МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 a, b, c, d члены прогрессии, c – ?

$d = x$, $ax^2 + 2bx + c = 0$

a, b, c, d можно записать по-другому:

$a, a \cdot q, aq^2, aq^3 \Rightarrow$

$a \cdot (aq^3)^2 + 2 \cdot aq \cdot aq^3 + aq^2 = 0 \quad /: a, : q^2$

$a^2q^4 + 2aq^2 + 1 = 0 \Rightarrow$

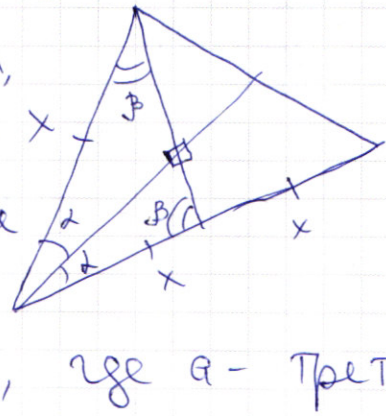
$(aq^2 + 1) = 0$, где $aq^2 = c$

$aq^2 = -1$

Ответ: $c = \underline{-1}$ - третий член прогрессии

№2

Нарисуем такой треугольник.



распишем углы и узнаем, что в таком треугольнике одна сторона больше второй в два раза $\Rightarrow$

$P_{\text{треугольника}} = x + 2x + a$, где a - третья сторона

Не каждый x нам подойдет, так как должно выполняться неравенство треугольника, запишем его:

$$\begin{cases} a+2x > x \Rightarrow a > -x \\ x+a > 2x \Rightarrow a > x \\ 3x > a \Rightarrow a < 3x \end{cases}$$ где $a = 1200-3x$

$$\begin{cases} 1200-3x > -x \Rightarrow 1200 > 2x \Rightarrow x < 600 \\ 1200-3x > x \Rightarrow 1200 > 4x \Rightarrow x < 300 \\ 1200-3x < 3x \Rightarrow 1200 < 6x \Rightarrow x > 200 \end{cases}$$

Теперь, зная, что $x \in (200;300)$, будем его изменять:

Если $x = 201$, то $2x = 402$, $a = 597$

Если $x = 202$ . . . . -

Если $x = 299$, то $2x = 598$, $a = 303$

Получится 99 треугольников с периметром 1200, которые выполняют условие.

Ответ: $\underline{99}$ треугольников

№3

Сделаем замену $y-2 = t$ и $x-1 = k$

$$\Rightarrow \begin{cases} t-2k = \sqrt{tk} \\ t^2+2k^2-3=0 \end{cases} \Rightarrow$$

ОДЗ:

$$\boxed{\begin{matrix} tk \geq 0 \\ t \geq 2k \end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t^2-4tk+4k^2 = tk \Rightarrow t^2-5tk+4k^2=0 \\ t^2+2k^2-3=0 \end{cases}$$

$\cancel{-5tk+2k^2+3=0}$

$t = \cancel{\frac{2k^2+3}{5k}}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{9(k^2+1)^2}{25k^2}+2k^2-3=0$$

$$9(k^2+1)^2+2\cdot 25k^4-3\cdot 25k^2=0$$

$$9k^4+18k^2+9+2\cdot 25k^4-3\cdot 25k^2=0$$

$$59k^4-57k^2+9=0$$

$$-5tk+2k^2+3=0$$

$$t=\frac{2k^2+3}{5k}$$

$$4k^4+\overset{12}{2\cdot 2\cdot 3}k^2+9+50k^4-75k^2=0$$

$$54k^4-63k^2+9=0 \quad |:9$$

$$6k^4-7k^2+1=0$$

$$D=49-24=5^2$$

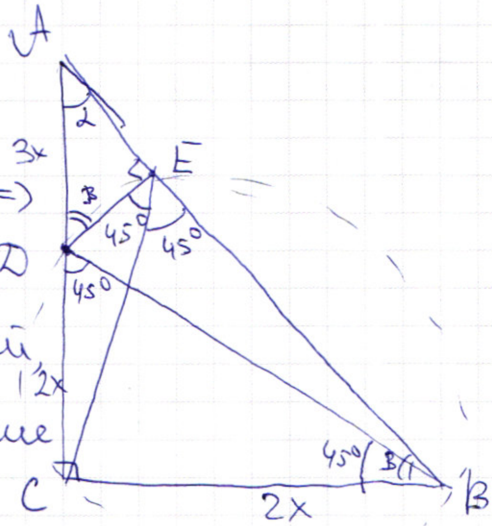
$$k^2=\frac{7\pm 5}{12}=\left\{\frac{1}{6};1\right\} \Rightarrow k=\left\{\pm\frac{\sqrt6}{6};\pm1\right\}$$

