МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1 Чистовик

a, b, c – послед. члены геом. прогрессии => $b^2 = ac$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$D = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac) = 0.$

$x = \frac{2b}{2} = b$

Геометрическая прогрессия выглядит след. образом:

a; b; c; b => $c = b^2$; $b^2 = a \cdot c = a \cdot b^2$ => a = 1

(~~b ≠ 0 не имеет смысла~~)

если b = 0, то a = b = c = 0

Пусть q – коэфф. прогрессии

$b = a \cdot q = q$; $c = b \cdot q = q^2$; $b = q^3 = q$

$\left[\begin{array}{l} q = 0 \ (a = b = c = 0) \\ q = 1 \ (c = 1) \\ q = -1 \ (c = 1) \end{array}\right.$

Ответ: c = 0; 1.

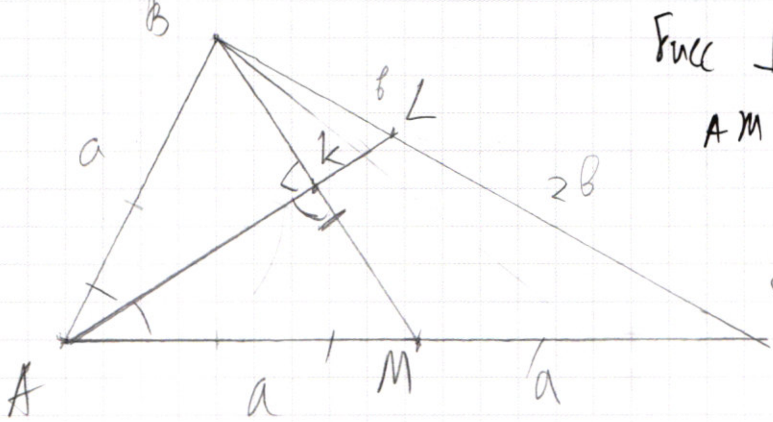
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№3 (продолжение) Чистовик

Ответ: $\left(\frac{9(84\pm\sqrt{1073})}{83}-3;\ \frac{84\pm\sqrt{1073}}{83}\right)$; $\left(\frac{(6\pm2\sqrt{11})\cdot4}{3}+2;\ \frac{6\pm2\sqrt{11}}{3}\right)$.

№ 2.



Бисс $\perp$ медиане $\Rightarrow$ ΔABM – р/б

$AM = MC = AB = a$

По Th. о бисс. $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC} = \frac{1}{2}$

$BL = b \Rightarrow LC = 2b$

По нер-ву Δ-ке: $a + 2a > 3b$; $a > b$ | $a + 3b > 2a \Rightarrow b > \frac{a}{3}$

$\frac{a}{3} < b < a$

$3a + 3b < 900 \Rightarrow a + b < 300$

$\frac{4a}{3} < a + b < 2a \Rightarrow$ $a > 150$.

$a < \frac{3}{4}\cdot 300 = 225$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a \geq 151$

$a \leq 224$

$\forall a \in [151; 224]$ $\exists!\, b$: $\Rightarrow$ кол-во способов в таком выражение равно 73

Ответ: 73.

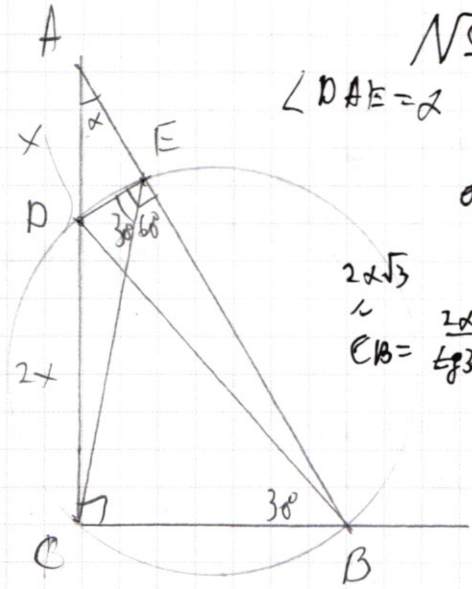
№ 7 (продолжение)

Рассм. такую дробь $f\left(\frac{1}{p}\right) = f\left(\frac{1}{p^2}\right) + f(p) = 2\cdot f\left(\frac{1}{p}\right) + f(p)$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{p}\right) = -f(p) < 0$. $\Rightarrow$ любая дробь подходит.

