МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[2 балла]** Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. **[4 балла]** Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. **[5 баллов]** а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① Дано:

$b_1 = a$; $b_2 = b$

$b_3 = c$; $b_4 = x_0$

$a x_0^2 - 2 b x_0 + c = 0$

$b_3 - ?$

Решение:

$q = \frac{b_1}{b_2} = \frac{a}{b}; \ q = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b}{c}$

по св-ву геом. прогрессии

$b_2^2 = b_1 \cdot b_3$

$b^2 = a \cdot c$

$b_2 = b_1 q \Rightarrow b = a \cdot \frac{a}{b} \Rightarrow a^2 = b^2$

$$\left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b \end{array}\right.$$

$b = a \cdot \frac{b}{c} \Rightarrow \boxed{c = a}$

$x_0 = b_4 = b_1 q^3 = a \cdot \frac{a^3}{b^3}$

$$\begin{cases} a \cdot \left(\frac{a^3}{b^3}\right)^2 - 2b \cdot \frac{a^3}{b^3} + c = 0 \\ b^2 = ac \\ c = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a^9}{b^6} - 2\frac{a^3}{b^2} + c = 0 \\ b^2 = ac \\ c = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a^9}{(ac)^3} - \frac{2a^3}{ac} + c = 0 \\ c = a \end{cases}$$

$\frac{c^9}{c^6} - \frac{2c^3}{c^2} + c = 0 \Rightarrow c^3 - 2c + c = 0$

$c(c^2 - 2c + 1) = 0$

$c = 0$ или $c^2 - 2c + 1 = 0$

$(c - 1)^2 = 0$

$c = 1$

Ответ: $c = 0$; $c = 1$

③ $\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x-6y=\sqrt{y(x-6)-(x-6)} \\ (x^2-12x+36)-36+2(y^2-2y+1)-2+20=0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-6)^2+2(y-1)^2-18=0 \\ x-6y=\sqrt{(y-1)(x-6)} \end{cases}$

замена $\begin{cases} a=\sqrt{x-6}\geqslant 0 \\ b=\sqrt{y-1}\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a^2=x-6 \\ b^2=y-1 \end{matrix}$

$a^2-6b^2=x-6y$

$\begin{cases} a^4+2b^4-18=0 \quad (1) \\ a^2-6b^2=ab \quad (2) \end{cases}$ $(2)\ a^2-6b^2-ab=(a-3b)(a+2b)$

$D=b^2+24b^2=25b^2$

$\left[\begin{matrix} a_1=3b \\ a_2=-2b \end{matrix}\right.$

$\Rightarrow \begin{cases} a^4+2b^4-18=0 \\ a=3b \end{cases}$ или $\begin{cases} a^4+2b^4-18=0 \\ a=-2b \end{cases}$

$81b^4+2b^4-18=0$ $\qquad 16b^4+2b^4-18=0$

$\left[\begin{matrix} b_1=\sqrt[4]{\frac{18}{83}} \Rightarrow a=3\sqrt[4]{\frac{18}{83}} \\ b_2=-\sqrt[4]{\frac{18}{83}}<0 \Rightarrow \text{неудовл. усл. } b\geqslant 0 \end{matrix}\right.$

$\left[\begin{matrix} b=1 \Rightarrow a=-2<0 \text{ неуд усл. } a\geqslant 0 \\ b=-1<0 \Rightarrow \text{неудовл. усл. } b\geqslant 0 \end{matrix}\right.$

Вернемся к замене

$\sqrt{y-1}=\sqrt[4]{\frac{18}{83}}$ $\qquad \sqrt{x-6}=\sqrt[4]{\frac{18}{83}}$

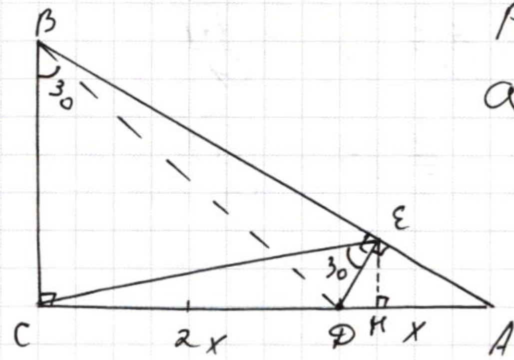
$y-1=\sqrt{\frac{18}{83}}$ $\qquad x-6=\sqrt{\frac{18}{83}}$

$y=1+\sqrt{\frac{18}{83}}$ $\qquad x=6+\sqrt{\frac{18}{83}}$

Ответ: $\left(6+\sqrt{\frac{18}{83}};\ 1+\sqrt{\frac{18}{83}}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

④



Решение:

а) Пусть $CD = 2x$; $AD = x$

Р-м $BEDC$ - описан. чет-ник, т.к. $\angle BED = 90°$

$\angle BCD = 90$

то есть сумма против. углов равна 180°

BD - диаметр. окр. т.к. на BD опирается $\angle BED = 90°$.

