МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2+2bx+c=0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}, \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD:AC=3:5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED=45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC=\sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD=1$, $BD=3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$2x^2-x-1 \leqslant ax+b \leqslant x+|2x-1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

a, b, c – геом прогрессия

$b_4 = \left[\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array}\right.$, где x_1, x_2 – корни $ax^2+2bx+c=0$

$c - ?$

$b = q\cdot a$, где q – шаг прогрессии

$c = q\cdot b = q^2\cdot a$

$b_4 = q\cdot c = q^2\cdot b = q^3\cdot a$

$ax^2+2bx+c=0$

$\frac{D}{4} = b^2 - ac = q^2a^2 - q^2a\cdot a = 0$

~~$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{a}$~~

~~$1)\ b_4 = x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{a}$~~

~~$a\cdot q\cdot c = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{1}$~~

~~$a\cdot q\cdot q^2a = -q\cdot a + \sqrt{q^2a^2-4\cdot a\cdot q^2a} =$~~

~~$= -qa + \sqrt{-3q^2a^2}$~~

$b_4 = x = \frac{-b}{a} = q^3a = q^2b$

$-1 = q^2a = c$

Ответ: третий член равен -1

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} & (1)\\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 & (2)\end{cases}$$

(2) $(y-2)^2+2(x^2-2x+1)+1-4=0$

$(y-2)^2+2(x-1)^2+1=0+4$

(1) $y-2x=\sqrt{x(y-2)-(y-2)}$

$y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)}$

$(y-2)-2(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-2)}$

Пусть $a=y-2$

$b=x-1$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab}\\ a^2+2b^2-3=0\end{cases} \overset{\text{с уч. ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab\\ a^2+2b^2-3=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+4b^2=5ab\\ a^2+2b^2=3\end{cases} \Rightarrow a=\sqrt{3-2b^2}$$

$3-2b^2+4b^2=5b\sqrt{3-2b^2}$

$3+2b^2=5b\sqrt{3-2b^2}$

$9+4b^4+12b^2=25b^2(3-2b^2)$

$9+4b^4+12b^2=75b^2-50b^4$

$54b^4-63b^2+9=0$

$28b^4-21b^2+3=0$

$b^4=k$

~~см лист~~

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.1

$$\begin{cases}(y-1)-2x+2-1=\sqrt{x(y-1)-2x+2}=\sqrt{xy-2x-y+2}\\ 2(x^2-2x+1)-2+y^2-4x+4-4+3=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(y-2)-2(x-1)=\sqrt{x(y-1)-2(x-1)}=\\ \qquad=\sqrt{x(y-2)-1(y-2)}=\sqrt{(x-1)(y-2)}\ (1)\\ 2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0\ (2)\end{cases}$$

$$(2)\ (y-2)^2+2(x-1)^2-4(x-1)^2+4(x-1)^2=3$$

$$\big((y-2)-2(x-1)\big)\big((y-2)+2(x-1)\big)+4(x-1)^2=3$$

Пусть

$a=y-2$

$b=x-1$

$$\begin{cases}a-2b=\sqrt{ab}\\ a^2+2b^2=3\end{cases}$$

$$\cancel{a(a+1)+2b(b-1)=3+\sqrt{ab}}$$

$$\cancel{a=\sqrt{3-2b^2}}$$

$$\cancel{\sqrt{3-2b^2}-2b=\sqrt{b}\cdot\sqrt[4]{3-2b^2}}$$

$$\cancel{a^2-2b^2+4b^2=3}$$

$\cancel{a+b=u}$

$\cancel{\sqrt{ab}=v}$

$$\begin{cases}a^2+4b^2=5ab\\ a^2+2b^2=3\end{cases}$$

$$2a^2+6b^2=3+5ab$$

$$2a^2+6b^2-5ab=3$$

$$a^2+(2b)^2+4ab+a^2+2b^2-9ab=3$$

№3.2

$$\begin{cases}(a+2b)^2+a^2+2b^2-9ab=3\\ a^2+2b^2=3\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+2b=3\sqrt{ab}\\ a-2b=\sqrt{ab}\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}a+2b=-3\sqrt{ab}\\ a-2b=\sqrt{ab}\end{cases}$$