$\Rightarrow$

№ 4 Чистовик



Решение

а) 4/уг $CDEB$ – впис $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DEC = \angle DBC = 30^\circ$

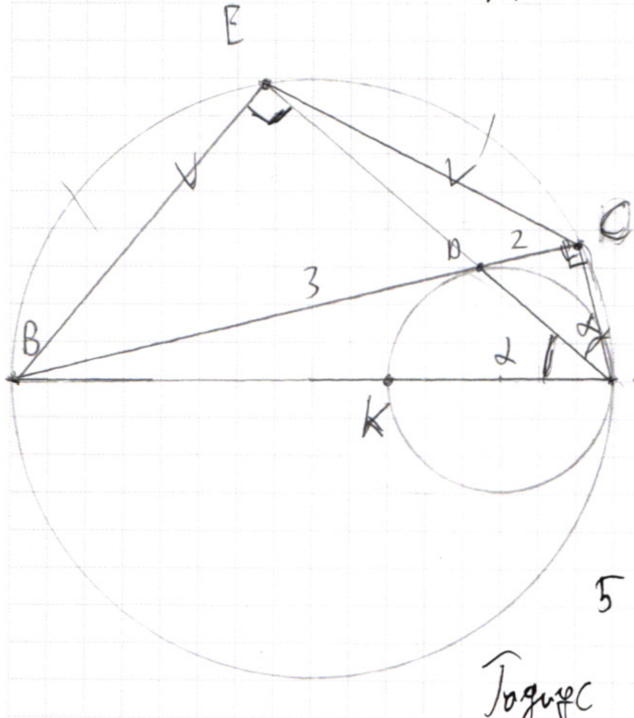
$CB = \frac{2x}{tg 30^\circ} = 2x\sqrt{3} \Leftarrow tg\, 30^\circ = \frac{CD}{CB} = \frac{2x}{CB}$ ($\triangle CDB$)

$tg\, \alpha = \frac{CB}{3x} = \frac{2}{3 \cdot tg 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$

~~б) $AC = \sqrt{7} \Rightarrow BD = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{7}$~~

Ответ: $tg\, \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

№ 5



По лемме Архимеда AE – бисс $\angle BAC$

$\angle BCA = 90^\circ$ (AB – диаметр)

В $\triangle BAC$ (Th. о бисс.) $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{2}$

$AC = \frac{2}{3} AB$

По Th. Пифагора: $BC^2 + AC^2 = AB^2$

$25 + \frac{4}{9} AB^2 = AB^2$

$5\ \cancel{25} = \frac{\cancel{5}}{9} AB^2 \Rightarrow AB = 3\sqrt{5}$

Радиус большей окр-ти равен $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

По Th о касат. и секущей: $BD^2 = BK \cdot AB$; $^{3}\cancel{9} = BK \cdot \cancel{3}\sqrt{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow BK = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ Отсюда радиус меньшей окр-ти равен

$\frac{AB - BK}{2} = \sqrt{5}\left(\frac{3 - \frac{3}{5}}{2}\right) = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Черновик ~~...~~ / ~~продол~~ ~~Чистовик~~

№3. $\uparrow^2$ (~~...~~ позже проверим решения).

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6 \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-13xy+6y+x+36y^2-6=0 \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ (x-6)^2+ \end{cases}$$

$$2(y^2-2y+1)+x^2-12x+36=18$$

$$x^2-13xy+6y+x+36y^2-6=0$$

$$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$$

$$(x-6y)^2=\sqrt{(x-6)(y-1)}$$

$$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$$

a^2 b^2

$x=6+a$

$y=b+1$

$x-6y=6+a-6b-6=$

$=a-6b$

$ab=(x-6y)^2=(a-6b)^2$

$a^2+2b^2=18$

$$(a+b\sqrt{2})^2-2ab\sqrt{2}=18$$

$$x^2-x(13y+1)+36y^2+6y-6=0$$

$$D=169y^2+26y+1-144y^2-24y+24=$$

$$=25y^2+2y+25$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Чистовик

№4 (продолжение)

б) $BC = \frac{2\sqrt{21}}{3}$ $(AC = \sqrt{7})$ По Th Пифагора $AB = \sqrt{35}$ (ΔCAB)

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$ ($\angle A$ – общий; $\angle AED = \angle ACB$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow DE = \frac{\frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{21}}{3}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{21}}{9\sqrt{5}}$