$\angle CED = \angle CBD = 30$ т.к. вписанные углы опираются на одну дугу

Р-м $\triangle CBD$ - прям.

$$tg\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow tg \angle CBD = \frac{CD}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$BC = \frac{CD\, 3}{\sqrt{3}} = 2x\sqrt{3}$$

$$tg \angle CAB = \frac{BC}{AC} = \frac{2x\sqrt{3}}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

б) $AC = \sqrt{7} = 3x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow BC = \frac{2}{3}\sqrt{21}$

По т. Пифагора для $\triangle ABC$

$AB^2 = BC^2 + AC^2 \Rightarrow AB = \frac{7}{\sqrt{3}}$

Р-м $\triangle DEA$ и $\triangle ABC$

$$\left.\begin{matrix} \angle A \text{- общий} \\ \angle DEA = \angle BCA = 90 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle DEA \sim \triangle ABC \text{ по двум углам}$$

$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AE = \frac{AC \cdot AD}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Р-м $\triangle ABC$ и $\triangle EAH$ - прямоуг.

$\left.\begin{array}{l} \angle A\text{-общий} \\ \angle BCA = \angle EHA = 90 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle EAH$ по двум углам

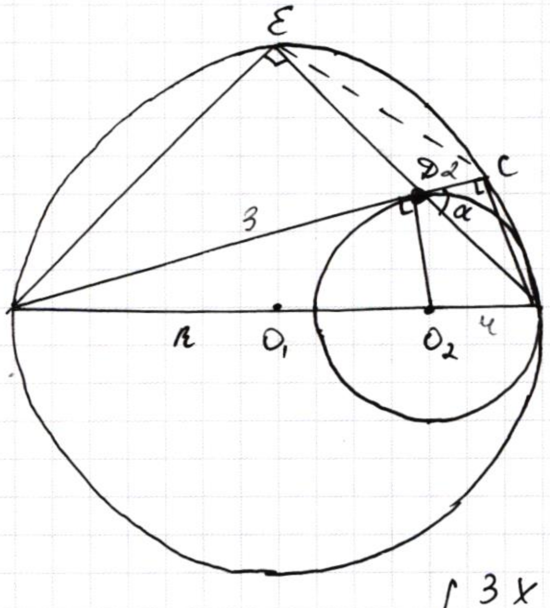
$\frac{HE}{BC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow HE = \frac{BC \cdot AE}{AB} = \frac{2\sqrt{21}}{21}$

$S_{CED} = \frac{1}{2} HE \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{21}}{21} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{7} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{21} \cdot 3} =$ ~~B/~~

$= \frac{2}{3\sqrt{3}}$

Ответ: 1) $tg\, BAC = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ 2) $S = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

⑤



Решение:

Р-м $\triangle BO_2D$ и $\triangle ABC$ - прям

$\left\{\begin{array}{l} \angle CBA\text{-общий} \\ \angle BDO_2 = \angle BCA = 90 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \triangle BDO_2 \sim \triangle ABC$

$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{AB} = \frac{3}{5}; \frac{O_2D}{AC} = \frac{3}{5}$

Пусть $BO_2 = 3x \Rightarrow O_2A = 2x$

$\left\{\begin{array}{l} 3x = R + R - r \\ r = 2x \end{array}\right. \Rightarrow R = \frac{5}{4}r$

Р-м $\triangle BDO_2$ - прямоуг.

по т. Пифагора: $BO_2^2 = BD^2 + O_2D^2$

$\left\{\begin{array}{l} (2R - r)^2 = 9 + r^2 \\ r = \frac{4}{5}R \end{array}\right.$

$4R^2 - \frac{4 \cdot 4}{5}R^2 + r^2 - 9 - r^2 = 0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4R^2 - \frac{16}{5}R^2 = 9$$

$$\frac{\cancel{36}4}{5}R^2 = 9 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{9\cdot 5}{\cancel{36}\,4}} = \frac{3}{\cancel{6}2}\sqrt{5} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{4}{5}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

Ответ: $\boxed{S = \frac{75\sqrt{5}}{12} \quad r = \frac{6\sqrt{5}}{5} \quad R = \frac{3}{2}\sqrt{5}}$

Р-м $\triangle ACD$ - прямоуг.