$$t=\left\{\pm\frac{4}{15}\sqrt6;\pm1\right\}$$

1) $\begin{cases} x-1=1 \\ y-2=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-1=-1 \\ y-2=-1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-1=\frac{\sqrt6}{6} \\ y-2=\frac{4}{15}\sqrt6 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-1=-\frac{\sqrt6}{6} \\ y-2=-\frac{4\sqrt6}{15} \end{cases}$

Ответ: $(2;3)$ $(0;1)$ $\left(\frac{\sqrt6}{6}+1;\ \frac{4}{15}\sqrt6+2\right)$ $\left(-\frac{\sqrt6}{6}+1;\ 2-\frac{4\sqrt6}{15}\right)$

№4



а) Если $\angle A=\alpha$, то $\angle B=\beta \Rightarrow$
$\angle ADE=\beta \Rightarrow \angle EDC=180^\circ-\beta$, тогда ▱ DEBC - вписанной т.к. его противолежащие углы в сумме дают 180°, тогда по вписанности:

$\angle CDB=\angle CEB=45^\circ$ и $\angle DEC=\angle DBC=45^\circ$

Тогда ΔDCB - равнобедренный $\Rightarrow DC=CB$

т.к. $\frac{AD}{AC}=\frac{3}{5} \Rightarrow DC=AC-AD=2x \Rightarrow$

$\Rightarrow CB=2x$, тогда $tg\, BAC=\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}$

б) $S_{DEC}=\frac{1}{2}\cdot CD\cdot DE\cdot \sin\angle CDE$, где $\angle CDE=180^\circ-\beta \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin\angle CDE=\sin\beta$

по подобию треугольников: $\Delta AED\sim\Delta ACB \Rightarrow$
$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{CB}=\frac{AE}{AC}$ ~~$\Rightarrow DE=$~~ $\Rightarrow DE=\frac{AD\cdot CB}{AB}=\frac{3x\cdot 2x}{x\cdot\sqrt{29}}=\frac{6}{\sqrt{29}}x$

Найдем AB: $AB^2=25x^2+4x^2=29x^2 \Rightarrow AB=x\sqrt{29}$

$\Rightarrow S_{DEC}=\frac{2x\cdot 6x}{2\cdot\sqrt{29}}\cdot\sin\beta=\frac{2x\cdot 6x}{2\cdot\sqrt{29}}\cdot\frac{5x}{x\cdot\sqrt{29}}=$

$=\frac{60x^2}{2\cdot 29}$, где $5x=\sqrt{29}$, т.к. $AC=\sqrt{29} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{DEC}=\frac{60\cdot 29}{2\cdot 29\cdot 25}=\frac{60}{2\cdot 25}=\frac{2\cdot 6}{2\cdot 5}=$ ~~$\frac{12}{5}=2,4$~~ $=\frac{6}{5}$

Ответ: а) $\frac{2}{5}$ б) ~~$\frac{12}{5}=2,4$~~ $\frac{6}{5}=1,2$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №4
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

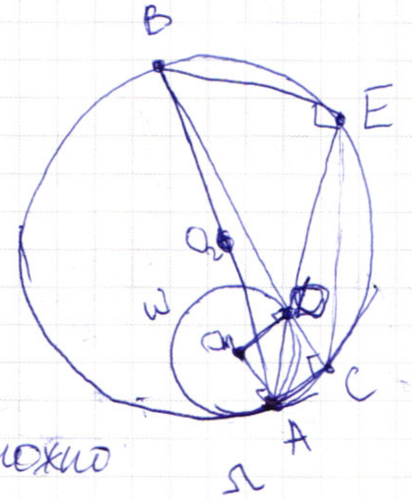
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



$O_1A = r$ -?