~~$\angle CDE = 90 + \alpha$~~

По Th. Пифагора $AE = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

$S_{CDE} = S_{ACE} - S_{ADE}$

$tg\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\sin^2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{7}{3}\sin^2\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

$S_{CDE} = \sqrt{7} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{7} - \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} =$

$= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} - \frac{3\sqrt{3} \cdot 7}{5}$

Ответ: $S_{CDE} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} - \frac{3\sqrt{3} \cdot 7}{5}$

№5 (продолжение) Чистовик

$\angle BAE = \alpha$

$\triangle BAC$: $\sin 2\alpha = \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \cos 2\alpha = \sqrt{1-\frac{5}{9}} = \frac{2}{3}$.

$1 - 2\sin^2\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow 2\sin^2\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

~~По Т. Пифагора~~

$AC = 2\sqrt{5}$

$BE = AB \cdot \sin\alpha = 3\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{30}}{2} = CE$

Ч/уг BECA — впис $\Rightarrow$ по формуле Брахмагупты

$S_{BECA} = \sqrt{(p-BE)(p-CE)(p-AC)(p-AB)}$, $p = \frac{BE+CE+AC+AB}{2} =$

$= \frac{\frac{\sqrt{30}}{2} + \frac{\sqrt{30}}{2} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{30}+5\sqrt{5}}{2}$

$S_{BECA} = (p-BE)\sqrt{(p-AC)(p-AB)} = \cancel{\frac{5\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{30}}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)(}}$

$= \frac{5\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{30}+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{30}-\sqrt{5}}{2}} = \frac{5\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

Ответ: $S_{BECA} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4 (продолжение) черновик

б) $AC = \sqrt{7} \Rightarrow BC = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{7} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$ По Тh. Пифагора $AB = \sqrt{7 + \frac{4 \cdot 21}{3}} =$

$= \frac{\sqrt{5 \cdot 21}}{\sqrt{3}} = \sqrt{35}$

~~65 = 5~~ 79

4-уг $CDEB$ – впис $\Rightarrow AB \cdot AC = AE \cdot AB$ (секущие)

$\frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \sqrt{7} = AE \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{5}$

$AE = 3\sqrt{\frac{7}{5}}$

$BE = AB - AE = \sqrt{35} - 3\sqrt{\frac{7}{5}}$

$80 - 60 - 1 =$

$84 - 65 = \cancel{19} = 19.$

$\frac{168}{2} = 50 + 34 =$

$= 84.$

347^2

$168^2 - 4 \cdot 83 \cdot 65 = 4(84^2 - 83 \cdot 65) =$

$= 4(84^2 - 84 \cdot 65 + 65) =$

$= 4(84 \cdot 19 + 65)$

$50 + 34 = 84$

$9y^2 - 18y - 2 = 0.$

$D = 9^2 \cdot 2^2 + 2^3 \cdot 9 = 2^2 \cdot 9(9+2) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11.$

$y = \frac{18 \pm 6\sqrt{11}}{9} = \frac{6 \pm 2\sqrt{11}}{3}$

$168 : 2$

$84 \cdot 19 = 840 + 84 \cdot 9 = 840 + 72 + 36 =$

$= 840 + 108 = 948$

$948 + 65 = 948 + 52 + 13 = 1013$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Чистовик.

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18. \end{cases}$$

Замена: $a=x-1$; $b=y-1$. $\Rightarrow x-6y=a-6b$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-6b)^2=ab \\ a^2+2b^2=18. \end{cases}$$

№3.

P^2 (позже проверим решение)

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y+x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \to$$

$$x=\frac{9\cdot(84\pm\sqrt{1013})}{83}-3.$$

$$x=\frac{4(6\pm2\sqrt{11})}{3}+2.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-13xy+6y+x+36y^2-6=0 \quad ① \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \quad ② \end{cases}$$

