin(\lambda)$ $\frac{DA}{2r}=\cos(\lambda)$ и

и $\lambda+\varphi=\frac{\pi}{2}-\lambda$, $\Rightarrow\boxed{\varphi=\frac{\pi}{2}-2\lambda}$

8) $\frac{5}{2\cos(\lambda)}=tg\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$

$=tg(2\lambda)$

$\boxed{5=2\cos(\lambda)\,tg(2\lambda)}$

6) $\frac{3}{\cancel{2r}\cos(\lambda)}=\frac{2(R-r)}{\cancel{2r}\sin(\lambda)}$,

$\boxed{\frac{3}{2}tg(\lambda)=R-r}$.

7) $\triangle EDB$: $\frac{EB}{3}=\sin\left(\lambda+\frac{\pi}{2}-2\lambda\right)=\sin\left(-\lambda+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\lambda)$,

$\Rightarrow EB=3\cos(\lambda)$, $CA=2\cos(\lambda)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$8x-6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$ $\boxed{-\frac{1}{2} \le x \le 1}$

$|2x-1| = 2x-1,\ 2x-1 \ge 0,\ 2x \ge 1,\ x \ge \frac{1}{2}.$

$|2x-1| = 1-2x,\ 2x-1<0,\ 2x<1,\ x<\frac{1}{2}.$

$\begin{cases} ax+b \le -8x^2+6x+7 \\ 8x-6|2x-1| \le ax+b \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} -8x^2+6x+7 \ge 8x-12x+6 \\ -8x^2+6x+7 \ge 8x+12x-6 \end{array}\right.$

$\begin{cases} 8x^2+x(a-6)+b-7 \le 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \frac{1}{2}. \\ 8x-12x+6-ax-b \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<\frac{1}{2}. \\ 8x+12x-6-ax-b \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$

$0 \ge 8x^2-6x-7-4x+6$

$\begin{cases} 8x^2+x(a-6)+b-7 \le 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \frac{1}{2}. \\ -x(4+a)+6-b \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<\frac{1}{2} \\ x(20-a)-6-b \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$

$0 \ge 8x^2-10x-1$

$8x^2-10x-1 \le 0$

$\cancel{D = 100+32 = 132}$

$0 \ge 8x^2-6x-7+20x-6$

$0 \ge 8x^2+14x-13$

$\left[\begin{array}{l} 8x^2-10x-1 \le 0,\ x \ge \frac{1}{2} \\ 8x^2+14x-13 \le 0,\ x<\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\begin{array}{r} 104 \\ 49 \\ \hline 153 \end{array}$ $\begin{array}{r} \overset{2}{13} \\ \times 8 \\ \hline 104 \end{array}$ $25+8$

$D = 100+4\cdot 8 = 132.$

$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{132}}{16} = \frac{10 \pm \sqrt{4\cdot 33}}{16} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{8}$

$D = 4\cdot 49 + 4\cdot 8\cdot 13 = 4(153)$

$x_{1,2} = \frac{-14 \pm 2\sqrt{153}}{16} = \frac{-7 \pm \sqrt{153}}{8}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y_1 = -8x^2+6x+7$ $\qquad 8x^2-6x-7$

$\mathcal{D} = 36 + 4\cdot 8\cdot 7 = 4\cdot 9 + 4\cdot 8\cdot 7 = 4(9+8\cdot 7) = 4(9+56) =$