$O_2A = R$ -?

S_{BECA} -?

$CD=1$

$BD=3$

1) Напишем отношение для хорд:

$ED \cdot AD = BD \cdot DC$

(это отношение можно выразить из подобия треугольников)

также заметим, что $\angle BEA = \angle BCA = 90^\circ$, т.к. опираются на диаметр, тогда $\square O_1DCA$ - квадрат, т.к. $O_1D = O_1A \Rightarrow$ $\angle O_1DA = 45^\circ \Rightarrow \angle ADC = 45^\circ$ и т.д., тогда раз $CD=1$, то $r = O_1A = 1$

Найдем по тео Пифагора $AD = 1\cdot\sqrt{2} \Rightarrow$

$ED = \frac{3}{\sqrt{2}}$ по отношению хорд

т.к. $\angle ADC = 45^\circ$, то $\angle BDE = 45^\circ$, т.к. они вертикальны, тогда ΔBED - равнобед.

$BE = DE = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ по тео Пиф найдем $AB = 2R$

$AB^2 = BE^2 + EA^2 \Rightarrow 4R^2 = \frac{9}{2} + \frac{25}{2} = \frac{34}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow R^2 = \frac{34}{8} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{34}{8}} = \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

2) $S = S_{BACE} = S_{\triangle BED} + S_{\triangle EDC} + S_{\triangle ADC} + S_{\triangle BDA} \Rightarrow$ найдем все площади

$$S_{\triangle BED} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sin 135^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{9}{4}$$

$$S_{\triangle EDC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$S_{\triangle DAC} = \frac{\sqrt{2} \cdot 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

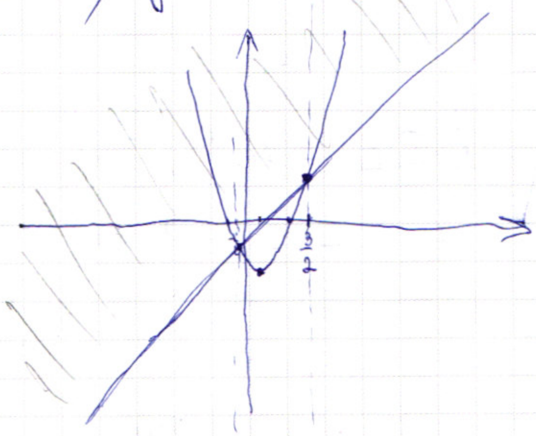
$$S_{\triangle BDA} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}$$

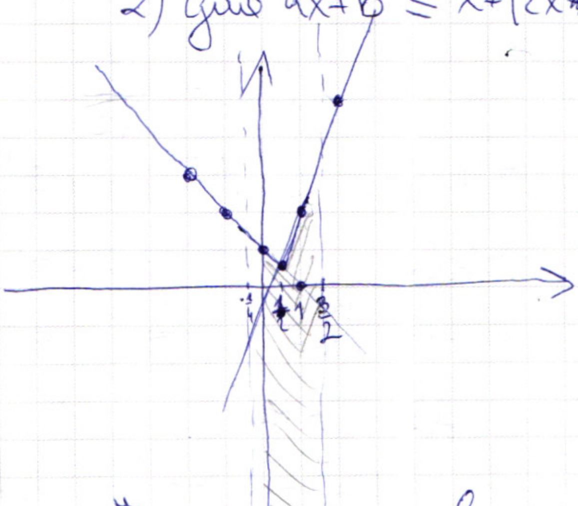
$$S = \underbrace{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}}_{3} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}_{2} = 5$$

Ответ: 1) $r = 1$; $R = \frac{\sqrt{17}}{2}$ 2) $S = 5$

№6 Построим два графика функции.