① $x^2-13xy+6y+x+36y^2-6=0.$

$x^2-x(13y-1)+36y^2+6y-6=0.$

$D=169y^2-26y+1-144y^2-24y+24=25(y-1)^2.$

$$x=\frac{13y-1+5y-5}{2}=9y-3$$

$$x=\frac{13y-1-5y+5}{2}=4y+2$$

② $x^2+2y^2-12x-4y+20=0.$

$81y^2-54y+9+2y^2-108y+36-4y+20=0$

$83y^2-168y+65=0.$

$$y=\frac{168\pm2\sqrt{1013}}{2\cdot83}=\frac{84\pm\sqrt{1013}}{83}.$$

② $x^2+2y^2-12x-4y+20=0.$

$16y^2+16y+4+2y^2-48y-24-4y+20=0.$

$18y^2-36y-4=0.$

$9y^2-18y-2=0.$

$D=$ ~~$144+72$~~

$$y=\frac{6\pm2\sqrt{11}}{3}.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

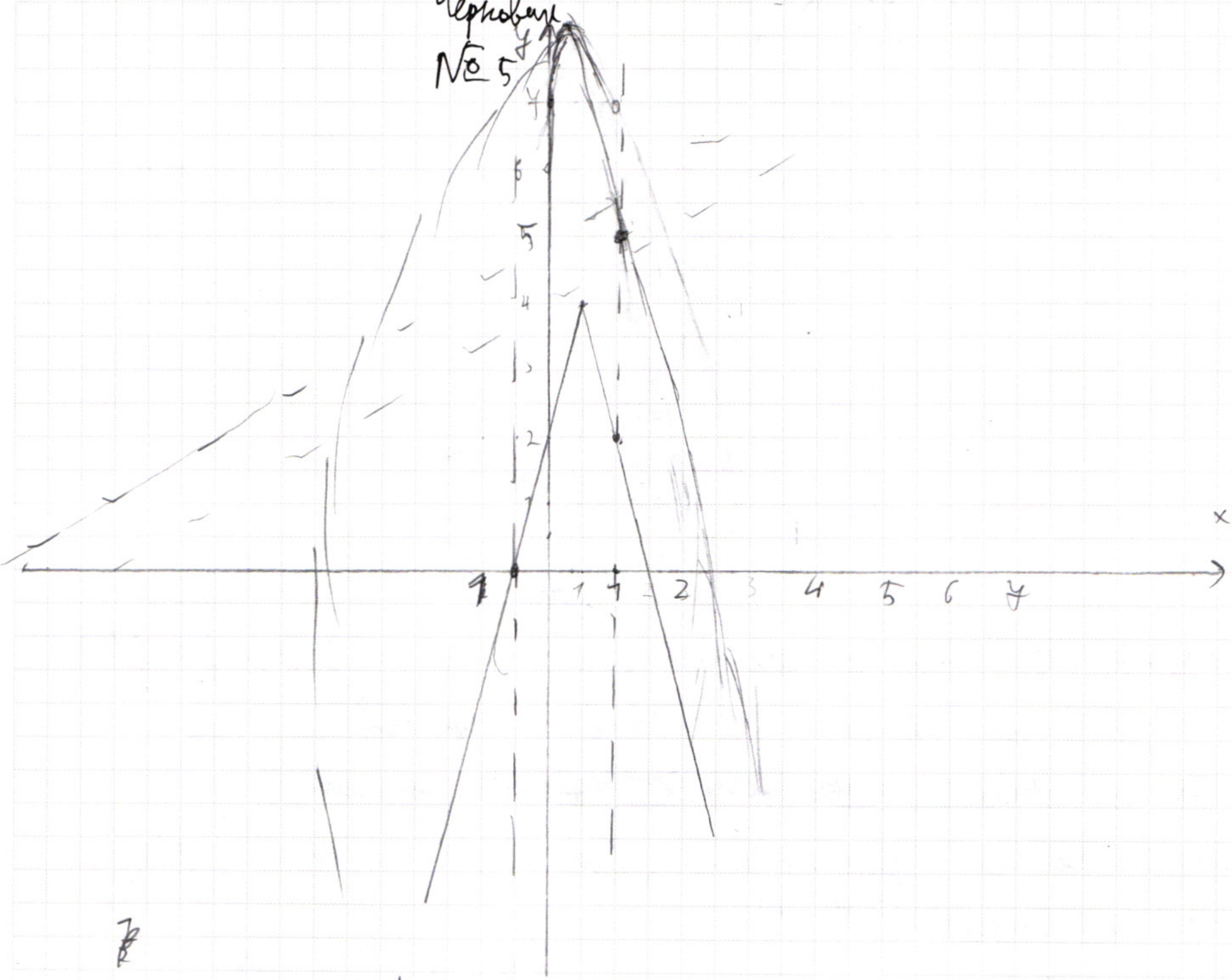
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x_0 = -\frac{3}{8}$