$2a=4\sqrt{ab}$

$a=2\sqrt{ab}$

$a^2=4ab$

$a=4b$

$16b^2+2b^2=3$

$18b^2=3$

$b^2=6 \qquad b=\pm\sqrt{6}$

$$\left[\begin{array}{l}a=4\sqrt{6}\\ a=-4\sqrt{6} \text{ не уд. } a=2\sqrt{ab}\end{array}\right.$$

$2a=-2\sqrt{ab} \qquad a<0$

$a^2=ab$

$a=b \Rightarrow b<0$

$b^2+2b^2=3$

$b=-1$

$$\Rightarrow \begin{cases}y-2=-1\\ x-1=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=1\\ x=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4\sqrt{6}=y-2\\ \cancel{\sqrt{6}=x-1}\\ \sqrt{6}=x-1\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l}y=2+4\sqrt{6}\\ \cancel{x=1+\sqrt{6}}\\ x=1+\sqrt{6}\end{array}\\ \cancel{\begin{cases}-4\sqrt{6}=y-2\\ -\sqrt{6}=x-1\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l}y=2-4\sqrt{6}\\ x=1-\sqrt{6}\end{array}}\end{array}\right.$$

~~Ответ:~~ $\cancel{\left[\begin{array}{l}y=2+4 \quad (1+\sqrt{6};\ 2+4\sqrt{6})\\ (1-\sqrt{6};\ 2-4\sqrt{6})\end{array}\right.}$

ОДЗ: $y-2x\geq 0$

$(x-1)(y-2)\geq 0$

1) $2+4\sqrt{6}-2-2\sqrt{6}\geq 0$

2) $2-4\sqrt{6}-2+2\sqrt{6}\leq 0$ не уд.

Ответ: $(1+\sqrt{6};\ 2+4\sqrt{6})$, $(0;1)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

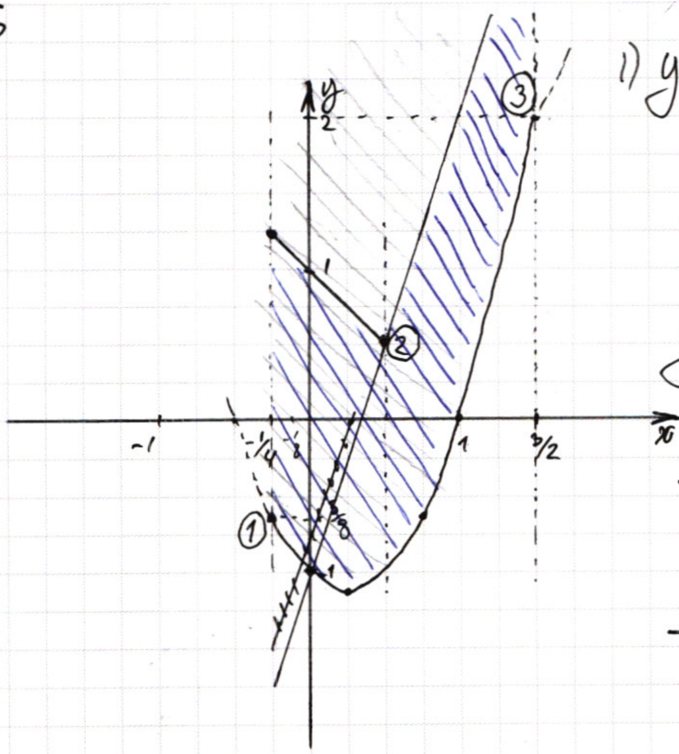
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6



1) $y = 2x^2 - x - 1$

$x_в = \frac{1}{4}$

~~$y_в = \frac{2}{16} - \frac{4}{4\cdot 4} - 1 = -\frac{1}{8} - 1 = \frac{9}{8}$~~

$y_в = \frac{2}{16} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{2-4}{16} - \frac{16}{16} =$