$= 4(65)$

$y_2 = ax+b$ $\qquad x = -\frac{b}{2a} = +\frac{6}{+16} = \frac{3}{8}$

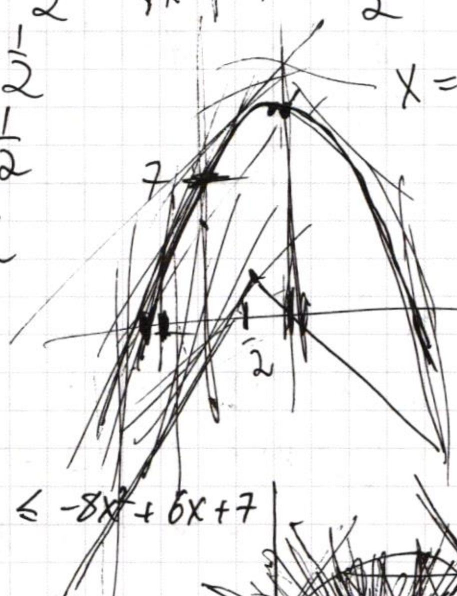
$y_3 = 8x-6|2x-1|$ $\qquad y = -8\cdot\frac{9}{64} + 6\cdot\frac{3}{8} + 7 =$

$y_3 = \begin{cases} 8x-12x+6, & x\ge\frac{1}{2} \\ 8x+12x-6, & x<\frac{1}{2} \end{cases}$ $\quad 4x=6,\ x=\frac{3}{2}$ $\quad = -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7 = \frac{9+56}{8} =$

$= \frac{65}{8}.$

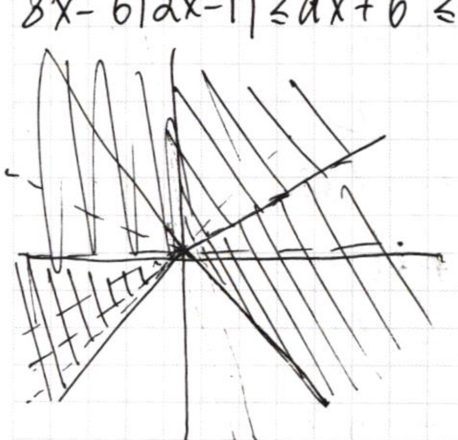
$x = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

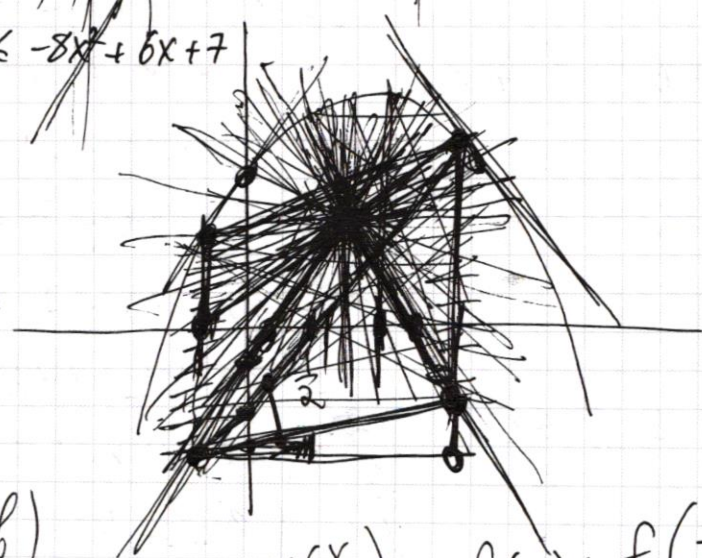
$y_3 = \begin{cases} -4x+6, & x\ge\frac{1}{2} \\ 20x-6, & x<\frac{1}{2} \end{cases}$



$y_3 \le y_2 \le y_1$

$8x-6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$





$f(ab) = f(a)+f(b)$ $\qquad f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$ p-простое

(x,y) $\quad 2\le x\le 22$ $\qquad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$2\le y\le 22$

$x, y\in\mathbb{N}$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a b c
N1 N2 N3

$ax^2-2bx+c=0$

Пусть a, qa, q^2a

$ax^2-2qax+q^2a=0$

$x^2-2qx+q^2=0,$

$(x-q)^2=0,$

$x=q.$

$a, qa, q^2a, q^3a=q, \Rightarrow q^2a=1.$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$x^2-12x+36+2y^2-4y+2-38+20=0$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18,$