$-\frac{9}{8} + \frac{9}{4} - \cancel{+7} = ?$

$= \frac{9}{4} + 4 = 8{,}25$

Черновик №5



$4 = \frac{1}{2}b + k$ $\quad b = 2$

$5 = b + k$

$k = 3$

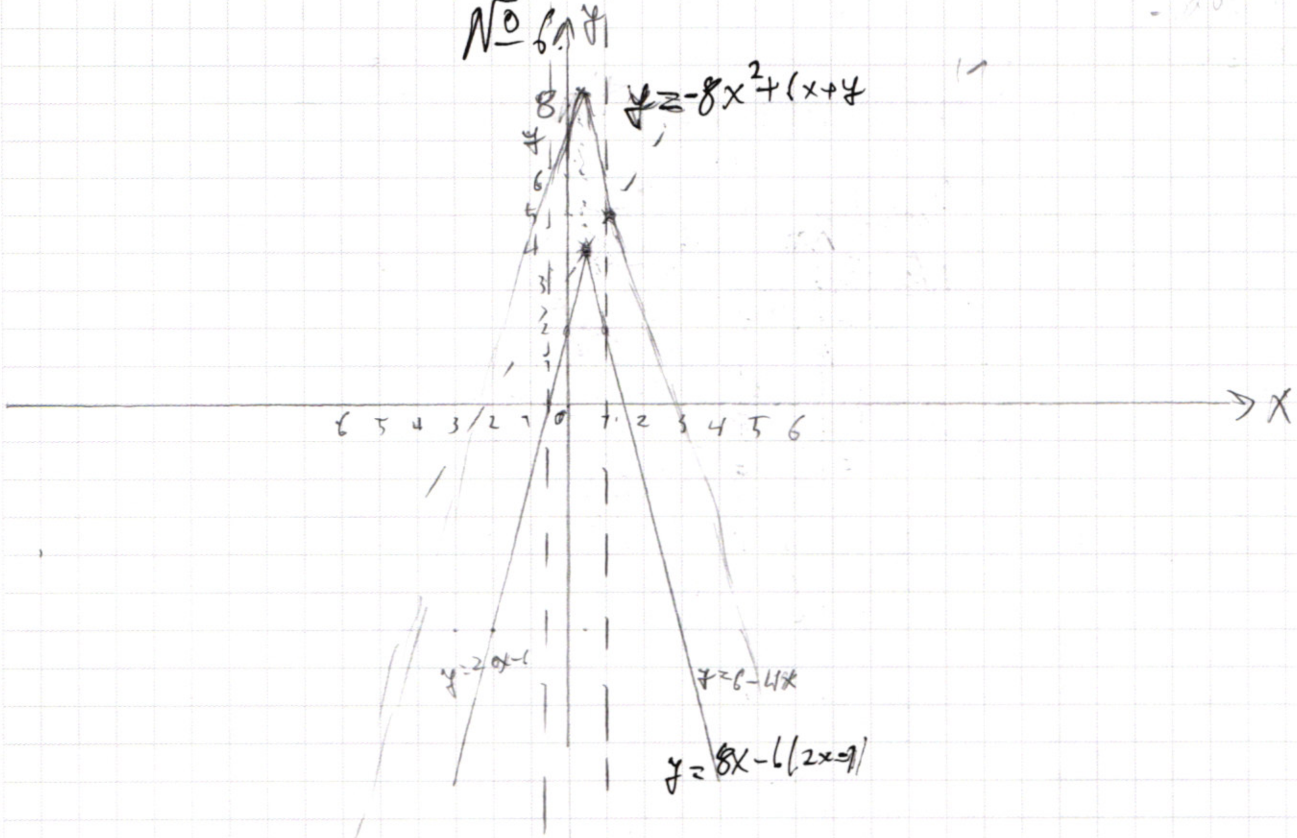
$\cancel{b=2}$ $\quad \cancel{k=3}$

$\cancel{y = 2x+3}$ $\quad y = 2x + 3$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Чистовик

№6.