1) для $2x^2 - x - 1 \le ax + b$ 2) для $ax + b \le x + |2x - 1|$





Найдем „крайние случаи", когда выполняется условие

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\begin{cases} a\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+b = 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{8} \\ a\cdot\frac{3}{2}+b = 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{a}{4}+b = -\frac{5}{8} \\ 3a+2b=4 \end{cases} \Rightarrow$

$a = \frac{3}{2} \qquad b = -\frac{1}{4}$

Если $a \geq \frac{3}{2}$ и $b \geq -\frac{1}{4}$, то $2x^2 - x - 1 \leq ax+b = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$

при любых x

2) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+b = 1+\frac{1}{4} = \frac{5}{4} \\ a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+b = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a=-1,\ b=1 \\ \begin{cases} a\cdot\frac{1}{2}+b = \frac{1}{2} \\ a\cdot\frac{3}{2}+b = \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow a=3 \text{ и } b=-1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\leq -1 \\ b\leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a\leq 3 \\ b\leq -1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} a\leq 3 \\ b\leq 1 \end{cases}$

Ответ: $a \in \left[\frac{3}{2}; 3\right]$ и $b \in \left[-\frac{1}{4}; 1\right]$

№7

Распишем

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

Любое число можно разложить на простые множители.

Заметим, что ; т.к. $f(ab) = f(a) + f(b)$

$$f\left(\frac{21}{3}\right) = f(7) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f(21) \Rightarrow$$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = -f(3)$, если проделать эту же модель с остальными, то

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) \Rightarrow f(\text{дробного} < 1) < 0$$

Переберём все возможные дроби, чтобы найти все $(x;y)$, получим:

Ответ:

(1;2) (1;3) (1;4) (1;5) (1;6) (1;7) (1;8) (1;9) (1;10); (1;11) (1;12) (1;13) (1;14) (1;15) (1;16) (1;17) (1;18) (1;19) (1;20) (1;21) (3;4) (2;5) (3;5) (2;7) (5;8) (4;7) (5;7) (5;6) (2;9) (4;9) (5;9) (6;9) и тд

Таким способом можно проверить все x и y

☐ черновик ☑ чистовик Страница №8

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f\left(\frac{14}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(14) = f(7)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(7) - f(7) = -f(2)$

$f\left(\frac{12}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) + f(12) = f(3)$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = f(3) - f(3) - f(4) = -f(4) = -2$

$f\left(\frac{21}{1}\right) = f(1) + f(21) = f(3) + f(7) \geq 0$

$f\left(\frac{12}{4}\right) = -f(4) + f(12) = -2f(2) +$

$f($дроби$)$ будет < 0

$f\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}; \frac{1}{6}; \frac{2}{6}; \frac{3}{6}; \frac{4}{6}; \frac{5}{6};\right.$

$\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}; \frac{4}{7}; \frac{5}{7}; \frac{6}{7}; \frac{3}{8}; \frac{5}{8}; \frac{7}{8}; \frac{2}{9} -$)

$f\left(\frac{12}{7}\right) = f\left(\frac{1}{7}\right) + f(12) = -f(7) + f(3) + f(4) - 2 = 0$

4   1   2

всегда можем представить -3 в виде дроби

$f\left(\frac{11}{7}\right) = -3 + 5$

$f\left(\frac{10}{7}\right) = -3 + 1 + 2$

$2 \cdot 1 - 3 \cdot 3$

$f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

$f\left(\frac{1}{3}\right.$

$f(2) + f\left(\frac{1}{3}\right)$

$= f(2) - f(3)$

$1 \quad 1$

$f(3) - 2f(2)$

$= 2 - 2 \cdot 1$

$f(3)^2$

$f(1) = f\left(\frac{21}{21}\right) =$

$= f(21) + f\left(\frac{1}{21}\right)$

$= f(3) + f(7) + f\left(\frac{1}{21}\right)$

$f\left(\frac{4}{3}\right) =$

$= -f(3) +$

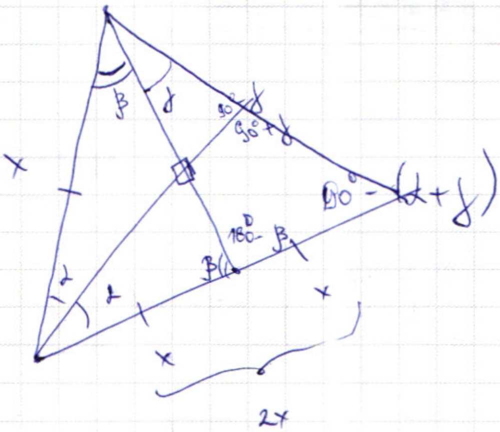
$+2f(2) =$

$= -2 + 2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№2 $P=1200$



$\alpha+\beta=90^\circ$

$180^\circ-90^\circ-\gamma-\alpha=180^\circ-(\alpha+\gamma)$

$180^\circ-90^\circ-\gamma$

$\begin{array}{r}1200\\-603\\\hline 597\end{array}$

$P=1200$

Если $x=1$, то $2x=2$ $a=1200-3$

Если $x=2$, то $2x=4$ $a=1200-6$

Если $x=3$, то $2x=6$ $a=1200-9$

$\begin{array}{r}598\\+299\\\hline 897\end{array}$

. . .

