МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $b(\div)$

$b_1 = a$

$b_2 = b$

$b_3 = c$

b_1 - член ур-я

$ax^2 + 2bx + c = 0$

b_3 - ?

Т.к. прогрессия геометрич-я, то $a \neq 0$; $b \neq 0$, $c \neq 0$

Найдем коэф. прогрессии q:

$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2}$, тогда

$q = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = ac$ (1)

$b_4 = b_3 \cdot q = c \cdot \frac{b}{a}$

Подставим b_4 в уравнение $ax^2 + 2bx + c = 0$:

$a \cdot \left(\frac{cb}{a}\right)^2 + 2b \cdot \left(\frac{cb}{a}\right) + c = 0$

$\frac{c^2b^2}{a} + \frac{2b^2c}{a} + c = 0 \quad \Big| \cdot a$

$c^2b^2 + 2b^2c + ac = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{c}$

~~$b^2(c^2+2)$~~

$cb^2 + 2b^2 + a = 0$

$b^2(c+2) = -a$

$b^2 = \frac{-a}{c+2}$ (2)

Из (1) и (2) $\Rightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{-a}{c+2} \\ b^2 = ac \end{cases} \Rightarrow \frac{-a}{c+2} = ac$

$-a = ac^2 + 2ac \quad \Big| \cdot \frac{1}{a}$

$c^2 + 2c + 1 = 0$

$(c+1)^2 = 0 \Rightarrow c = -1$

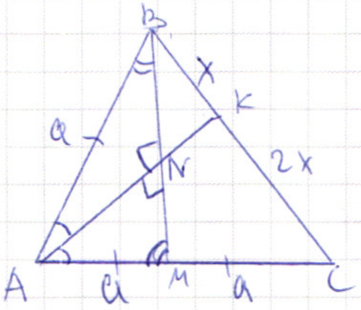
Ответ: -1

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№2.



1). Определим свойства треугольника, у которого медиана ⊥ бис-се

<u>Дано:</u> $\triangle ABC$

BM - мед-на

AK - бис-са

1. BM - медиана => AM = MC = a (введем обозн-е a)

2. AK - бис-са => $\angle BAK = \angle KAC$

3. $AK \perp BM$ => $\triangle BAN$ и $\triangle ANM$ (прямоугольные)

⇓

$\angle ABN = \angle AMN$

Тогда $\triangle BAN = \triangle ANM$ (AN - общ. катет; $\angle BAN = \angle NAC$; $\angle BNA = \angle ANM = 90$)

⇓

$AM = AB = a$

4. AK - бис-са => $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

2) Пусть, $BK = x$, $KC = 2x$

Тогда $P = 3a + 3x = 1200$ => $\underbrace{a + x = 400}$

Т.к. сумма двух сторон $\triangle$-ка должно быть больше третьей стороны, то:

$$\begin{cases} a < 2a + 3x, \\ 2a < a + 3x, \\ 3x < 3a, \\ a > 0;\ x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{3x > a > x,} \\ a > 0;\ x > 0 \end{cases}$$

Т.к. в $\triangle$ все стороны больше нуля, то будем ссылаться на первое условие системы, при этом ~~помним~~ принимая, что $a > 0$ и $x > 0$

Итак, у нас есть 2 условия:

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. Итак, у нас есть 2 условия:

$$\begin{cases} a+x=400 \\ 3x>a>x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=400-a \\ a\in(x;3x) \end{cases}$$

Найдем границы a:

- пусть $a=x$, тогда $P=3a+3x=6x=1200$, $x=200$
- пусть $a=3x$, тогда $P=3a+3x=12x=1200 \Rightarrow x=100$

Тогда $a\in(100;200)$

Найдем кол-во возможных целых a:

a_n (÷)
$a_1=101$
$a_n=199$
$d=1$
$n-?$

$a_n=a_1+(n-1)d$
$199=101+n-1$
$n=99$

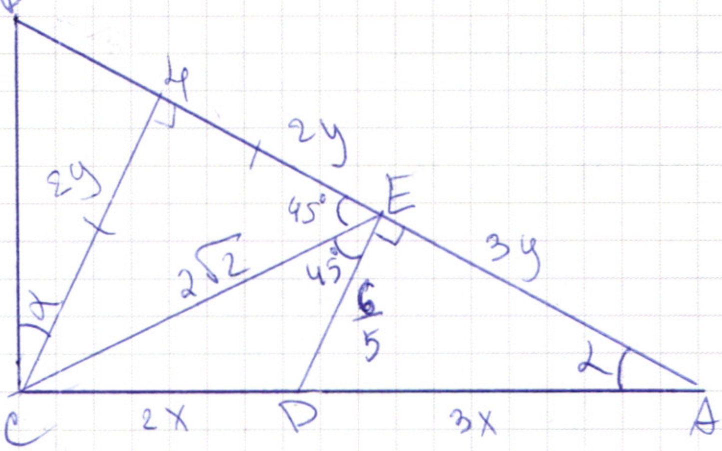
Значит, всего 99 вар-в a

Т.к. $x=400-a$, то каждому вар-ту a соотв-ет один вар-т x

Значит, всего сущ-ет 99 треугольников

Ответ: 99

№4.Ф



Дано: $\triangle ABC$

$\angle C = 90°$

$AD : AC = 3 : 5$

$DE \perp AB$

$\angle CED = 45°$

а) Найти: $tg \angle BAC$

Решение.

