# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа $a$, $b$, $c$ являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа $a$, $b$, $c$ не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике $ABC$ на катете $AC$ и гипотенузе $AB$ отмечены точки $D$ и $E$ соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла $BAC$, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника $CED$.

5. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

МФТИ

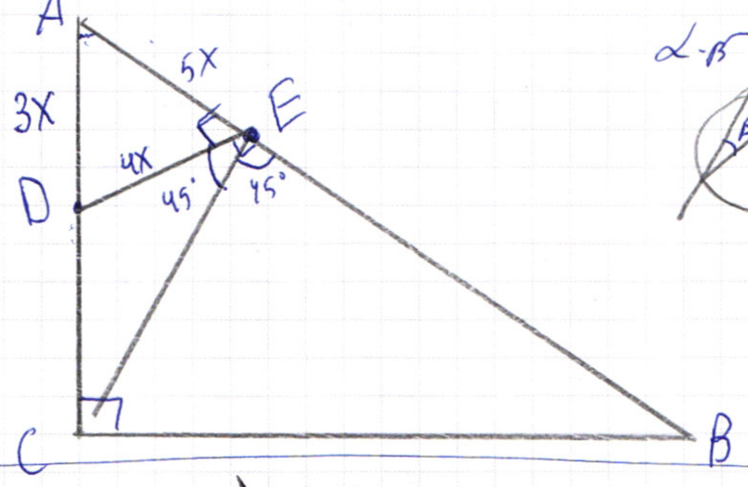
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

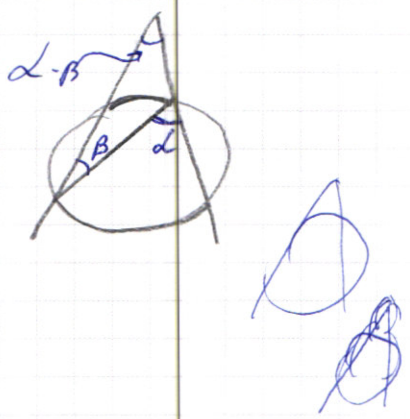
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

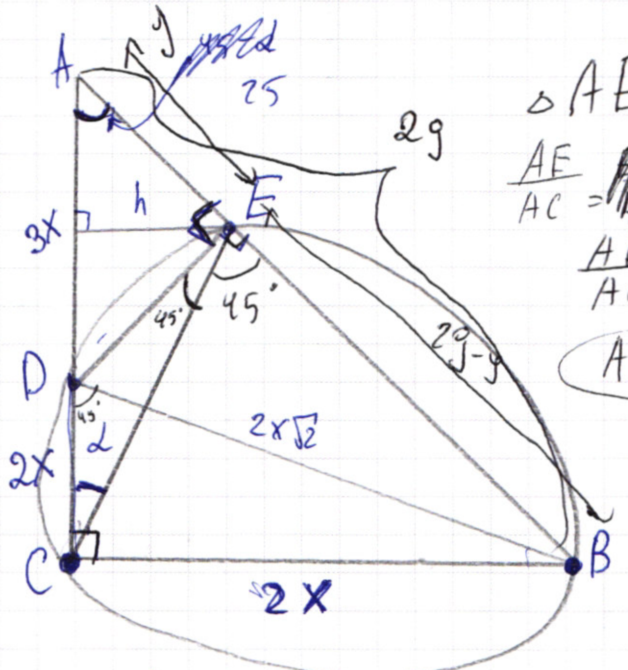
ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА




$tg A = \frac{2}{5}$

$\triangle AED \sim \triangle ACB$

$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$

$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$

$AE \cdot HB = AD \cdot AC$

$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$

$180 - 90 - 45 - \alpha = 45 - \alpha$

$\frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2x}{\sqrt{2}}$

$45 - \alpha =$

$\frac{2X}{\sin 45} = 2R$

$X = R \sin 45 \Rightarrow$

$R = x\sqrt{2}$

$AC = \sqrt{29}$

$R = \frac{x}{\sin 45} = x\sqrt{2}$

$x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

$25x^2 + 4x^2 = \sqrt{29}x$

$29y = 3X \cdot 5X = 25X^2 = 25 \cdot 29$

$y = 25$

$\frac{25}{29} = \frac{h}{2\sqrt{29}}$

$h = \frac{50\sqrt{29}}{29}$

$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot \frac{50\sqrt{29}}{29} \cdot 2 \cdot \sqrt{29} = 50$

$1{,}5 \cdot 3 - 1 = 4{,}5 - 1 = 3{,}5$

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$

$f(x) = 2x^2 - x - 1$

$x_B = \frac{1}{4}$

$y_B = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{2}{8} - 1 = -\frac{1}{8} - 1 = -\frac{9}{8}$