Построим функции $y=8x-6|2x-1| = f(x)$ и $y=-8x^2+16x+7 = g(x)$

в координатной пл-ти. $y=ax+b$ – прямая

• ~~Любая точка прямой должна~~ $f(x)$

наша прямая должна быть „выше" $f(x)$ и „ниже" $g(x)$,

на промежутке $[-\frac{1}{2};1]$

Рисуем прямую, прох. через точки $(\frac{1}{2};4)$ и $(1;5)$

её ур-е имеет вид $y=2x+3$

Рисуем прямую, прох. через точку $(\frac{1}{2};4)$. Подходит при

~~[illegible]~~ $a\in[-4;20]$

Посмотрим что происходит с дробями. Любая дробь рано или поздно превратится в сумму дробей с простыми знаменателями

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 7 (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1 черновик

a, в, c образуют геометрическую прогрессию $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $b^2 = a \cdot c$

$$ax^2 - 2bx + c = 0$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{2b}{a}$$

$2 \leq x \leq 22$ $\quad 2 \leq y \leq 22$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$?

$\frac{22}{2} = 11$ $\quad f(11) = \left[\frac{11}{2}\right] > 0$

3·2
5·2
2·2
7·2
11·2

$f\left(\frac{x}{y}\right)$
если $x \in P$,

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{1}{y}\right) + f(x) > 0$

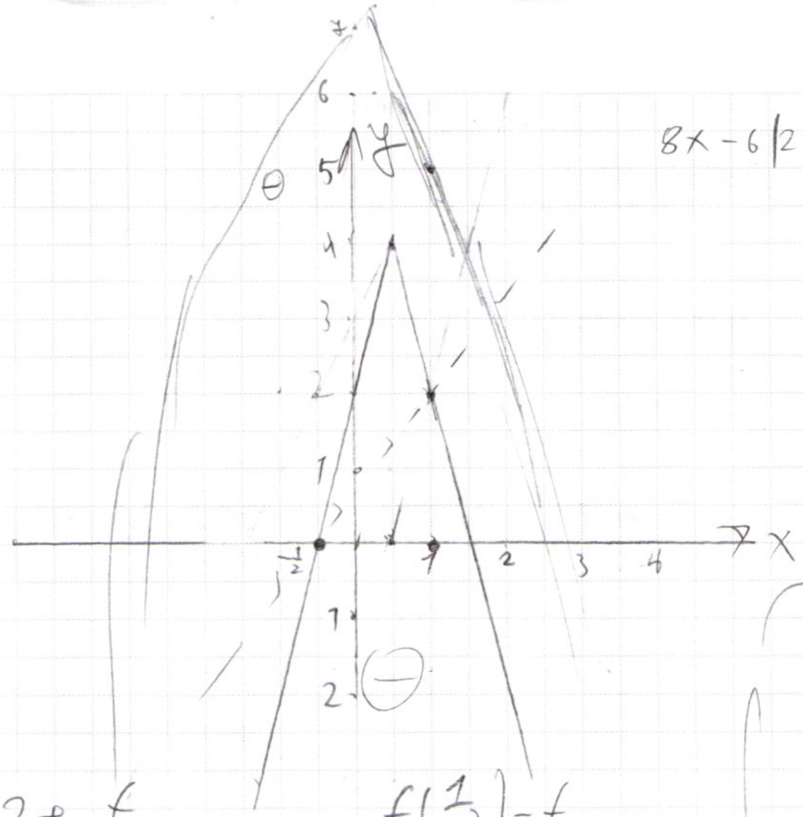
$f\left(\frac{7}{y}\right) =$

Черновик

$8x - 6|2x-1|$

$x > \frac{1}{2}$ $8x - 12x + 6 = 6 - 4x$

$x < \frac{1}{2}$ $8x + 12x - 6 =$



f

$f(\frac{1}{5}) = 2 + f$

$f(\frac{1}{k^2}) = f$

$f(\frac{1}{k}) = f(k) + f(\frac{1}{k^2})$

$x > \frac{1}{2}: 8x - 6(2x-1) = 8x - 12x + 6 = 6 - 4x$

$x < \frac{1}{2}: 8x + 6(2x-1) = 20x - 6$

$-8x^2 + 6x + 4 = 0$ $x_0 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

$-32 + 12 + 70 = 7 - 20$ 4

$2 \leq x \leq 22$

$2 \leq y \leq 22$

$f(p) = [\frac{p}{2}]$

$f(a) + f(b) = f(ab)$

$f(\frac{1}{5}) =$

$= f(5) + f(\frac{1}{25}) = 2 + f(\frac{1}{25})$

2

$\angle ax + b$