$= \frac{-2-16}{16} = \frac{-18}{16} = -\frac{9}{8}$

$x_1 = 1$

$x_2 = -\frac{1}{2}$ корни $2x^2 - x - 1$

$x = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{3-8}{8} = -\frac{5}{8}$

$x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{2\cdot 9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{6}{2} - 1 = 2$

2) $y = x + |2x - 1|$

$2x - 1 \geq 0$

$x \geq \frac{1}{2}$

$y = 3x - 1$

$x = \frac{3}{2}$

$y = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$

$2x - 1 < 0$

$x < \frac{1}{2}$

$y = -x + 1$

$x = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{4}$

~~Пусть $\begin{cases} ax + b < 1 \\ a(-\frac{1}{4}) + b \geq -\frac{5}{8} \\ \frac{3}{2}a + b \geq 2 \end{cases}$, тогда~~

~~$\begin{cases} ax + b < 1 \\ \frac{5}{4}a + 2b \geq \frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + b < 1 \\ 10a + 16b \geq 3 \end{cases}$~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№6 Если прямая $ax+в$ будет проходить только через одну из точек ①, ②, ③, то тогда не будет выполняться условие $\Rightarrow \exists$ 3 случая

1) через ①, ②

$$\begin{cases} a+в=1 \\ -\frac{1}{4}a+в=-\frac{5}{8} \end{cases}$$

$$\frac{5}{4}a = 1+\frac{5}{8} = \frac{13}{8}$$

$$2\cdot 5a = 13$$

$$a=\frac{13}{10} \Rightarrow в = -\frac{3}{10}$$

2) через ②, ③

$$\begin{cases} a+в=1 \\ \frac{3}{2}a+в=2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}a=1$$

$$a=2 \Rightarrow в=-1$$

3) через ③, ①

$$\begin{cases} \frac{3}{2}a+в=2 \\ -\frac{1}{4}a+в=-\frac{5}{8} \end{cases}$$

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right)a = 2+\frac{5}{8} = \cancel{\frac{13}{}}\ \frac{16+5}{8} = \frac{21}{8}$$

$$\frac{7}{4}a = \frac{21}{8}$$

$$a=\frac{21}{14} \Rightarrow в = 2-\frac{3}{2}\cdot\frac{21}{14} = \frac{28\cdot 2-63}{28} = \frac{56-63}{28} = \frac{-7}{28} = -\frac{1}{4}$$

$\boxed{\text{Ответ: } (a=21/14;\ в=-\tfrac{1}{4});\ (a=2;\ в=-1);\ (a=13/10;\ в=-\tfrac{3}{10})}$

№7

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f\left(\frac{a}{b}\cdot b\right) = f\left(\frac{a}{b}\right) + f(b) \Rightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$

кол-во $f(x)$ с таким значением

1	2	4	6	4	1	1	1	1
0	1	2	3	4	5	6	8	9

знач $f(x)$

$f(1\cdot 2) = f(1) + f(2) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(2) = [\,2/2\,] = 1$

$f(3) = 1$

$f(4) = 2$

$f(5) = 2$

$f(6) = 2$

$f(7) = 3$

$f(8) = f(4) + f(2) = 3$

$f(9) = f(3) + f(3) = 2$ $\qquad f(10) = 3$

$f(11) = 5$

$f(12) = f(3) + f(4) = f(2) + f(6) = 3$

$f(13) = 6$

$f(14) = f(7) + f(2) = 4$

$f(15) = f(3) + f(5) = 3$

$f(16) = f(4) + f(4) = 4$

$f(17) = 8$

$f(18) = f(3) + f(6) = f(2) + f(9) = 3$

$f(19) = 9$

$f(20) = f(4) + f(5) = f(2) + f(10) = 4$

$f(21) = f(3) + f(7) = 4$

$f(1)=0$
$f(2)=1$
$f(3)=1$
$f(4)=2$
$f(5)=2$
$f(6)=2$
$f(7)=3$
$f(8)=3$
$f(9)=2$
$f(10)=3$
$f(11)=5$
$f(12)=3$
$f(13)=6$
$f(14)=4$
$f(15)=3$
$f(16)=4$
$f(17)=8$
$f(18)=3$
$f(19)=9$
$f(20)=4$
$f(21)=4$