$h(x) = x + |2x-1|$

$x \ge \frac{1}{2}: \quad h(x) = x + 2x - 1 = 3x - 1$

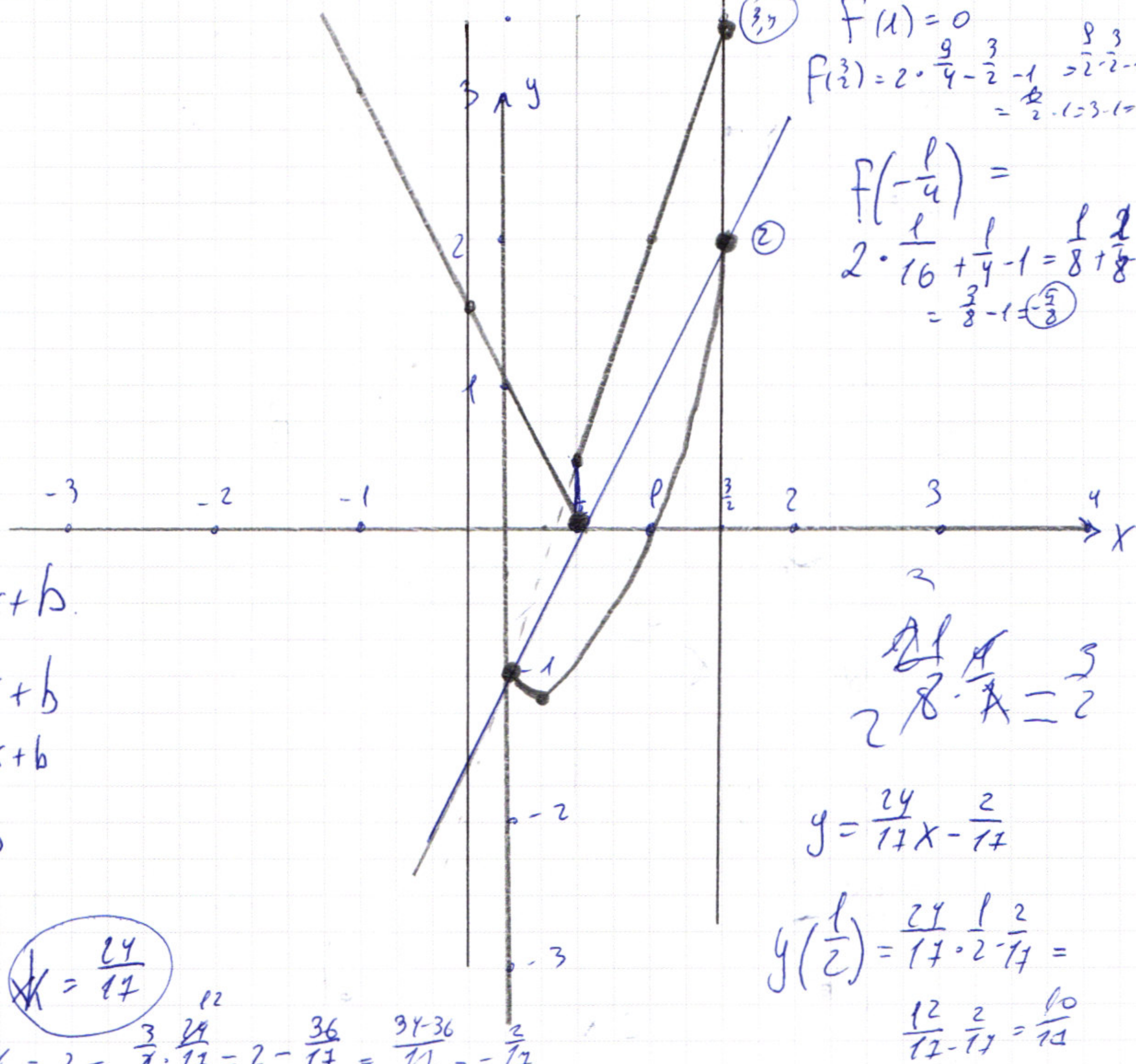
$x \le \frac{1}{2}: \quad h(x) = x + 1 - 2x = 1 - 2x$

$f(1) = 0$

$f(\frac{3}{2}) = 2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{6}{2} - 1 = 3 - 1 = 2$

$f(-\frac{1}{4}) =$

$2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} - 1 = \frac{3}{8} - 1 = -\frac{5}{8}$



$y = kx + b$

$2 = \frac{3}{2}x + b$

$-1 = -\frac{5}{8}x + b$

$\begin{cases} 2 = \frac{12}{8}x + b \\ 1 = \frac{5}{8}x - b \end{cases}$

$3 = \frac{17}{8}k \quad k = \frac{24}{17}$

$b = 2 - \frac{3}{2}k = 2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{24}{17} = 2 - \frac{36}{17} = \frac{34-36}{17} = -\frac{2}{17}$

$2 \cdot \frac{21}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3}{2}$

$y = \frac{24}{17}x - \frac{2}{17}$

$y(\frac{1}{2}) = \frac{24}{17} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{17} = \frac{12}{17} - \frac{2}{17} = \frac{10}{17}$

$y = kx + b$

$-\frac{5}{8} = -\frac{1}{4}k + b$

$2 = \frac{3}{2}k + b$

$\begin{cases} \frac{5}{8} = \frac{1}{4}k - b \\ 2 = \frac{6}{4}k + b \end{cases}$

$\frac{7}{4}k = \frac{21}{8}$

$k = \frac{21}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3}{2}$

$2 + \frac{5}{8} = \frac{16}{8} + \frac{5}{8} = \frac{21}{8}$

$f(\frac{3}{2}) = 2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{6}{2} - 1 = 3 - 1$

$k = \frac{3}{2}$

$b = 2 - \frac{3}{2}k = 2 - \frac{9}{4} = \frac{8}{4} - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$

$x = \frac{1}{2}: \quad y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $a, b, c \in$ геом. прог.

$ax^2+2bx+c=0$

$a = n$
$b = kn$
$c = k^2 n$
$d = k^3 n$

k - коэф

$ax^2+2bx+c=0$

$nx^2+2knx+k^2n=0$

$x^2+2kx+k^2=0$

$(x+k)^2=0 \Rightarrow x=-k$

$d=-k=k^3n$

$-k=k^3n$

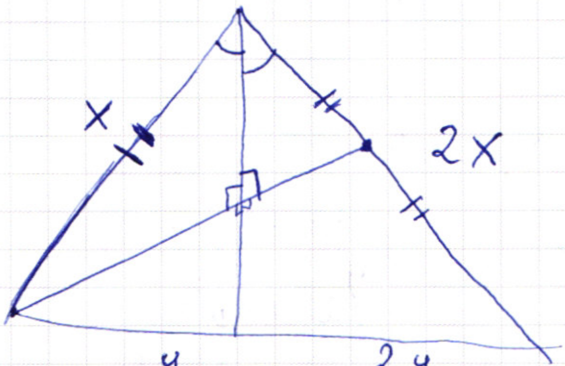
$k^3n+k=0$

$k^2n+1=0$

$\underline{k^2n=-1}$

②

$P=1200$




$P=3(x+y)=1200$

$\boxed{x+y=400}$ $x, y \in \mathbb{N}$

$x = 1, \ldots, 399$

① $x<2x+3y$

$2x<x+3y$

$3y<3x$

$3y>-x>0$

$\boxed{x<3y}$

$y<x$

$$\begin{cases} x+y=400 \\ x<3y \\ y<x \end{cases}$$

$x+y=400$

$y<x<3y$

$x \in \{~~1, 2, \ldots, 199, 200,~~ 201, \ldots, 398, 399\}$

200
200

$x+y=400$
$x<3y$

$x+y<3y+y=4y$ $400=x+y<4y$

$y>100 \Rightarrow x<300$

$299-201+1=$
$300-201=$
$\underline{99}$

$ad^2+2bd+c=0$

$k^6n^2$

$k^6n^3+2k^4n^2$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x+2-y} & (2) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 & (1) \end{cases}$$