по т. Пифагора $AD^2 = CD^2 + AC^2 = \cancel{47}$

~~AD~~

$$AC = \frac{5O_2D}{3} = \frac{5}{3}r = \frac{5}{\cancel{3}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{6}}\sqrt{5}}{5} = \cancel{\frac{2}{3}\sqrt{5}}\ 2\sqrt{5}$$

$$AD^2 = 4 + \cancel{\frac{\overset{20}{4}}{9}\cdot 5} = \cancel{\frac{36+20}{9}} = \cancel{\frac{56}{9}} = \cancel{\frac{7\cdot 2^3}{9}}$$

$$AD = \cancel{\frac{2}{3}\sqrt{14}}\ \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

по св-ву пересекающихся хорд AE и BC

$AD\cdot ED = BD\cdot CD$ $\qquad \sin\alpha = \frac{AC}{AD} = \sqrt{\frac{5}{6}}$

$$\boxed{ED = \frac{BD\cdot CD}{AD}} = \cancel{\frac{3\cdot 2}{\frac{2}{3}\sqrt{14}}}\ 2\sqrt{6} = \cancel{\frac{3\cdot\cancel{2}\cdot 3}{2\sqrt{14}}} = \cancel{\frac{9}{\sqrt{14}}}\ \boxed{ED = \frac{3}{\sqrt{6}}}$$

$$\boxed{S_{BACE} = \frac{1}{2}AE\cdot BC\cdot\sin\alpha} = \cancel{\frac{1}{2}}\cdot(2+\cancel{3})\left(\cancel{\frac{2}{3}\sqrt{14} + \frac{9}{\sqrt{14}}}\right)$$

$$\cancel{\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}}\ \sqrt{\frac{5}{6}}\ \left(\frac{3}{\sqrt{6}} + 2\sqrt{6}\right)$$

~~где~~ $\cancel{\sin\alpha = \frac{AC}{AD} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{5}}{\frac{2}{3}\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{5}{14}}}$

Ответ:
$r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ $R = \frac{3}{2}\sqrt{5}$ | $S = \frac{75\sqrt{5}}{12}$

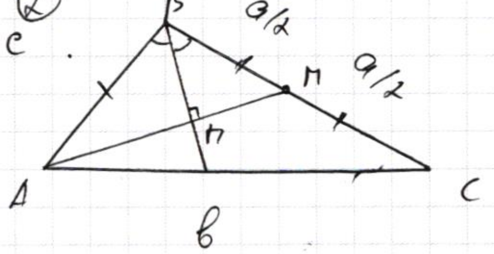
$$\boxed{S_{BAEC} = \frac{5}{2}\left(\frac{15}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\frac{5}{6}}\right.}$$

$$\cancel{S_{BACE} = \frac{5}{2}\left(\frac{\overset{28}{2\cdot 14} + \overset{27}{3\cdot 9}}{3\sqrt{14}}\right) = \frac{5\cdot 55}{6\sqrt{14}} = \frac{275}{6\sqrt{14}}}$$

Ответ:
$r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$
$R = \frac{3}{2}\sqrt{5}$
$S = \frac{75\sqrt{5}}{12}$

~~Ответ:~~ $\cancel{r = \frac{2\sqrt{5}}{5};\ R = \frac{\sqrt{5}}{2};\ S_{BACE} = \frac{275}{6\sqrt{14}}}$

②



Решение:

Р-м △ ABM -

BH - биссек. и высота =>

=> △ABM - равноб. => AB=BM

=> $c = \frac{a}{2}$

$P = \frac{3}{2}a + b = 900$ и $b < \frac{3}{2}a$ (нер-во треугольника)

$a \vdots 2$ a $b \vdots 3$ т.к. $b = 3\left(300 - \frac{a}{2}\right)$
(т.к. b - 900 - целое число)

$$\begin{cases} b = 900 - \frac{3}{2}a \\ 900 - \frac{3}{2}a < \frac{3}{2}a \Rightarrow a > 300 \end{cases}$$

кол-во чисел делящихся на 2 и больших ~~либо равными~~ 300: $\frac{900}{2} - \frac{300}{2}$ ~~+1~~ = 300 число

~~кол-во чисел делящихся на 3: $\frac{900-300}{3}$ = 200~~

$$\begin{cases} a = \left(\frac{900-b}{3}\right)2 \\ b < 450 \end{cases}$$

кол-во чисел делящихся на 3 и меньших 450

отнимаем единицу т.к. 450 тоже делится на 3 => 150-1=149 треугольников

$$\begin{array}{r|l} 450 & 3 \\ \underline{3} & \overline{150} \\ 15 & \\ \underline{15} & \\ 0 & \end{array}$$