По условию $f\left(\frac{a}{b}\right) < 0 \Rightarrow f(a) < f(b)$

$f(x) = 0 \Rightarrow$ для $f(y)$ 20 вар $\Rightarrow$ 20

$f(x) = 1 \Rightarrow$ для $f(y)$ $21 - 1 - 2 = 18$ вар $\Rightarrow 18\cdot 2 =$ 36

$f(x) = 2 \Rightarrow f(y)$: $21 - 1 - 2 - 4 = 14$ вар $\Rightarrow 14\cdot 4 =$ 56

$f(x) = 3 \Rightarrow f(y)$: $14 - 6 = 8$ вар $\Rightarrow 8\cdot 6 =$ 48

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

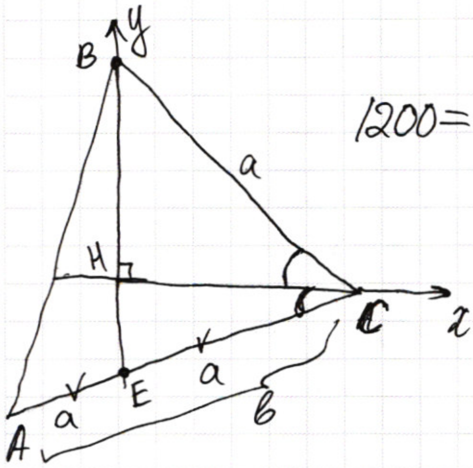
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$P = 1200 \Leftrightarrow a + b + c = 1200 \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$

$b = 2a$ 1) т.к. в $\triangle BCE$ CH – высота и биссект $\Rightarrow$
$\Rightarrow BC = EC$.
2) в $\triangle ABC$ $AE = EC$ по усл.

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + c = 1200 \\ \left[\begin{array}{l} c < 3a \\ 2a + c > a \Leftrightarrow a + c \geq 0 \\ a + c > 2a \Leftrightarrow c > a \end{array}\right. \end{cases}$$



$1200 = 3a + c \leq 6a$

$a \geq 200$

$c \geq$ 200

$a = 200 \Rightarrow c = 600$ не уд

$1200 = 3a + c > 2c$

$c < 600$

Итого $\begin{cases} a \geq 201 \\ c \leq 599 \\ a < c \end{cases} \Leftrightarrow$ ~~$\begin{cases} a \geq 201 \\ a \leq \left(\frac{1200-599}{3}\right) \end{cases}$~~

~~Для каждого a $\exists!$ c~~

~~$598 - 201 + 1 = 398 \Rightarrow \triangle$ 398 штук~~

~~Ответ: 398~~

~~$\begin{cases} a \geq 201 \\ a \leq \frac{601}{3} \end{cases}$~~ ~~$\begin{cases} a \geq 201 \\ a \leq 200 \end{cases}$~~

Для каждого c $\exists!$ a

$\begin{cases} c \geq 202 \\ c \leq 599 \\ (1200 - c) ⋮ 3 \end{cases} \Rightarrow$ ~~$N = 599 - 202 + 1 = 398$~~

N кол-во чисел от 204 до 597 $⋮ 3$

их $199 - 68 + 1 = 132 \Rightarrow$ треуг 132

~~Ответ: 398~~

Ответ: 132 треугольника

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 $f(x)=4 \Rightarrow f(y): 8-4=4$ вар $\Rightarrow 4\cdot 4 = 16$

$f(x)=5 \Rightarrow f(y): 4-1=3$ вар $\Rightarrow 3$

$f(x)=6 \Rightarrow f(y): 3-1=2$ вар $\Rightarrow 2$

$f(x)=8 \Rightarrow f(y): 2-1=1$ вар $\Rightarrow 1$

$f(x)=9 \Rightarrow f(y) = 1-1=0$ вар

Итого вариантов

$20+36+56+48+16+3+2+1=$

$=56\cdot 2+64+6=112+70=182$

Ответ: 182 пары натуральных (x, y)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