$2x+y$

(1) $x^2-4x+4+y^2-4y+4+x^2-5=0$

$2\cdot x^2-2\cdot\sqrt{2}x\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}$

$(x-2)^2+(y-2)^2+x^2=5$

(1) $(2x^2-4x+2)+(y^2-4y+4)-3=0$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

$2x^2-4x+y^2-4y+3=0$

$D=16-8(y^2-4y+3)=16-8y^2+32y-24=-8y^2+32y-8=$

$=\cancel{-8(y^2+4y+1)}\quad -4(2y^2+8y+2)=-8(y^2+4y+1)$

(2): $y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$xy-2x-y+2=$

$=y(x-1)-2(x-1)=(y-2)(x-1)$

$(y-2x)^2=(y-2)(x-1)$

$y-2=a$
$x-1=b$

6

$a=y-2$

$2b=2x-2$

$a-2b=y-2x$

$(a-2b)^2=ab$

$$\begin{cases} (a-2b)^2=ab \\ a^2+2b^2=3 \end{cases}$$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$(y^2-4y+4)+2(x^2-2x+1)=3$

$y^2-4y+1+2x^2-4x+2$

$$\begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ a^2+2b^2=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+2b^2=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-b)(a-4b)=0 \\ a^2+2b^2=3 \end{cases}$$

1) $a=b$

$a^2+2a^2=3\quad 3a^2=3\quad a^2=1$

$a=1, b=1\ ;\ a=-1, b=-1$

$2-4\sqrt{\frac{1}{6}}-2\left(1-\sqrt{\frac{1}{6}}\right)=$

$=2-4\sqrt{\frac{1}{6}}-2+2\sqrt{\frac{1}{6}}$

201 202 203

$3\cdot\frac{3}{2}-1$

$=\frac{9}{2}-1=$

299-201+1

$1-(-\frac{1}{4})=\frac{5}{4}$ 3,5

301-2

200 .. 300

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

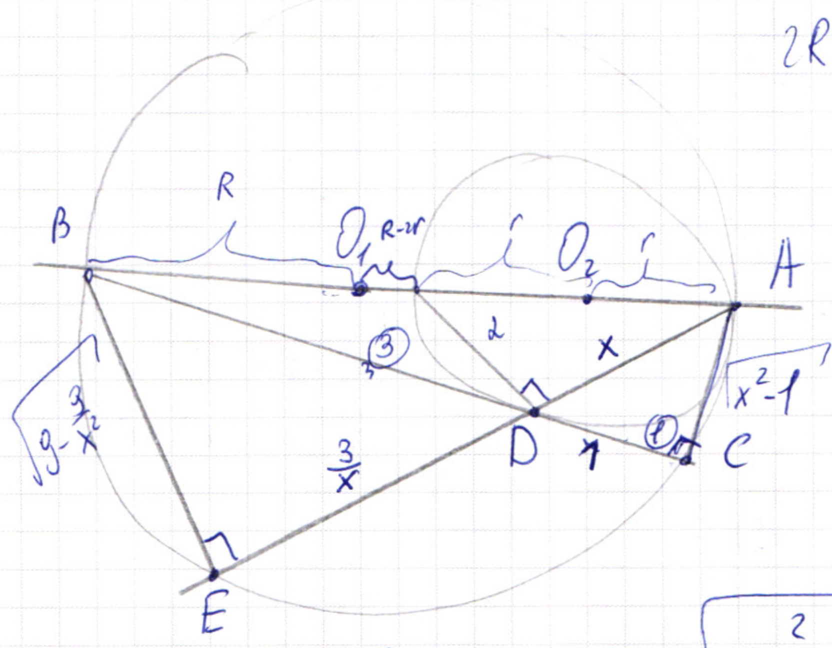
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2R-R-2r=R$




$$\frac{x}{\frac{3}{x}} = \frac{2r}{2R}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{3} = \frac{r}{R}}$$

R

$$\frac{x}{\frac{3}{x}+x} = \frac{2r}{2R} = \frac{r}{R}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{3+x^2} = \frac{r}{R}}$$

$$16+x^2-1 = x^2+15 = 4R^2$$

$$\frac{d}{\sqrt{9-\frac{9}{x^2}}} = \frac{x}{\frac{3}{x}+x} = \frac{x^2}{3+x^2}$$

$$d = 3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\,\frac{x^2}{3+x^2}$$

$$\frac{9x^4}{(3+x^2)^2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 4r^2$$

$+9$ $60$ $540$

$$x^2+15 = 4R^2$$

$$\frac{9x^4}{(3+x^2)^2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$9x^4\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = x^2+15$$

$$9x^4-9x^2 = x^2+15$$

$$9x^4-10x^2-15=0$$

$$\frac{9x^4\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{(3+x^2)^2}(x^2+15)} = \frac{1}{\cancel{(3+x^2)^2}}$$

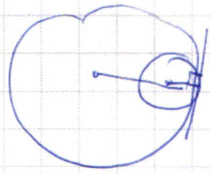
$100+540=640.$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\quad f(1)=1$ $\quad 1\le x,y\le 21$