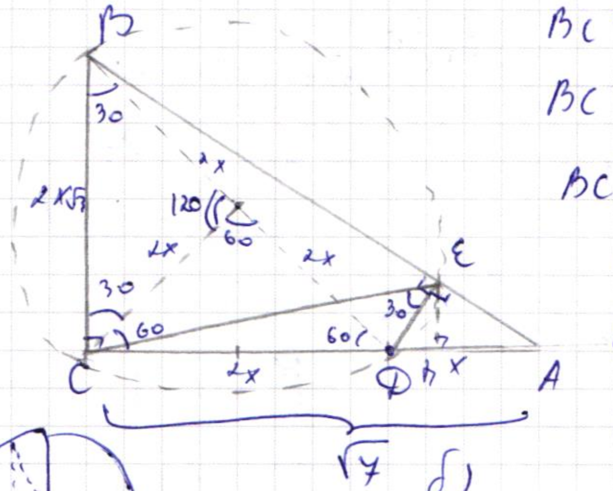
~~150 чисел~~

150 - 1 = 149

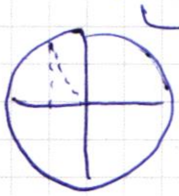
на 149 чисел найдется свое число a

Ответ: ~~149~~ 149

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



б)



$BC^2 = 4x^2+4x^2-2\cdot2x\cdot2x\cdot\cos120$

$BC^2 = 8x^2+8x^2\cdot\frac{1}{2}$

$BC^2 = 12x^2$

$BC = 2x\sqrt3$

а) $tg\angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{2x\sqrt3}{3x} = \frac{2\sqrt3}{3}$

$3x = \sqrt7$

$x = \frac{\sqrt7}{3} \Rightarrow BC = \frac{2}{3}\sqrt7\cdot\sqrt3 = \frac{2}{3}\sqrt{21}$

$AB^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{21}\right)^2+(\sqrt7)^2$

$AB = \sqrt{\frac{4}{\cancel{9}_3}\cdot\cancel{21}^7+7} = \sqrt{\frac{28+21}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt3}$

$\triangle DEA \sim \triangle ABC$

$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AE = \frac{AC\cdot AD}{AB} = \frac{\sqrt7\cdot\frac{\sqrt7}{3}}{\frac{7}{\sqrt3}} = \frac{7\sqrt3}{3\cdot7} =$

$AE = \frac{\sqrt3}{3} = \frac{1}{\sqrt3}$

$\frac{HE}{BC} = \frac{AE}{AB}$

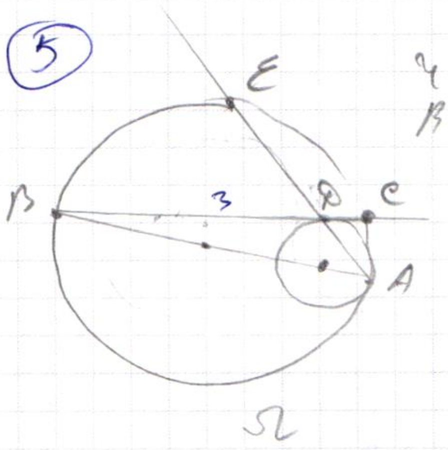
$HE = \frac{BC\cdot AE}{AB} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{21}\cdot\cancel{\frac{\sqrt3}{3}}\frac{1}{\sqrt3}}{\frac{7}{\sqrt3}} = \frac{2\sqrt{21}\cancel{\sqrt3}}{3\cdot7\cancel{\sqrt3}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}$

$S_{CED} = \frac{1}{2}HE\cdot CD = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{21}}{21}\cdot\frac{2}{3}\sqrt7 = \frac{2\cdot\sqrt7}{\sqrt{21}\cdot3} =$ 28 17 5 5

$= \frac{2}{3\sqrt3}$. Ответ: а) $\frac{2}{3\sqrt3}$ 1) $tg = \frac{2}{3}\sqrt{21}$ $\frac{1}{2}\cdot5\cdot\left(\frac{2\cdot14+9\cdot3}{3\sqrt{14}}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

⑤



r - ?
R - ?