$x^2-12yx+36y^2=xy-6y-x+6,$

$$\begin{cases} \cancel{x^2-13xy+36y^2+6y+x-6=0} \\ \cancel{x^2+2y^2-12x-4y+20=0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}, \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$8x-6|2x-1|\le ax+b\le -8x^2+6x+7$

$-8x^2+6x+7\ge 8x-6|2x-1|,$

$-8x^2-2x+7+6|2x-1|\ge 0$

$\cancel{2x(4x+1)}$

$$\begin{cases} x^2-12yx+36y^2-xy+6y+x-6=0 \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-13yx+36y^2+6y+x=6 \\ x^2+2y^2-12x-4y=-20 \end{cases}$$

$48+12=60$

$$\frac{x^2-13yx+36y^2+6y+x}{x^2+2y^2-12x-4y}=\frac{-3}{10},$$

$10x^2-130yx+360y^2+60y+10x=-3x^2-6y^2+36x+12y,$

$13x^2+366y^2-26x+48y-130yx=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$13x^2-26x-130yx+48y+366y^2=0,$

$13x^2-13x(2+10y)+48y+366y^2=0,$

$13x^2-26x(1+5y)+48y+366y^2=0,$

$D=26^2(1+10y+25y^2)-4\cdot 13(48y+366y^2)=$

$=13\cdot 13\cdot 4(1+10y+25y^2)-4\cdot 13(48y+366y^2)=$

$=4\cdot 13(13+\underbrace{130y}+\underbrace{13\cdot 25y^2}-\underbrace{48y}-\underbrace{366y^2})=$

$=4\cdot 13(-41y^2+82y+13)=$

$=4\cdot 13(-41y^2+82y-41+54)$

$\begin{array}{r} 25 \\ \times 13 \\ \hline 75 \\ 25 \\ \hline 325 \end{array}$ $\begin{array}{r} 366 \\ -325 \\ \hline 41 \end{array}$

$130-40-8=$
$=90-8=82$

$\begin{array}{r} 41 \\ 13 \\ \hline 54 \end{array}$

$\begin{array}{r} 149 \\ \times 3 \\ \hline 447 \end{array}$ $\begin{array}{r} 76 \\ \times 3 \\ \hline 228 \end{array}$

$366y^2+y(48-130x)+13x^2-26x=0,$ $228\le 3b\le 447$

$D=(16\cdot 3-13\cdot 2\cdot 5x)^2-4\cdot 366(13x^2-26x)=$

$=4(24-13\cdot 5x)^2-4\cdot 366(13x^2-26x)$

$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}, \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$

$3b\ne C$

$3b$

$x^2-12x+2y^2-4y+20=0$

$D=144-4(2y^2-4y+20)=4(36-2y^2+4y-20)=$

$=4(-2y^2+4y+16)=-8(y^2-2y-8)=-8(y^2-2y+1-9)$

$2y^2-4y+x^2-12x+20=0$

$D=16-8(x^2-12x+20)=8(2-x^2+12x-20)=8(-x^2+12x-18)$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

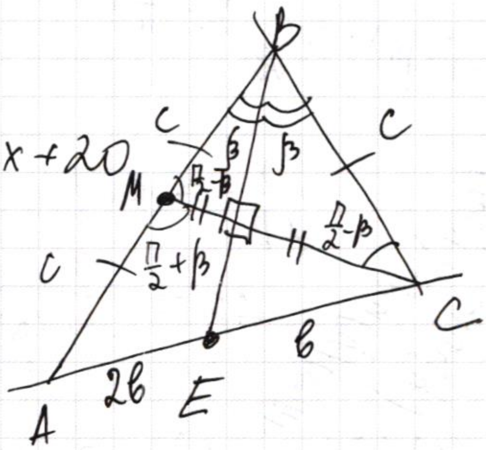
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}, \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-6y)^2=xy-(x+6y)+6 \\ x^2-12xy+12xy-36y^2+36y^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6y)^2=xy-x-6y+6 \\ (x-6y)^2+12xy+38y^2-4y-12x+20 \end{cases}$$