$f(p)=[\frac{p}{2}]$ $\quad f(\frac{x}{y})<0$

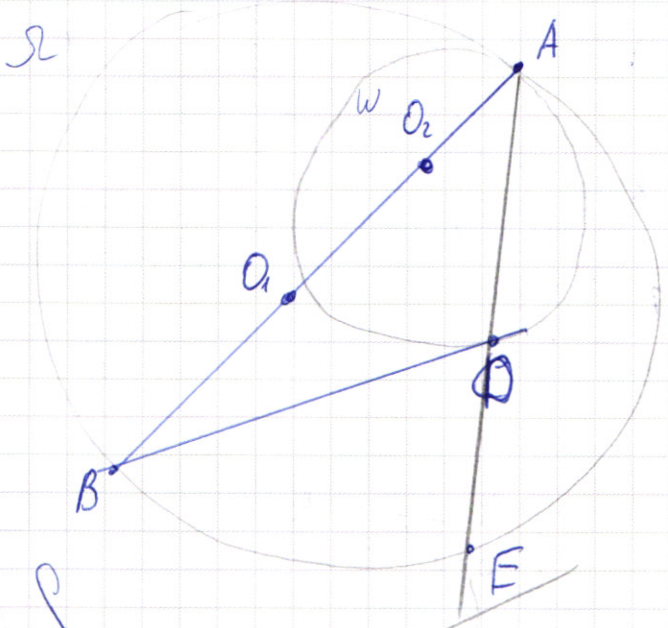


$f(2\cdot\frac{p}{2})=f(2)\cdot f(\frac{p}{2})=[\frac{p}{2}]$

$f(2)\cdot[\frac{p}{4}]=[\frac{p}{2}]$

$(\frac{3}{x}+x)^2=$

$\frac{9}{x^2}+x^2+6$



$x^2-\cancel{4r^2}=9-4R^2+8Rr-\cancel{4r^2}$

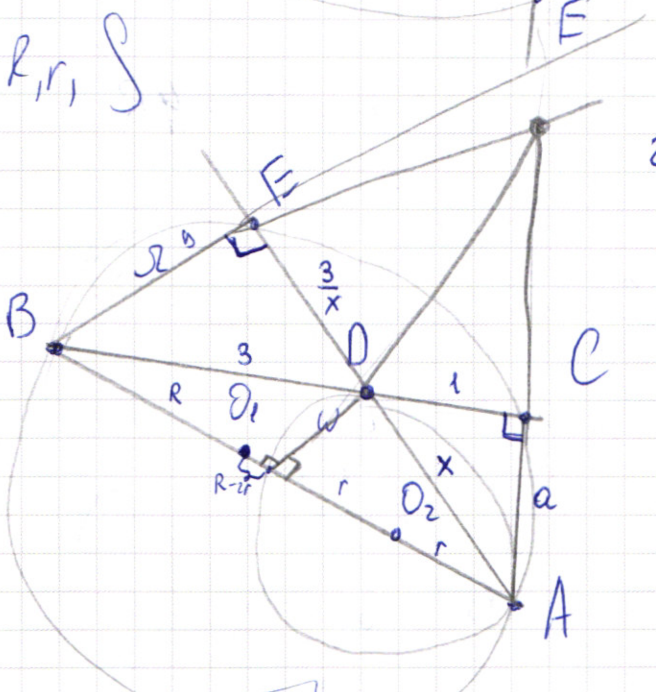
$x^2=9-4R^2+8Rr$

$2(R-r)$

$4(R^2-2Rr+r^2)$

$2R-2r$

$R,r,S$



$\underline{2R\cdot(2R-2r)=4R(R-r)=9}$

$R(R-r)=\frac{9}{4}$

$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

$a=\cancel{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad a=\sqrt{x^2-1}$

$a=\sqrt{(2R)^2-4^2}$

$x^2-1=4R^2-16$

$x^2=4R^2-15$

$b=\sqrt{9-\frac{9}{x^2}}=\sqrt{(2R)^2-(\frac{3}{x}+x)^2}$

$9\cancel{-\frac{9}{x^2}}=4R^2\cancel{-\frac{9}{x^2}}-x^2-6$

$15=4R^2-x^2$

$15=4R^2-1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1.

$a, b, c$ - первые три члены геометрической прогрессии

$d$ - четвёртый член прогрессии, и $d$ - корень уравнение:

$ax^2+2bx+c=0.$

$c - ?$

Пусть $a=n$, $b=kn$, $c=k^2n$, $d=k^3n$ ($n$ - первый член; $k$ - коэф. прогресии)

$(n\neq 0;\ k\neq 0)$.

Тогда $ax^2+2bx+c=0 \Leftrightarrow nx^2+2knx+k^2n=0.$

$n\neq 0 \Rightarrow x^2+2kx+k^2=0$, $\underbrace{(x+k)^2}_{\geq 0}=0 \Rightarrow x=-k.$

$x$ - корень уравнение, причём он единственный $\Rightarrow x=d=k^3n$

$k^3n=-k$, $k^3n+k=0$, $k^2n+1=0$ (т.к. $k\neq 0$).

$k^2n=-1$. Но $c=k^2n \Rightarrow c=-1.$

Ответ: $-1$.

Задача №3. $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} & (1)\\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. & (2)\end{cases}$

Рассмотрим уравнение (1):

Заметим, что область значений на подкоренное выражение не обязательно находить явно. В конце решения достаточно будет полученные пары $(x, y)$ подставить в (1) уравнение и проверить принадлежность этих корней.

Рассмотрим подкоренное выражение:

$xy-2x-y+2=y(x-1)-2(x-1)=(y-2)(x-1).$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1 (Нумеровать только чистовики)

Выполним замену $a = y-2$; $b = x-1$.

Тогда $y - 2x = a - 2b$ $(a-2b = y-2-2(x-1) = y-2-2x+2 = y-2x)$.