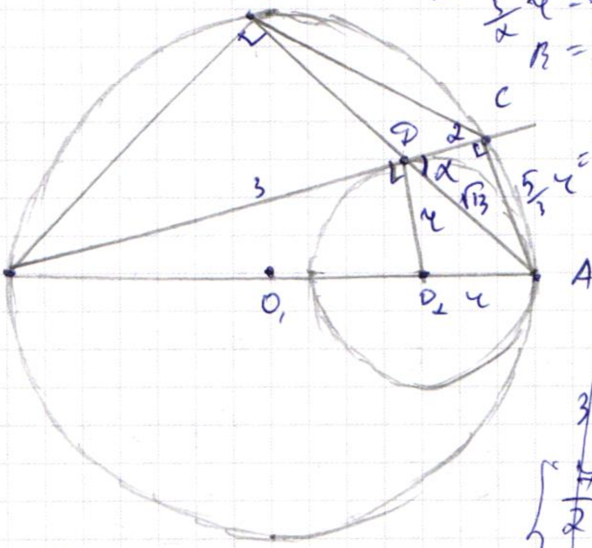
$3x = R + R - r$

$2x = r \to x = \frac{r}{2}$

$\frac{3}{2} r = 2R - r$

$\frac{5}{2} r = 2R$

$R = \frac{5}{4} r$



~~$BO_2 = 3x$~~

~~$O_2A = 2x = r$~~

~~$BO_2 = R +$~~

~~$R - 2r$~~

~~$BO_2 = 2(R - r)$~~

~~$3x = 2R - 4x$~~

~~$\begin{cases} \frac{7}{2} x = R \\ r = 2x \to x = \frac{r}{2} \end{cases}$~~

~~$R = \frac{7}{4} r$~~

~~⑥~~

$\triangle BDO_2$ - прям

$(~~R~~\,2R - ~~2~~r)^2 = r^2 + 9$

$4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2} = \cancel{r^2} + 9$

$4R^2 - 4Rr - 9 = 0$

$4R^2 - 4 \cdot \frac{5}{4} R - 9 = 0$

$4R^2 - 5R - 9 = 0$

$D = 25 + 16 \cdot 9 = 169$

$R_1 = \frac{5 + 13}{8} = \frac{18}{8} = \boxed{\frac{9}{4}}$

$R = \frac{5 - 13}{8} < 0$ не подход

$\Rightarrow r = \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{4} = \boxed{\frac{9}{5}}$

р-м $\triangle ACD$ - прям.

$AD^2 = 4 + \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{9}{5}\right)^2 = 4 + 9$

$AD = \sqrt{13}$

$ED \cdot AD = BD \cdot CD$

$ED = \frac{BD \cdot CD}{AD} = \frac{3 \cdot 2}{\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$

$\begin{array}{r} 16 \\ \times 9 \\ \hline 144 \end{array}$

S

$\frac{75\sqrt{5}}{12}$

$\frac{5 \cdot 15\sqrt{5}}{12}$

$2R - r$

$\frac{3}{5} = \frac{r}{x}$

$x = \frac{5}{3} r$

$\frac{5}{2}\left(\frac{15}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right.$

~~25 + 9 = 34~~

$5x = R + R$

$\frac{5}{2} x = R$

$2x = r$

$x = \frac{r}{2}$

$5x = 2R$

$R = \frac{5}{2} x$

$R = \frac{5}{4} r$

$r = \frac{4}{5} R$

$\frac{5}{2}\left(\frac{15}{\sqrt{6}}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x = (-a)(-b)$, где a, b, c, d, ~~- простые~~

$y = (-c)(-d)$

$a = \frac{(900 - b)2}{3}$

$894 \mid 6$; 149 ; 6 ; 29 ; 24 ; 54

$f(ab) = f(-a) + f(-b)$, a, b - простые

$-\frac{a}{2} + \frac{1}{2} - \frac{b}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{a+b}{2} + 1$

$a = 900$

894

$f(cd) = -\frac{c+d}{2} + 1$ 898 449

$3a + 2b = 900$

$f\left(\frac{ab}{cd}\right) =$ $b < 900 - b$

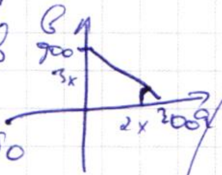
$2b < 900$ ~~$3a = 898$~~

$b = -\frac{2}{3}a + 900$ $f\left(\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}\right) =$

$= f\left(\frac{1}{a}\right) + f\left(\frac{1}{b}\right)$

$\frac{x}{y}$ - простое $\Rightarrow x$ $x = \underline{abp}$

$y = ab$



$b < ~~900~~ 450$

$x = 4$ $x = 8$

$x = 6$

$\times\ 149 \cdot 3 = 447$

$\frac{302}{2}$ 151

$x \in \{4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; 18; 20; 21; 22\}$