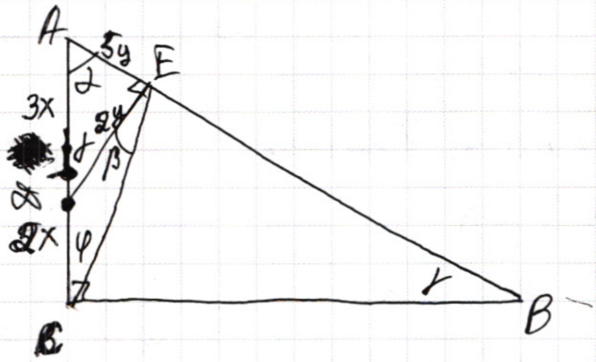
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



$tg\alpha - ?$

$\angle CED = \beta = 45^\circ$

$S_{CED} - ?$

$AC = \sqrt{29}$

а) $\sin\alpha = \dfrac{DE}{3x}$

$\varphi = 180 - 135 - \alpha = 45 - \alpha$

По т. синусов для $\triangle DCE$

$$\frac{DE}{\underbrace{\sin 180 - (45 + 90 + \alpha)}_{\sin\varphi}} = \frac{2x}{\sin 45^\circ} = \frac{2x}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}x$$

$$tg\alpha = \frac{DE}{AE}$$

По т. синусов для $\triangle AEC$

$$\frac{AE}{\sin\varphi} = \frac{AC}{\sin 135^\circ} = \frac{5x}{\sin 45^\circ}$$

$$DE = \sqrt{2}x \cdot \sin\varphi = \sin\varphi \cdot 2x / \sin 45^\circ$$

$$AE = 5x \cdot \sin\varphi \,/\, \sin 45^\circ$$

а) $\boxed{tg\alpha = \dfrac{DE}{AE} = \dfrac{2}{5}}$ $\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{29}} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$

из $\triangle DAE$ $\sin\gamma = \cos\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$

б) $S_{CED} = \frac{1}{2} DE \cdot DC \cdot \sin(-\gamma + 180) = \frac{1}{2} DE \cdot DC \cdot \sin\gamma$

$AC = \sqrt{29} \Rightarrow AD = \dfrac{3\sqrt{29}}{5} \Rightarrow DE = AD \cdot \cancel{\cos} \sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{29}}{5} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{29}} = \dfrac{4}{5} = \dfrac{4}{5}$

$DC = \dfrac{2\sqrt{29}}{5}$

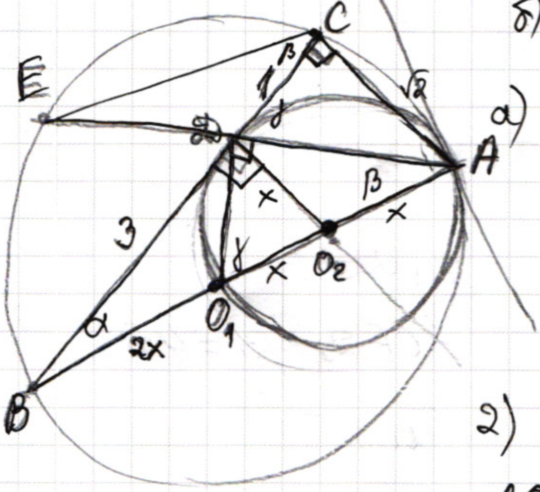
$\Rightarrow S_{CED} = \dfrac{1}{2} \dfrac{2\sqrt{29}}{5} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{5}{\sqrt{29}} = \dfrac{8}{2 \cdot 5} = \dfrac{4}{5}$

$\boxed{\text{Ответ: а) } tg\alpha = 2/5 \quad \text{б) } S_{CED} = 4/5}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№5