Тогда после замены получим:

$$a - 2b = \sqrt{ab}$$

$(a-2b)^2 = ab$ (лишние корни проверим в конце).

$$a^2 - 4ab + 4b^2 = ab$$

$$a^2 - 5ab + 4b^2 = 0$$

$$(a-4b)(a-b) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4b \\ a = b \end{array}\right.$$

Рассмотрим уравнение (2):

$$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$(y^2 - 4y + 4) + 2(x^2 - 2x + 1) - 3 = 0$$

$(y-2)^2 + 2(x-1)^2 = 3$. Т.к. $a = y-2$; $b = x-1$, то:

$$a^2 + 2b^2 = 3.$$

1) Если $a = 4b$, то:

$$(4b)^2 + 2b^2 = 3 \Rightarrow 16b^2 + 2b^2 = 3 \Rightarrow 18b^2 = 3$$

$b^2 = \frac{3}{18} = \frac{1}{6} \Rightarrow b = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$.

$b = \sqrt{\frac{1}{6}}$, $a = 4b = 4\sqrt{\frac{1}{6}}$

$b = -\sqrt{\frac{1}{6}}$, $a = 4b = -4\sqrt{\frac{1}{6}}$

$$\begin{cases} x = b+1 \\ y = a+2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ll} x = \sqrt{\frac{1}{6}}+1, \quad y = 2+4\sqrt{\frac{1}{6}} & \text{(1-ая пара)} \\ x = -\sqrt{\frac{1}{6}}+1, \quad y = 2-4\sqrt{\frac{1}{6}} & \text{(2-ая пара)} \end{array}\right.$$

Проверим корни, подставив в уравнение (1):

1-ая пара: $2 + 4\sqrt{\frac{1}{6}} - 2\left(\sqrt{\frac{1}{6}}+1\right) = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{1}{6}}+1\right)\left(2+4\sqrt{\frac{1}{6}}\right) - 2\left(\sqrt{\frac{1}{6}}+1\right) - \left(2+4\sqrt{\frac{1}{6}}\right) + 2}$

$$2\sqrt{\frac{1}{6}} = \sqrt{2\sqrt{\frac{1}{6}} + \frac{4}{6} + 2 + 4\sqrt{\frac{1}{6}} - 2\sqrt{\frac{1}{6}} - 2 + 2 - 4\sqrt{\frac{1}{6}} + 2}$$

$2\sqrt{\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{4}{6}} = 2\sqrt{\frac{1}{6}}$ – верно.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2-ая пара: $2-4\sqrt{\frac{1}{6}}-2\left(1-\sqrt{\frac{1}{6}}\right)=\sqrt{\left(1-\sqrt{\frac{1}{6}}\right)\left(2-4\sqrt{\frac{1}{6}}\right)-2\left(1-\sqrt{\frac{1}{6}}\right)-\left(2-4\sqrt{\frac{1}{6}}\right)+2}$

$2-4\sqrt{\frac{1}{6}}-2+2\sqrt{\frac{1}{6}}=\sqrt{2-4\sqrt{\frac{1}{6}}-2\sqrt{\frac{1}{6}}+\frac{4}{6}-2+2\sqrt{\frac{1}{6}}-2+4\sqrt{\frac{1}{6}}+2}$

$-2\sqrt{\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{4}{6}}=2\sqrt{\frac{1}{6}}$ – неверно (лишний корень)

2) Если $a=b$, то:

$a^2+2a^2=3 \Rightarrow 3a^2=3$

$a^2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} a=1,\ b=1 \\ a=-1,\ b=-1 \end{array}\right.$ ; $\begin{cases} x=b+1 \\ y=a+2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x=2,\ y=3 & \text{(3-ая пара)} \\ x=0,\ y=1 & \text{(4-ая пара)} \end{array}\right.$

Проверим и эти пары:

3-ая пара: $3-2\cdot 2=\sqrt{6-4-3+2}$

$-1=\sqrt{1}=1$ – неверно (лишний корень)

4-ая пара: $1-0=\sqrt{0-0-1+2}=\sqrt{1}=1$ – верно.

Значит 1-ая и 4-ая пара – решения.

Ответ: $(0;1)$ и $\left(1+\sqrt{\frac{1}{6}};\ 2+4\sqrt{\frac{1}{6}}\right)$.

Задача №4.

Дано:

$\triangle ABC$ – прямоугольный ($\angle C=90°$)

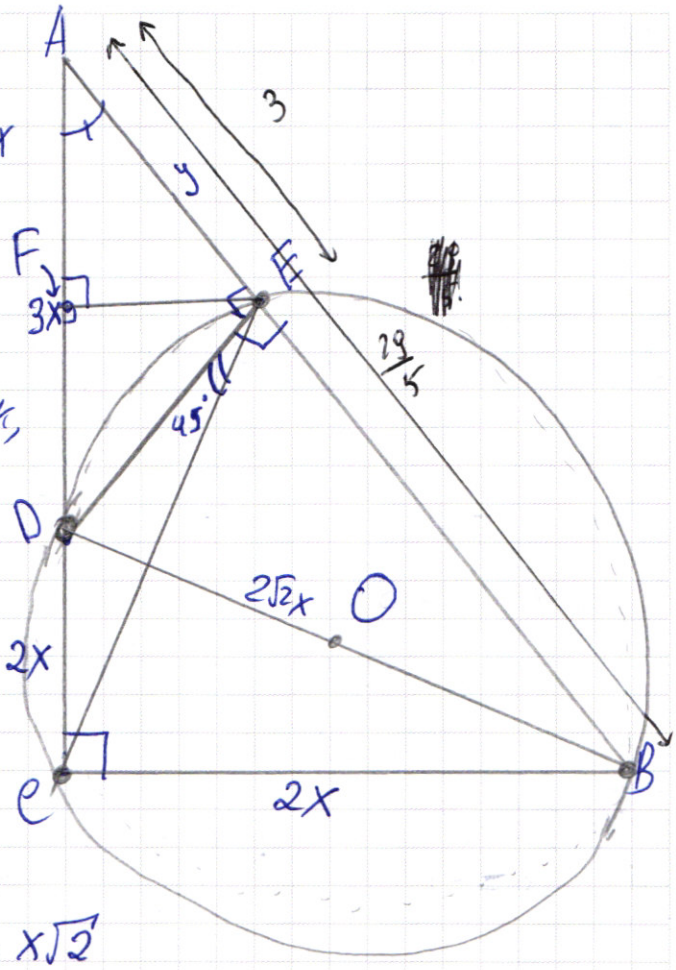
$D\in AC$, $E\in AB$

$AD:DC=3:5$

$DE\perp AB$, $\angle CED=45°$

1) $tg\angle BAC$ – ?