$y \in \{$

~~$f((-p_1)(p_2)) = f(-p_1) + f(-p_2) =$~~

$450 - 150 = 300$

$f\left(\frac{ab}{cd}\right)$ $b = 0 + \frac{2}{3}$

~~299 × 2~~ 894

$\frac{3}{2}a + c = 900$

$900 - 300$ 300

$f(1)$

$447 + \frac{3}{2} \cdot ~~302~~ 151$

$b = 3$

$c \leq \frac{3}{2}a$

$b = 900 - \frac{3}{2}a$

~~299~~

$900 - \frac{3}{2}a \leq \frac{3}{2}a$

$a = ~~199~~ 149$

300

$150 \times 3 = 450$

$900 \leq 3a$

$a \geq 300$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

дано

① $b_1 = a$

$b_2 = b$

$b_3 = c$

$b_4 = x_0$

$a^{*} x_0^2 - 2b\, x_0 + c = 0$

$b_3 - ? \Rightarrow c - !$

~~$D = 4b^2 - 4a^2c$~~

$\begin{cases} b_2 = b_1 q \\ b_3 = b_1 q^2, \\ b_4 = b_1 q^3 \end{cases}$, q - знам. $q = \frac{a}{b}$

$q = \frac{b}{c}$

$b_4 = a \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^3$ $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

$c = \frac{ab^3}{c^3}$ $b^2 = ac$

$a^{*} \cdot \left(\frac{a^4}{b^3}\right)^2 - 2b\, \frac{a^4}{b^3} + c = 0$

$a^{*} \frac{a^8}{b^6} - 2\frac{b a^4}{b^3} + c = 0$

$\begin{cases} \frac{a^{\cancel{10}\,9}}{b^6} - 2\frac{a^4}{b^2} + c = 0 \\ b^2 = ac \end{cases}$ $b = a \cdot \frac{b}{c}$

$c = \frac{ab^2}{c^2} = \frac{b^2}{c}$

$c^3 = ab^2$

$a^2 = b^2$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a^{\cancel{10}\,9}}{(ac)^3} - \frac{2a^4}{(ac)^2} + c = 0 \\ \frac{a^{6}}{c^3} - \frac{2a^2}{c^2} + c = 0 \Rightarrow a^6 - 2a^2c + c^4 = 0 \end{cases}$

~~$c = \frac{ab^2}{c^2} \Rightarrow c^3 = ab^2$~~

$b = \frac{a\, a}{b} \Leftrightarrow b = a\,\frac{b}{c} \Rightarrow \begin{cases} c = a \\ a^2 = b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = a \\ a = \pm b \end{cases}$

$c = \frac{a\, a^2}{b^2}$

$x_0 = a\left(\frac{a^3}{b^3}\right.$ $\begin{cases} a\left(\frac{a^4}{b^3}\right)^2 - 2b\,\frac{a^4}{b^3} + c = 0 \\ b^2 = ac \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{a^9}{b^6} - 2\frac{a^4}{b^2} + c = 0 \\ b^2 = ac \end{cases}$$

$$\frac{a^9}{(ac)^3} - \frac{2a^4}{ac} + c = 0$$

$$\frac{a^6}{c^3} - \frac{2a^3}{c} + c = 0$$

$$\frac{c^6}{c^3} - 2\frac{c^3}{c} + c = 0$$

$$c^3 - 2c^2 + c = 0$$

$c = 0$ или $c^2 - 2c + 1 = 0$

не подходит т.к. иначе пол. вырождается в пол. нулей

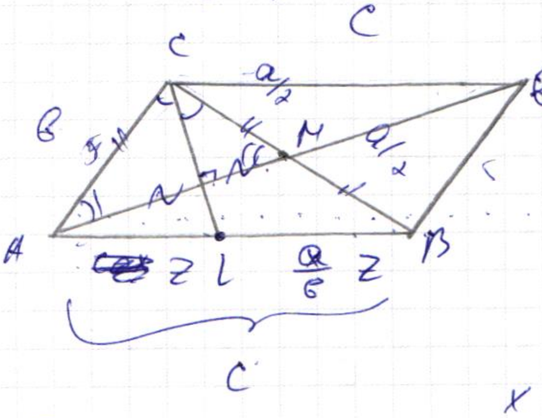
$(c-1)^2 = 0$

~~Ответ~~:

$c = 1$

Ответ: $c = 1$

$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$ 250: $2 \cdot 100 + 2 \cdot 25$