$$(x-6y)^2=x(y-1)-6(y-1),$$

$$\begin{cases} (x-6y)^2=(y-1)(x-6) \\ x^2-12x+36+2y^2-4y+2+20-38=0 \end{cases}$$

$$\underbrace{3c}+3b=900$$
$$c+b=300$$

$$\begin{cases} (x-6y)^2=(y-1)(x-6) \\ (x-6)^2+2(y-1)^2-18=0 \end{cases}$$

$$p^2-13pq+36q^2=0$$
$$D=169-144=25.$$

c - целое

$3b$ - целое

$\Rightarrow$ b - целое

$c+b=300$

$$\begin{cases} (x-6+6-6y)^2=(y-1)(x-6) \\ (x-6)^2+2(y-1)^2-18=0 \end{cases}$$

$$3b>300-b>b$$

$$\begin{cases} 3b>300-b \\ 300-b>b \end{cases} \quad \begin{cases} 4b>300 \\ 300>2b \end{cases}$$

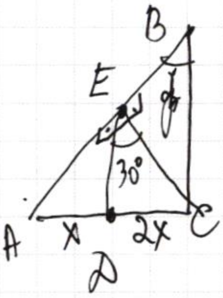
$$\begin{cases} b>75 \\ 150>b \end{cases} \Rightarrow 150>b>75$$

$$\begin{cases} 2c+c\geq 3b \\ 3b+c>2c \\ 3b+2c>c \end{cases} \quad \begin{cases} c>b \\ 3b>c \\ 3b>-c \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3b>c>b$$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

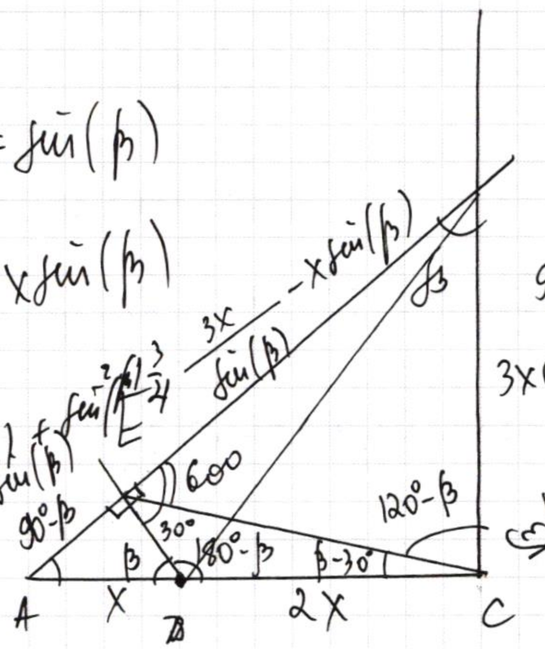


$tg(\beta) - ?$

$\angle CED = 30^\circ$

$$\frac{AE}{X} = \sin(\beta)$$

$$AE = X\sin(\beta)$$



$$\cos^2(\beta - 60^\circ) =$$

$$= \left(\cos(\beta)\cdot\frac{1}{2} + \sin(\beta)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 =$$

$$= \cos^2(\beta)\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\sin(\beta)\cos(\beta) + \sin^2(\beta)\frac{3}{4}$$

$\sin(\alpha + \varphi) = \sin(\varphi)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\varphi)$

$$\frac{3X}{AB} = \sin(\beta)$$

$$AB = \frac{3X}{\sin(\beta)} \qquad \frac{3X}{BC} = tg(\beta)$$

$$3\sin(\beta)\sin(120^\circ - \beta) = 3 - \sin^2(\beta) \qquad 3X\,ctg(\beta) = BC$$

$$3\cdot\frac{1}{2}\left(\cos(\beta - 120^\circ + \beta) - \cos(120^\circ)\right) = 3 - \sin^2(\beta)$$

$$\frac{3}{2}\left(\cos(2\beta - 120^\circ) + \frac{1}{2}\right) = 3 - \sin^2(\beta)$$