2) $AC=\sqrt{29}$, $S_{\triangle CED}$ = ?




1) $AD : AC = 3 : 5 \Rightarrow$

$AD = 3x$, $AC = 5x$, $DC = AC - AD = 2x$

2) Т.к. $DE \perp AB$, то $\angle BED = 90°$;
$\angle ACB = 90°$ $\Downarrow$

$CDEB$ – вписанный четырёхугольник, так как $\angle DCB + \angle BED = 180°$,
$BD$ – диаметр (т.к. на него опираются прямые углы)

3) По Th. синусов для $\triangle CDE$:

$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$:

$\frac{2x}{\sin 45°} = 2R \Rightarrow R = \frac{x}{\sin 45°} = \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = x\sqrt{2}$

($R$ – радиус окружности вписанного четырёхугольника, т.к. точки $C, D, E$ лежат на этой окружности).

Тогда $BD = 2R = 2\sqrt{2}x$.

4) Из Th. Пифагора для $\triangle BDC$:

$(CD)^2 + (BC)^2 = (BD)^2 \Rightarrow BC = \sqrt{BD^2 - CD^2} = \sqrt{(2\sqrt{2}x)^2 - (2x)^2} =$
$= \sqrt{8x^2 - 4x^2} = \sqrt{4x^2} = 2x$

5) $tg\angle BAC$ (по определению) $= \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5} = 0{,}4$.

6.) $AC = \sqrt{29} \Rightarrow 5x = \sqrt{29} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5}$.

Из Th. Пифагора для $\triangle ABC$: $AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow$

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(5x)^2 + (2x)^2} = \sqrt{29x^2} = \sqrt{29}\,x = \frac{29}{5}$

7) Пусть $AE = y$. Тогда по свойству двух касательных, проведённых из одной точки к одной окружности имеем:

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AD \cdot AC = AE \cdot AB \Rightarrow 3x \cdot 5x = y \cdot \frac{29}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{15x^2 \cdot 5}{29} = \frac{15 \cdot 29 \cdot 5}{29 \cdot 5^2} = \frac{15}{5} = 3$

8) Проведём прямую $EF \perp AC$ $(F \in AC)$. Тогда $\triangle AFE \sim \triangle ACB$ ($\angle A$ - общий, $\angle AFE = \angle ACB$, т.к. $AC \perp FE$) $\Rightarrow$

$\frac{FE}{CB} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow FE = \frac{AE \cdot CB}{AB} = \frac{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{29} \cdot 5}{5 \cdot 29} = \frac{6}{\sqrt{29}}$

9) $S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot FE$ (т.к. $FE$ - высота) $= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{6}{\sqrt{29}} =$

$= \frac{6}{5} = 1{,}2.$

Ответ: а) $tg \angle BAC = 0{,}4$ ; б) $\triangle CED = 1{,}2$

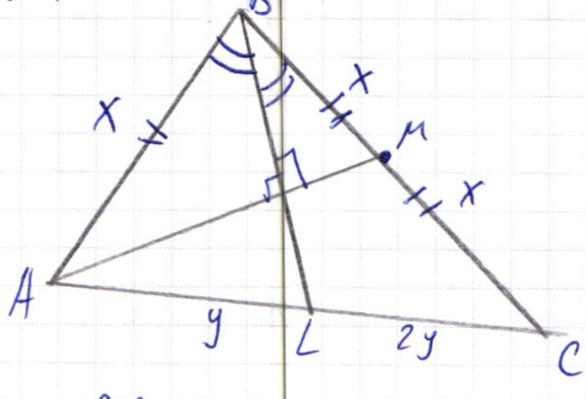
Задача №2

$p = 1200$

биссектриса $\perp$ медиане

кол-во треугольников.

Определим, когда при каких условиях в треугольнике медиана будет перпендикулярна биссектрисе:




Рассмотрим $\triangle ABC$:

Так как $AM \perp BL$, то в $\triangle ABM$ биссектриса совпадает с высотой, значит $\triangle ABM$ - равнобедренный и $BM = AB$. Пусть $BM = x$, тогда $AB = x$, $BC = 2x$

По св-ву биссектрисы $AB : BC = AL : LC$. Значит, если $AL = y$, то $CL = 2y$.

Значит, при таких конфигурациях наше условие выполнено.
Однако необходимо проверить существование треугольника:

$$\begin{cases} AB < BC + AC \\ BC < AB + AC \\ AC < AB + BC \end{cases}$$

$AB < BC + AC$: $x < 2x + 3y \Rightarrow 3y + x > 0$ (всегда верно)

$BC < AB + AC$:

$2x < x + 3y \Rightarrow \boxed{x < 3y}$

$AC < AB + BC$: $3y < 2x + x \Rightarrow \boxed{y < x}$

Условие на периметр даёт нам $P = 2x + x + 3y = 3(x+y)$. $\Rightarrow$

$x + y = \frac{P}{3} = \frac{1200}{3} = 400.$

$$\begin{cases} x + y = 400 \ (1) \\ x < 3y \ (2) \ \left(y > \frac{x}{3}\right) \\ x > y \ (3) \\ x, y \in \mathbb{N} \ (4) \end{cases}$$

Если бы не было условий (2) и (3), то $x$ могло бы принимать любое значение от 1 до 399 (399 вариантов).

Из условия (2): $400 = x + y > x + \frac{x}{3} = \frac{4x}{3}$

$\frac{4x}{3} < 400 \Rightarrow x < \frac{400 \cdot 3}{4} = 300.$ $\boxed{x < 300}$

Из условия (3): $400 = x + y < 2x \Rightarrow x > \frac{400}{2} = 200$ $\boxed{x > 200}$

Значит, исходя из полученных условий на $x$, $x$ может принимать любое натуральное значение от 201 до 299 ($299 - 201 + 1 = 99$ способов). И при таких значениях $x$, $y$ всегда будет однозначно определён, т.к. $y = 400 - x$.