② 

$b + a + c = 900$, $a, b, c \in N$

$\frac{BL}{AL} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$

$\sqrt{16^2 + 169} = \sqrt{185}$

$\sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$

65 . 185

$\frac{x}{c-x} = \frac{a}{b}$

$x = \frac{a(c-x)}{b} = \frac{a}{b} z$

$b = \frac{a}{2}$ $z + \frac{a}{b} z = c$

$z\left(\frac{b+a}{b}\right) = c$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\alpha$

③ $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x - 6y = \sqrt{y(x-6) - (x-6)}$

$x^2 - 12x + 2y^2 - 4y + 20 = 0$

$D = ~~36~~\,36 - 2y^2 + 4y - 20 = -2y^2 + 4y + 16 =$

$= ~~-2(y^2 + 2y + 8)~~$ ~~$-2y^2 + 8y + 16 = 0$~~

~~$D = 4$~~

$2y^2 - 4y - 16 = 0$

$D = 4 + 32 = 36$

$y_1 = \frac{2+6}{2} = 4$

$y_2 = \frac{2-6}{2} = -2$

$\frac{3}{2} a + c = 900$

$a \vdots 2$ $c \le \frac{3}{2} a$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S_{BECA} = \frac{1}{2} BC \cdot AE \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} 5 \cdot \left(\frac{6}{\sqrt{13}} + \sqrt{13}\right) \cdot \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{19}{(\sqrt{13})^2} \cdot 3 = \frac{15 \cdot 19}{2 \cdot 13} = \frac{285}{26}$

$$\begin{array}{r} \overset{4}{15} \\ \times\ 19 \\ \hline 135 \\ 15\ \ \\ \hline 285 \end{array}$$

$\frac{1}{2} d_1 d_2$

Ответ: $\frac{285}{26}$

⑥ $(1)\begin{cases} 8x - 6|2x-1| \leq ax+b \ (1) \quad x \in [-\frac{1}{2}; 1] \\ ax+b \leq -8x^2+6x+7 \ (2) \end{cases}$ (2)

~~$-8x^2+6x+7 = 8x^2+6x+7 = (x- \ )(x- \ )$~~

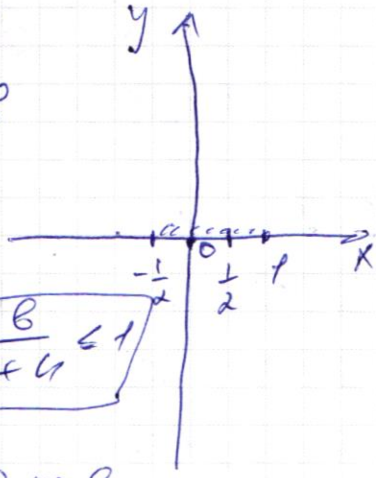
~~$D = 36 \ 9 + 63 = 72$~~

(1) ~~на $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$~~ ~~$2x-1$~~

1сл. $x \geq \frac{1}{2}$ $8x - 12x + 6 \leq ax+b$

$-4x+6 \leq ax+b$

$x(a+4) \geq 6-b$



~~$\left[\begin{array}{l} x \geq \frac{6-b}{a+4} \\ x \in [\frac{1}{2}; 1] \end{array}\right.$~~

$b \geq -4x+6-ax$ $\boxed{\frac{1}{2} \leq \frac{6-b}{a+4} \leq 1}$

2сл. $x < \frac{1}{2}$ $\overset{20x}{8x+12x} - 6 \leq ax+b$

~~$b \geq -ax + 8x+12x-6$~~

$x(20-a) \leq b+6$

$x \leq \frac{b+6}{20-a}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$-8x^2+6x+7 \geq 8x-6|2x-1| \leq$

$+8x^2+2x-7+6|2x-1| \geq 0$

$D = 4+56 = 57$

(1) $\underbrace{-8x^2+6x+7}$ $\leq ax+b$

$D = 9+56 = 65 = \cancel{15} \cdot 5 \cdot 13$

$x_1 = -\frac{3+\sqrt{65}}{-8} = \frac{3-\sqrt{65}}{8} \approx \frac{3-8}{8} = -\frac{5}{8}$