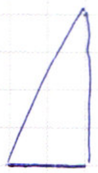
$x=399$, то $2x=798$ $\Rightarrow a=3$

Если $1200|\frac{3}{400}$ $x=400$, то $2x=800$ $\Rightarrow a=0$

$\begin{array}{r}1200\\-897\\\hline 303\end{array}$

$\begin{array}{r}\times 399\\2\\\hline 798\\+399\\\hline 1197\end{array}$

~~Ответ: 399 треугольников.~~



$\begin{cases}x+2x\geq a \Rightarrow 3x>a \\ x+a\geq 2x \Rightarrow a\geq x \\ 2x+a\geq x \Rightarrow a\geq -x\end{cases}$

$3x\geq a$

$1200-3x>x$

$1200>4x$

$300>x$

$1200>2x$

$6x\geq 1200$

$a=1200-3x$ $600>x$

$x=\geq 200$

$1200|\frac{3}{}$

1 Если $x=200$, то $2x=400$, $a=600$

$x=201$

$x=209$

101 Если $x=300$, то $2x=600$, $a=300$

Ответ: 99 треугольников

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

k

$$\begin{cases} t-2k = \sqrt{tk} \\ t^2+k^2 - 3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2-5tk+4k^2=0 \\ t^2+k^2-3=0 \end{cases}$$

$$y-2-2(x-1)=\sqrt{yx-y-2x+2} = y-2x$$

$$y^2-4y+4+2x^2-4x+2-3=0$$

$$y^2+2x^2-4y-4x+3=0$$

$$t=\frac{\frac{1}{3}+3}{5\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}} = \frac{4\sqrt{6}}{3\cdot 5}$$

$$t=\frac{2+3}{5}=1$$

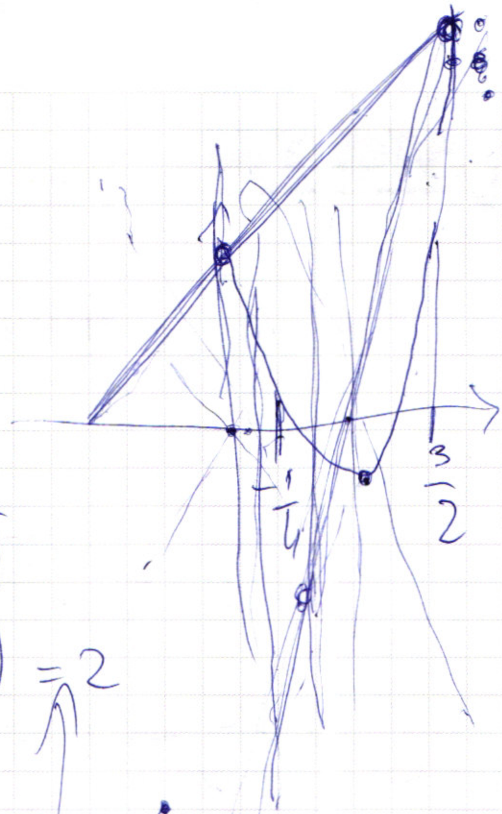
№6

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ a\cdot\frac{3}{2}+b= \right. \\ \left\{ \right. \end{array}\right.$$