а) $r = r_\omega - ?$; $R = R_\Omega - ?$

б) $S_{BACE} - ?$

а) 1) Проведу общую касат. (ℓ) в т. A

$O_2A \perp \ell$

$O_1A \perp \ell$ $\Rightarrow O_1, O_2$ на 1 прям

2) по т. Фалеса

$AO_2 = x$

$O_2B = 3x$

~~т.к.~~ $BO_1 = 2x$ т.к. BO_1 – радиус $\Rightarrow O_1O_2 = r$

~~3) $ƊO_1 = ƊA$ т.к. $ƊO_2$~~

$ƊO_2 = x = r \Rightarrow \sin\alpha = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\Rightarrow 2R\cos\alpha = 4$

$\boxed{R = \frac{2}{\cos\alpha} = \frac{2\cdot 3}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}}$

$\Rightarrow R = 2x \Rightarrow R = 2r \Rightarrow \boxed{r = \frac{3}{4}\sqrt{2}}$

б) 1) $CA = 2R\cdot\sin\alpha = 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3} = \sqrt{2}$ $\quad S_{BACE} = S_{BCA} + S_{ECB}$

$\Rightarrow S_{BCA} = \frac{1}{2}CA\cdot BC = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$S_{EBC} = \frac{1}{2}EC\cdot CB\cdot\sin\beta$

$\sin\beta = \cos\gamma = \cos(\angle ƊO_1A)$

$tg\,\gamma = \frac{\sqrt{2}}{1} \Rightarrow \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$S_{EBC} = \frac{1}{2}EC\cdot 4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot EC$

Ответ:
а) $R = \frac{3}{2}\sqrt{2}$
$r = \frac{3}{4}\sqrt{2}$
б) $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$

2) $\frac{EC}{AB} = \frac{ƊC}{ƊA}$; $ƊA = 2r\cdot\cos\beta = 2r\cdot\sin\gamma = \frac{2\cdot 3}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow EC = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6} \Rightarrow S_{EBC} = 2\sqrt{2} \Rightarrow S_{BACE} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \boxed{4\sqrt{2}}$

№6.1

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$

$2x - 1 \ge 0$ $\qquad$ $2x^2 - x - 1 = 2(x + \frac{1}{2})(x - 1)$

$x \ge \frac{1}{2}$ $\qquad$ $+ \quad -\frac{1}{2} \quad - \quad 1 \quad +$

1) $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x - 2x + 1$

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le -x + 1$

2) $x \in (+\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le 3x - 1$

$2x^2 - x - 1 = f(x)$

$x_в = \frac{1}{4}$

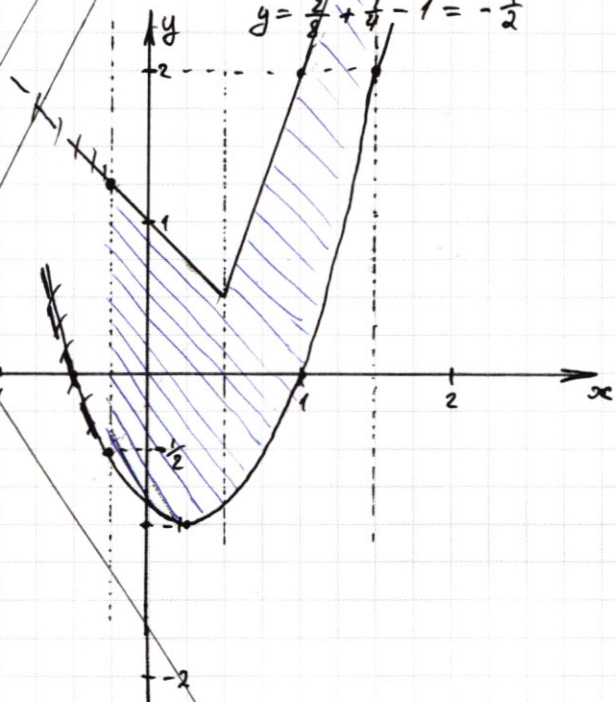
$y_в = \frac{2}{8} - \frac{1}{4} - 1$

$x = \frac{3}{2}$

$y = 2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = 3 - 1 = 2$

$x = -\frac{1}{4}$

$y = \frac{2}{8} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$



В крайних точках должно работать:

$$\begin{cases} \cancel{2x} - \frac{1}{2} \le -a\frac{1}{4} + b \le \frac{5}{4} \\ 2 \le a\frac{3}{2} + b \le \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \le -\frac{1}{4}a + b \\ -\frac{1}{4}a + b \le \frac{5}{4} \\ 2 \le a \cdot \frac{3}{2} + b \\ a \cdot \frac{3}{2} + b \le \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}a + \cancel{b} + 2 \le \frac{5}{4} + a \cdot \frac{3}{2} + \cancel{b} \\ \frac{3}{4} \le \frac{7}{4}a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}a + b = -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}a + b = 2 \end{cases}$$

$\frac{7}{4}a = \frac{5}{2}$

$\boxed{a = \frac{10}{7}} \Rightarrow b = 2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{25}{7} = \cancel{\frac{14 - 15}{7}} = -\frac{7}{14} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

$\cancel{+\frac{5}{7} - \frac{1}{2} < 1}$

$\cancel{\frac{10 - 7}{14} < 1}$

$b = 2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{10}{7} = \frac{14 - 15}{7} = -\frac{1}{7}$

$\frac{10}{7} - \frac{1}{7} > 1$ не уд.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$28k^2-21k+3=0$

$D=441-4\cdot28\cdot3=-336+441=$

$=195$

$\times\frac{12}{28}$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 12 \\ \hline 56 \\ 28 \\ \hline 336 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 21 \\ \times 21 \\ \hline 21 \\ 42 \\ \hline 441 \\ -336 \\ \hline 195 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 195 & 5 \\ 39 & 3 \\ 13 & \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№7

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad 1 \le x \le 21 \quad 1 \le y \le 21 \quad f(x/y) < 0$

$f(p) = [p/2]$

1) $x = 1$

$y = 2$

$f(2) = f(1) + f(2) \Rightarrow \boxed{f(1) = 0} \Rightarrow \boxed{21 \text{ пара}}$

$f(2) = 1$ $\quad f(4) = 2$

$f(3) = 1$ $\quad f(6) = 2$

$f(5) = 2$ $\quad f(7) = 3$ $\quad f(10) = 3$

$f(6) = 2$ $\quad f(20) = 4$

$f\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) = 0$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = -f\left(\frac{2}{3}\right)$

$f\left(\frac{a}{b}\right) = -f\left(\frac{b}{a}\right)$

$f\left(\frac{3}{2} \cdot 2\right) = f(3) = 1 = f(2) + f\left(\frac{3}{2}\right)$

$f\left(\frac{3}{5} \cdot 5\right) = f(3) = 1 = f\left(\frac{3}{5}\right) + f(5) \Rightarrow f\left(\frac{3}{5}\right) = -1$

$\Rightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b) < 0 \Rightarrow f(a) < f(b)$

от $p_1 < p_2$, простых

$f(p_i) = f(p_1)$

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 3 & 5 & 7\,11 & 13 & 17 & 19 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \quad \cancel{23}$$

$x \in [1; 3] \Rightarrow y \in [4; 21]$

$x \in [4; 5] \Rightarrow y \in [$

черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.2

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -\frac{1}{4}a+b=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\frac{5}{4}a = \frac{3}{2}$

$a = \frac{6}{5} \Rightarrow b = -\frac{1}{5}$

$\frac{6}{5}\cdot\frac{3}{2} - \frac{1}{5} \wedge 2$

$\frac{18-2}{10} \wedge 2$

$1,6 < 2$ не уд.

$c = 202 \Rightarrow 3a = 998$

$18+8=26$

$c \vdots 3$

$20\cancel{7}$ 204

204 207 210 .... $59\cancel{8}$

$\vdots 3$ $\quad$ $\overset{\shortparallel}{14+8=22}$

68 $\quad$ 199

$597 \,|\, 3$ = 199; -3, 29, -27

$199-68+1 = 200-68 = 132$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)