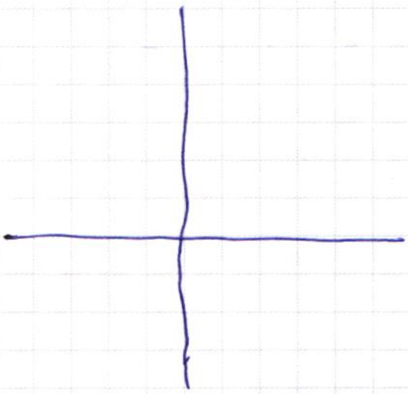
$x_2 = \frac{3+\sqrt{65}}{8} = \frac{11}{8}$

$x_b =$ $\qquad x_b = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$

~~$-6x^2 41$~~

$y\left(\frac{3}{8}\right) = -8 \cdot \frac{9}{64} + \frac{\overset{3}{6} \cdot 3}{\underset{4}{8}} + 7 = -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} + 7$

$= + \frac{9+56}{8} = \frac{65}{8}$



⑦ $f(p) = \frac{p}{2} - \frac{1}{2}$ $\qquad f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

Пусть x, y, - простые $\qquad 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,$

, ~~23, 29~~,

$f(2) = 1$ $\qquad f(13) = 6$

$f(3) = 1$ $\qquad f(17) = 8$

$f(5) = 2$ $\qquad f(19) = 9$

$f(7) = 3$ $\qquad f\left(\frac{2}{9}\right) = 1 + 19 < 0$

$f(11) = 5$

$f(1) = 7$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-6y=\sqrt{(y-1)(x-6)}$ (1)

(2) $2y^2-4y+x^2-12x+20=0$

~~$D=4-2x^2+24x-40=-2x^2+24x-36$~~

$(x^2-\underset{2\cdot6}{12x}+36)-36+2(y^2-2y+1)-2+20=0$

$\begin{cases}(x-6)^2+2(y-1)^2-18=0\\ x-6y=\sqrt{(y-1)(x-6)}\end{cases}$

замена $\begin{cases}a=\sqrt{x-6}\geq0 & a^2=x-6\\ b=\sqrt{y-1}\geq0 & b^2=y-1\end{cases}$

$a^2-6b^2=x-6-6y+6=x-6y$

$\begin{cases}a^4+2b^4-18=0\\ a^2-6b^2=ab\end{cases}$

$a^2-ab-6b^2=0$ $\quad a^2-ab-6b^2=(a-3b)(a+2b)=0$

$D=b^2+24b^2=25b^2$

$a_1=\frac{b+5b}{2}=3b$ $\quad x=-a\cdot(-b)$

$y=-c\cdot(-d)$

$a_2=\frac{b-5b}{2}=-2b$ $\quad f(ab)=f(-a)+f(-b)$

$f(cd)=f(-c)+f(-d)$

$\begin{cases}a^4+2b^4-18=0\\ a=3b\end{cases}$ или $\begin{cases}a^4+2b^4-18=0\\ a=-2b\end{cases}$ $\quad a, b, -$ просто

$81b^4+2b^4=18$ $\quad 16b^4+2b^4-18=0$

$83b^4=18$ $\quad b^4=1$

$b_{12}=\pm\sqrt[4]{\frac{18}{83}}$ $\quad b=\pm1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

Вернемся к замене

1) $\sqrt{y-1} = \sqrt[4]{\frac{18}{83}}$ 2) $\sqrt{y-1} = -\sqrt[4]{\frac{18}{83}}$

$\varnothing$

$y - 1 = \sqrt[2]{\frac{18}{83}}$

$\boxed{y = 1 + \sqrt{\frac{18}{83}}}$

3) $\sqrt{y-1} = 1$, 4) $\varnothing$

$y - 1 = 1$

$\boxed{y = 2}$

$y = 1 + \sqrt{\frac{18}{83}}$

① $\begin{cases} x = 6 + 9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ y = 1 + \sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases}$

~~②~~

Ответ: 8 (6+ $9\sqrt{\frac{18}{83}}$; $1+\sqrt{\frac{18}{83}}$)

при $b = \sqrt[4]{\frac{18}{83}}$

$a = 3\sqrt[4]{\frac{18}{83}}$

$\sqrt{x-6} = 3\sqrt[4]{\frac{18}{83}}$

$x - 6 = 9\sqrt{\frac{18}{83}}$

$x = 6 + 9\sqrt{\frac{18}{83}}$

при $b = 1$

$a = -2$

$\varnothing$ т.к. $a \geq 0$

при $y = 2$

$x^2 + 8 - 12x - 8 + 20 = 0$

$x^2 - 12x + 20 = 0$

$D = 36 - 20 = 16$

$x_1 = \underline{6 + 4} = 10$

$x_2 = 6 - 4 = 2$

$B \; \varnothing \; (2)$

$2 - 12 < 0$

④