$2\cdot\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right.$

$\left(-\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{1}{2}$

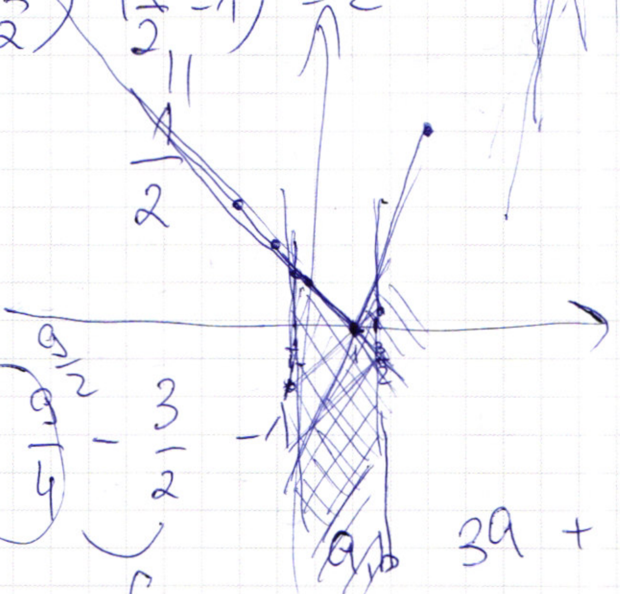
$\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{5}{8}$



$2\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)=2$

1) $x<\frac{1}{2}$ $1-x$ $\quad 2 \quad \frac{1}{2}$

2) $3x-1$ $x\geq\frac{1}{2}$



$\frac{3\cdot 3}{2}-1=\frac{9-2}{2}=\frac{7}{2}$

№2 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-f(2)$

$1-\frac{1}{2}$

$2\cdot\frac{9}{4}-\frac{3}{2}-1$

a, b $\quad 3a+2b=4$

$a=\frac{4-1}{2}=\frac{3\cdot 1}{2}$ $\quad 3$

$-\frac{1}{2}+b=\frac{1}{2}$ $\quad 1{,}5-1=0{,}5$ $\quad \frac{6}{2}$

$\frac{a}{2}+\frac{a}{4}=\frac{1}{2}-\frac{5}{4}$

$$+\left\{\begin{array}{l} \frac{9}{2}+2b=\frac{5}{4} \\ 3a+2b=4 \end{array}\right.$$

$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\frac{2a+a}{\cancel{4}}=-\frac{3}{\cancel{4}}$

$b=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$

$3a+\frac{a}{2}=\frac{5}{4}+4$

$3a=-3$ $\quad a=-1$

$3\cdot 1-1=2$

$\frac{7a}{2}=\frac{21}{4}$

$\frac{3}{2}\cdot 3+2b=4$

$a=\frac{\cancel{21}^{3}\cdot\cancel{2}}{_{2}\cancel{4}\cdot\cancel{7}}=\frac{3}{2}$

$2b=4-\frac{9}{2}=-\frac{1}{2}$

$b=-\frac{1}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№3 $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$

$\cdot 10$
$-\frac{75}{18}$
57

$(y-2x)^2=y^2-4xy+4x^2$

$-(x+2)^2=-x^2-4x-4$

$\cancel{+(y+}$

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{x(y-2)-(y-2)}=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ \end{cases}$

$t=\frac{\frac{2\cdot 1}{6}+3}{}$

$\frac{12}{5}=\frac{24}{10}$

$5\cdot\frac{1}{\sqrt6}\underbrace{(y-2)}_{t}\cancel{+}\underbrace{(2x-2)}_{2k}=\sqrt{tk}$

$-\frac{75}{12}$
63

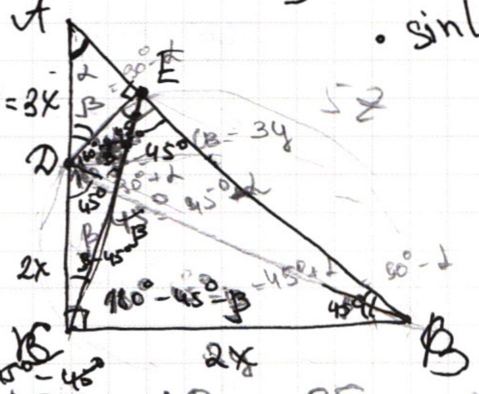
$2x^2-2x+2+y^2-4y+4=2k^2+t^2-3=0$

$S=DE\cdot CD\cdot\sin(180^\circ-\beta)$ ‖ $\sin\beta$

№4 $\operatorname{tg} BAC$ -? $=\frac{BC}{AC}$

$\angle CED=45^\circ$

$\frac{AD}{Ac}=\frac{3}{2}$ $\frac{AD}{AC}=\frac{3}{5}$



$3\cdot\frac{\sqrt{29}}{3}=3x$

$\sqrt{29}=$

$180^\circ-\beta+45^\circ-45^\circ$

$x=\cancel{180}-\cancel{180}+\beta-45^\circ=\beta-45^\circ$

$\frac{AE}{Ac}=\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{CB}$

$180^\circ-90^\circ-45^\circ-\alpha=45^\circ-\alpha$

$\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}$ $\frac{BC}{AB}=\frac{DE}{AD}$