Ответ: 99 способов.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №6 Найти все пары $(a;b)$, такие, что на промежутке $[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}]$ верно неравенство $2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|$.

Будем решать задачу графически.

Пусть $f(x)=2x^2-x-1$, $g(x)=x+|2x-1|$, $h(x)=ax+b$.

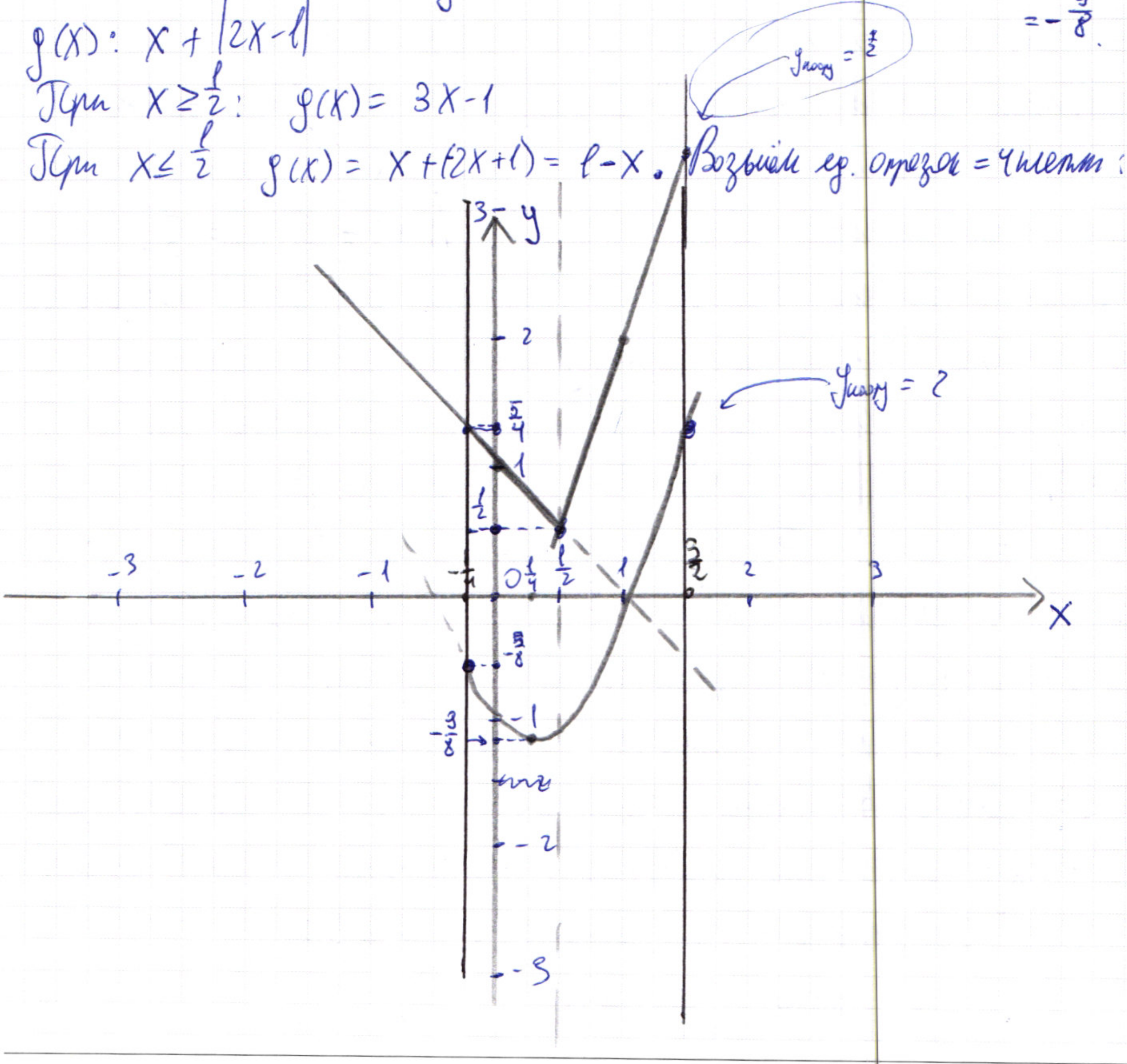
Проанализируем $f(x)$: $x_B=\frac{-b}{2a}=\frac{1}{4}$.

$y_B=f(x_B)=2\cdot\frac{1}{4^2}-\frac{1}{4}-1=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-1=\frac{1}{8}-\frac{2}{8}-\frac{8}{8}=$
$=-\frac{9}{8}$.

$g(x)$: $x+|2x-1|$

При $x\ge\frac{1}{2}$: $g(x)=3x-1$

При $x\le\frac{1}{2}$ $g(x)=x+(2x+1)=1-x$. Возьмём ед. отрезок = 4 клетки:



Заметим, что $f(x)$ - квадратичная функция и её вершина входит в интервал $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$, а $g(x)$ - функция, зависящая от модуля и состоит из двух прямых, и эти две прямые сменяются в точке $x=\frac{1}{2}$. Но $h(x)=ax+b$ — линейная функция, график которой прямая линия. Условие $f(x) \le h(x) \le g(x)$ говорит нам о том, что график линейной функции находится между графиков функций $f(x)$ и $g(x)$, но в предельном случае может их касаться, однако не пересекать.

В точке $x=\frac{3}{2}$ наш график линейной функции должен пройти между точками $y=f(\frac{3}{2})$ и $y=g(\frac{3}{2})$.

$f(\frac{3}{2}) = 2\cdot\frac{9}{4}-\frac{3}{2}-1 = \frac{9}{2}-\frac{3}{2}-1 = 2$. $g(\frac{3}{2}) = 3\cdot\frac{3}{2}-1 = \frac{7}{2} = 3{,}5$.