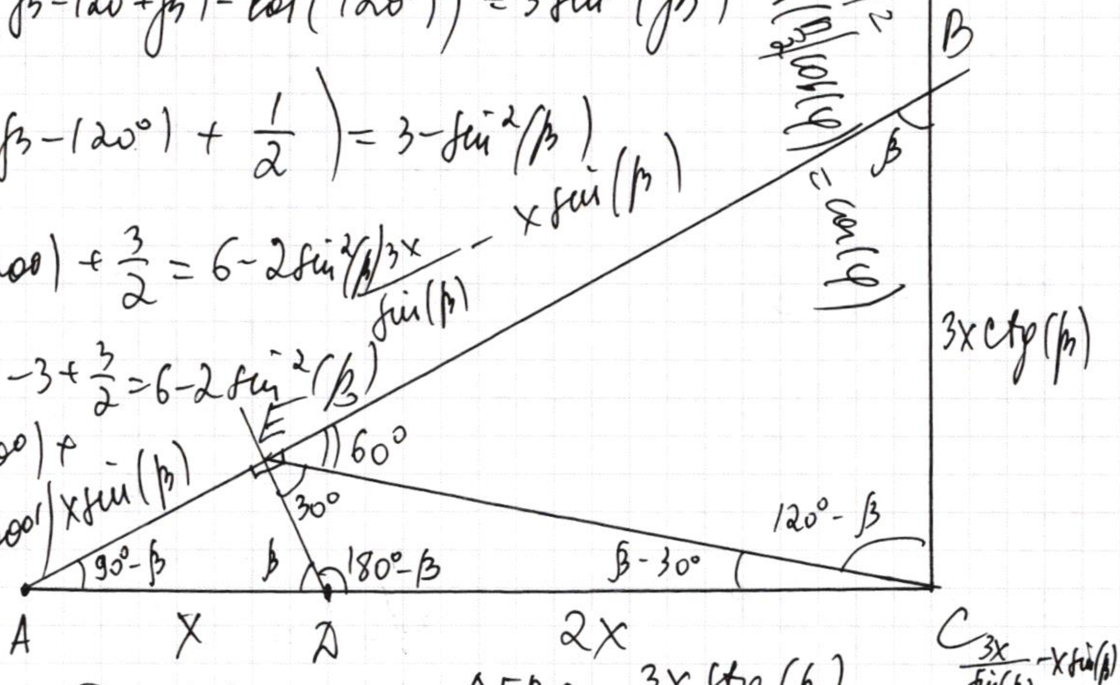
$$3\cos(2\beta - 120^\circ) + \frac{3}{2} = 6 - 2\sin^2(\beta)$$

$$6\cos^2(\beta - 60^\circ) - 3 + \frac{3}{2} = 6 - 2\sin^2(\beta)$$

$6(\cos^2(\beta)\cos^2(60^\circ) +$

$+\sin(\beta)\sin(60^\circ)$

$\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos(\varphi) + \ldots = \cos(\varphi)$



$25\,tg^2(\varphi) = 25\cdot\frac{4}{5} = 20$

$\frac{5\cdot 3}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$

$$\cancel{\frac{X\sin(\beta)}{3X} = \frac{X}{\frac{3X}{\sin(\beta)}}}$$

$$\triangle EBC: \frac{3X\,ctg(\beta)}{\sin(60^\circ)} = \frac{\frac{3X}{\sin(\beta)} - X\sin(\beta)}{\sin(120^\circ - \beta)}$$

$$3ctg(\beta)\sin(120^\circ - \beta) = \frac{3}{\sin(\beta)} - \sin(\beta)$$