$180^\circ-45+45^\circ-\alpha-\beta$

$DE=AD\cdot\sin\alpha$

$\frac{BC}{\Lambda}$ $\frac{DE}{CB}=\frac{AE}{AC}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 a, b, c - члены гем. прогрес.

$\underbrace{2+4+4}_{10}+\underbrace{5+5+5+5}_{20}$ ~~1~~, ~~2~~, 3, ~~4~~, ~~5~~, 6, 7

корень $ax^2+2bx+c=0$ - четвертый член

$c-? = aq^2$

$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3 = x$

$a\cdot(aq^3)^2 + 2\cdot aq\cdot aq^3 + aq^2 = 0$

$a^3q^6 + 2a^2q^4 + aq^2 = 0 \quad | : a : q^2$

$a^2q^4 + 2aq^2 + 1 = 0$

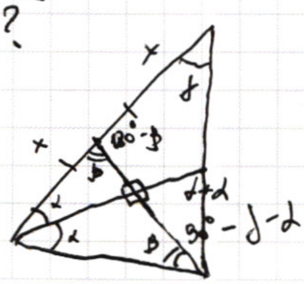
$aq^2 = t$

$t^2 + 2t + 1 = 0$

$(t+1)^2 = 0$

$t = \underline{-1} \Rightarrow aq^2 = \underline{-1} = c$

№2 $P = 1200$ кол-во треугольников с целочисленными сторонами?



$2\alpha + \underbrace{\gamma + \beta}_{90^\circ} + x = 180^\circ$

$x = 180^\circ - 90^\circ - \gamma - \alpha = 90^\circ - \gamma - \alpha$

$180^\circ - \beta + \cancel{\gamma} + 90^\circ - \cancel{\gamma} - \alpha = 180^\circ$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 AB - диаметр

r, R - ?

$S_{\square BACE}$ - ?

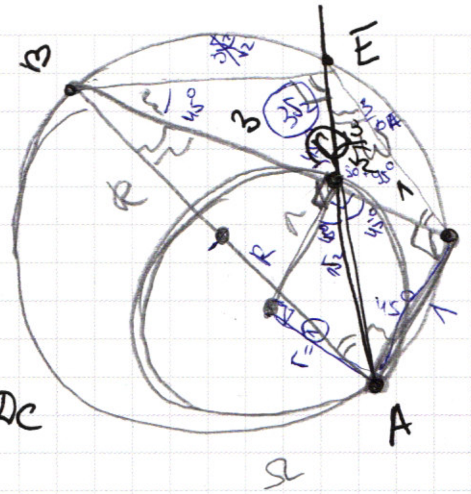
CD = 1

BD = 3

$\frac{ED}{DA} = \frac{BD}{AD}$

$ED \cdot AD = BD \cdot DC$

$ED \cdot DA = 3$

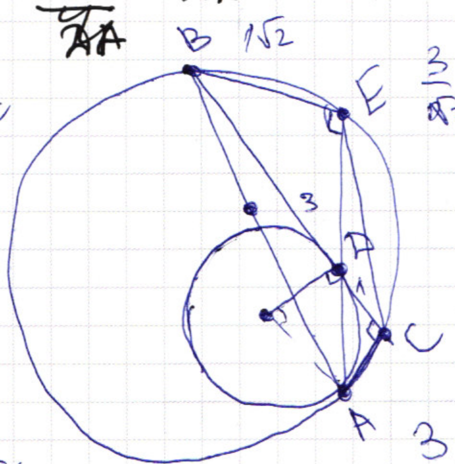


r = 1

$\frac{9}{2}+\frac{9}{2}=x$

$\frac{18}{2}=x$

2R =



$\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = DE$

$\frac{x}{1} = \frac{3}{y}$

$ED = \frac{3}{DA}$

$(AE - DA)\,DA = 3$

EC =

$S = ab \cdot \sin\alpha$

$\frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$

$(2R)^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right)^2 = \frac{9}{2} + \frac{25}{2}$