Однако место „перегиба" функции $g$ - наш враг, ~~так как~~ ~~график~~ график не должен в точке $x=\frac{1}{2}$ проходить выше этой точки, то есть в точке $x=\frac{1}{2}$ $h(x) \le g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

Также очевидно, что $a>0$, ведь если $h(x)$ будет убывающей, то обязательно пересечёт другой график, т.к. начальный диапазон „$y$" ниже конечного. Рассчитаем начальный диапазон „$y$":

$f(-\frac{1}{4}) = 2\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-1 = \frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1 = \frac{1}{8}+\frac{2}{8}-\frac{8}{8} = -\frac{5}{8}$

$g(-\frac{1}{4}) = 1-(-\frac{1}{4}) = \frac{5}{4}$. Из графиков видно, что если $h(x)$ войдёт в интервал в точке $f(-\frac{1}{4}) = -\frac{5}{8}$ и выйдет в точке $f(\frac{3}{2})=2$ и при этом пересечёт другой график, то мы не сможем подобрать подходящие $a$ и $b$. ~~Также очевидно, что $a<3$, иначе $h(x)$ будет возрастать быстрее $g(x)$ и пересечёт её.~~

Поэтому необходимо проверить „наилучший случай", чтобы узнать, существуют ли подходящие $a$ и $b$:

Уравнение прямой: $y=ax+b$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} -\frac{5}{8} = -\frac{1}{4}a + b \\ 2 = \frac{3}{2}a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{8} = \frac{1}{4}a - b \\ 2 = \frac{3}{2}a + b \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{4}a = \frac{21}{8} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$b = 2 - \frac{3}{2}a = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4} \qquad y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$$

Проверим эту прямую.
Очевидно, что на промежутке $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ прямая никак не пересечётся с $f(x)$ (т.к. их пересечение будет в точке $x=\frac{3}{2}$ (граничный случай) и с $g(x)$ (т.к. $a<3$ – показатели скорости роста линейной функции). Значит достаточно проверить условие, что в точке $x=\frac{1}{2}$ прямая не пересечётся с другим графиком:

$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, но $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ будет касание. Значит, существует только единственная пара $(a;b)$ для которой условие задачи выполнено. Потому что изменив $a$ или $b$ мы либо пересечём прямую $x=\frac{3}{2}$ в точке $y<2$, либо пересечём $g(x)$.

Ответ $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

Задача №5.

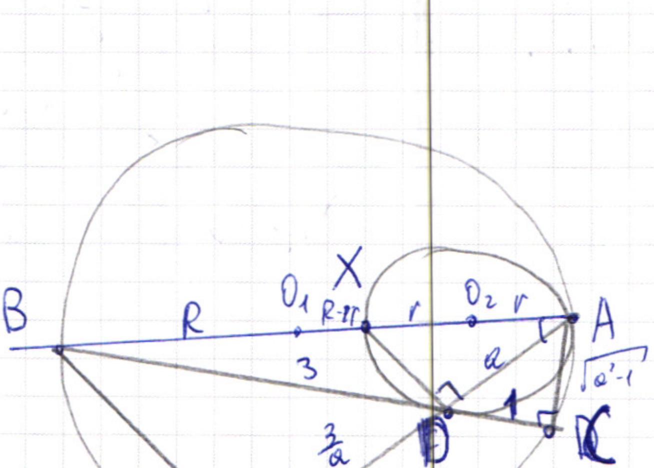
$\Omega, \omega$

$CD=1, BD=3$

$R$ – ?

$r$ – ?

$S_{ABBACF}$ – ?



1) ω и Ω касаются в одной точке внешним образом =>

$O_1, O_2$ (центры) и A лежат на одной прямой

2) $\angle BEA = \angle BCA = 90^\circ$ (т.к. опираются на диаметр)

3) Пусть AX — диаметр окружности, тогда $\angle ADX = 90^\circ$

4) Пусть $AD = a$. Так как BC и AE пересекаются и A, B, C, E лежат на одной окружности, то $AD \cdot AE = BD \cdot DC$. =>

$AE = \frac{BC \cdot DC}{AD} = \frac{3}{a}$

5) $\triangle XDA \sim \triangle BEA$ (по 2 углам) => $\frac{AD}{AE} = \frac{AX}{AB}$ : $\frac{a}{a+\frac{3}{a}} = \frac{2r}{2R} = \frac{r}{R}$

$\frac{a^2}{a^2+3} = \frac{r}{R}$.

~~6) Из Th. Пифагора для △BEA:~~ $\cancel{BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{(2R)^2 - (a+\frac{3}{a})^2}}$

6) Из Th. Пифагора для △BED: $BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = \sqrt{9 - \frac{9}{a^2}} = 3\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}$

7) Из подобия (п.5) также имеем:

$\frac{XD}{BE} = \frac{AD}{AE}$ : $XD = BE\frac{AD}{AE} = 3\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}\,\frac{a}{a+\frac{3}{a}}$

8) Из Th. Пифагора для △ADX: $AX^2 = AD^2 + DX^2$ :

$AX^2 = 4r^2 = a^2 + \frac{9a^2}{(a+\frac{3}{a})^2}(1-\frac{1}{a^2})$

9) Из Th. Пифагора для △ACB: $AB^2 = AC^2 + CB^2$ :

$4R^2 = 16 + a^2 - 1 = a^2 + 15$.

$\frac{4R^2}{4r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \frac{a^4}{a^4+6a^2+9} = \frac{a^2+15}{a^2 + \frac{9a^2}{a^2+6+\frac{9}{a^2}}(1-\frac{1}{a^2})}$

$\cancel{a^6} + 6a^4 + 9a^2 + 15a^4 + 90a^2 + 135 = \cancel{a^6} + \frac{9a^6 - 9a^4}{a^2+6+\frac{9}{a^2}}$

$(21a^4 + 99a^2 + 135)(a^2 + 6 + \frac{9}{a^2}) = 9a^6 - 9a^4$

...