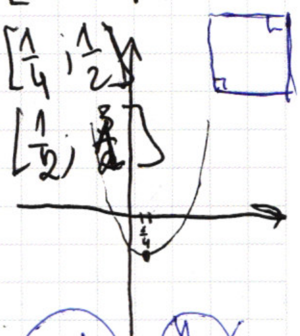
$4R^2 = \frac{34}{8}$

$R = \sqrt{\frac{34}{8}}$

1) $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$

2) $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$

3) $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$



$x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$

№6 (a; b) − ?

$2x^2 - x - x \le ax + b \le x + |2x - 1|$

$-\frac{1}{4}$ $\quad \frac{1}{2} \ge x$ $\quad \frac{3}{2}$

$x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

$2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1) \le ax + b \le 3x - 1$

$2x^2 - x - 1 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$

$x = \frac{1 \pm 3}{4} = -\frac{1}{2}; 1$ $\quad x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$, $y \le 0$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$

$2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{2}{8} - 1 = \frac{1-10}{8} = -\frac{9}{8}$

$2x - 1 \ge 0$

$x \ge \frac{1}{2}$

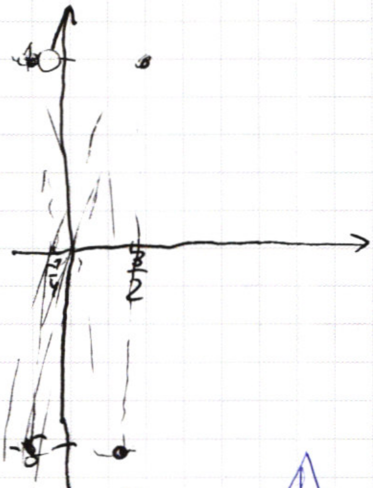
$1 - x$, если $x < \frac{1}{2}$

$2\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)^{2}\left(-\frac{1}{4}-1\right) \le ax+b \le 1-\left(-\frac{1}{4}\right)$

$2\left(\frac{2-1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5}{4}\right) \le ax+b \le \frac{5}{4}$

$-\frac{5}{8} \le 8ax+b \le \frac{5}{4}$

$-5 \le 8ax+8b \le 10$

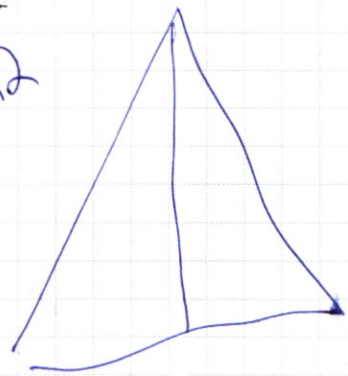


$\begin{cases} a\cdot\cancel{4}+b=10 \\ a\cdot\frac{3}{2}+b=5 \end{cases}$

$\frac{2\cdot 9}{42}-\frac{3}{2}-1$

$\frac{3}{2}+\left|\frac{2\cdot\frac{3}{2}}{2}-2\right|\frac{6}{12}-1=2\frac{1}{2}$ absind

$2 \le ax+b \le \frac{7}{2} \le 3{,}5$



№7 $f(x)\in R$ $\cancel{x\in R}$ a, b

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $f(p)=[p/2]$ p-простые

$[x]$

$\frac{p}{2}=3{,}5$ $(x;y)-?$ $1\le x\le 21$ $1\le y\le 21$ и $f(x/y)<0$

$[\frac{p}{2}]=3$ $a=\frac{1}{b^2}$ $b=\frac{1}{y}$ $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$a=1$ $b=x$ $f(3)=f(1)+f(3)$ $f(3)=[\frac{3}{2}]=1$

$f(2)=1$ $f(5)=2$ $f\left(\frac{21}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)+f(21)=$

$=f(7)=3$ $f\left(\frac{1}{3}\right)+f(3\cdot 7)=f(7)$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=f(7)-f(3)-f(3\cdot 7)=-f(3)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)