1. $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$, пусть, $AC = 5x$, тогда $AD = 3x$; $CD = 2x$

Обозначим $\angle BAC$ за α

2. Доп. постр: проведем высоту $CH \perp AB$

$CH \perp AB$
$DE \perp AB$ $\Rightarrow DE \parallel CH$

$\triangle DAE \sim \triangle CHA$ ($\angle A$ - общий, $\angle A\cancel{B}ED = \angle AHC = 90°$)

$\Downarrow$

$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AH} = \frac{3}{5} \Rightarrow$ Пусть, $AE = 3y$; ~~$AH = 5y$~~ $EH = 2y$

3. $\triangle CHE$: $\angle CHE = 90°$, $\angle CEH = 45°$ $\Rightarrow \triangle HCE$ равнобедр-й

$\Downarrow$

$HE = CH = 2y$

$tg\alpha = \frac{CH}{AH} = \frac{2y}{5y} = \frac{2}{5} = 0,4$

Ответ: 0,4

б) $AC = \sqrt{29}$; S_{CED} - ?

$\triangle CHA$: $\angle CHA = 90° \Rightarrow$ по т. Пифагора:

$AC^2 = CH^2 + HA^2 \Leftrightarrow 29 = 4y^2 + 25y^2$

$29 = 29y^2 \Rightarrow y = 1$ (т.к. $y > 0$)

Тогда $CH = 2$; $AH = 5$

$\triangle CDE$; $CE = \sqrt{CH^2 + HE^2} = 2\sqrt{2}$ - по т. Пифаг-ра

$DE = 3 \cdot tg\alpha = \frac{6}{5}$; $CD = \frac{2}{5}\sqrt{29}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

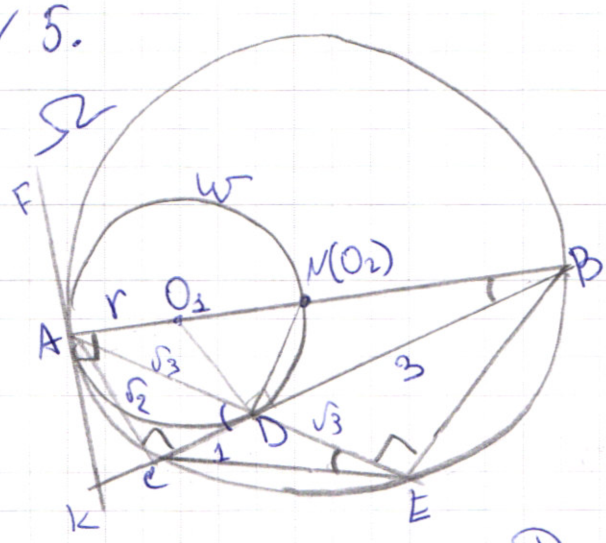
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4. $S_{CED} = \frac{1}{2} CE \cdot ED \cdot \sin\angle CED = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{6}{5} =$

$= \frac{2 \cdot 2 \cdot 6}{2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{6}{5} = 1,2$

Ответ: 1, 2

№5.



Дано: Ω; ω - окружность
$A \in \Omega$; $A \in \omega$
AB - диаметр
BC - касат. к ω
CD = 1
BD = 3
R - радиус Ω
r - радиус ω
Найти: R; r; S_{BACE}

Решение

1. Проведем касат FK через т. A
Пусть, O_1 - ц. ω; O_2 - центр Ω
Тогда $O_1A \perp FK$; $O_2A \perp FK \Rightarrow O_1 \in O_2A$; $O_1 \in AB$

2. AB - диаметр $\Rightarrow \angle ACB = 90°$
$O_1D \perp BC$ (касат и радиус)
$AC \perp BC$
$\Rightarrow$ По т. Фалеса: $\frac{AO_1}{O_1B} = \frac{CD}{BD} = \frac{1}{3}$, тогда
$3AO_1 = O_1B$

Пусть, $N \in AB$, $AN = 2r$, тогда $3AO_1 = O_1B \Leftrightarrow 3r = r + NB$
$2r = NB$

$AB = AN + NB = 2r + NB = 2r + 2r = 4r$
$AB = 2R$
$\Rightarrow 2R = 4r \Rightarrow R = 2r$

№5.

3. из п.2 $\Rightarrow R = 2r$, тогда точка N совпадает с точкой O_2

4. По т. о касат. и секущей $\Rightarrow BD^2 = O_2B \cdot AB \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $9 = R \cdot 2R$

$R^2 = 4{,}5$

$R = \sqrt{4{,}5} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = 1{,}5\sqrt{2}$

$r = \frac{R}{2} = 0{,}75\sqrt{2}$

5. $AB = 2r = 3\sqrt{2}$

$\triangle ABC$: по т. Пифагора $\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$

$AC = \sqrt{18 - 16} = \sqrt{2}$

6. $\triangle ACD$: $\left.\begin{aligned} &\angle ACD = 90^\circ \text{ (п.2)} \\ &CD = 1 \text{ (по усл)} \\ &AC = \sqrt{2} \text{ (п.5)} \end{aligned}\right| \Rightarrow$ по т. П-ра $AD = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

$\sin\angle ADC = \frac{AC}{AD} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$S_{BACE} = \frac{1}{2} \sin\alpha \cdot d_1 d_2$, где $\sin\alpha$ - угол между d_1, d_2,

d_1, d_2 - диагонали

$\triangle ACD \sim \triangle BDE \Rightarrow \frac{DE}{CD} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow DE = \frac{CD \cdot BD}{AD} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

$S_{BACE} = \sin\angle ADC \cdot AE \cdot BC = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 = \frac{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{2}$

Ответ: $1{,}5\sqrt{2}$; $0{,}75\sqrt{2}$; $8\sqrt{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

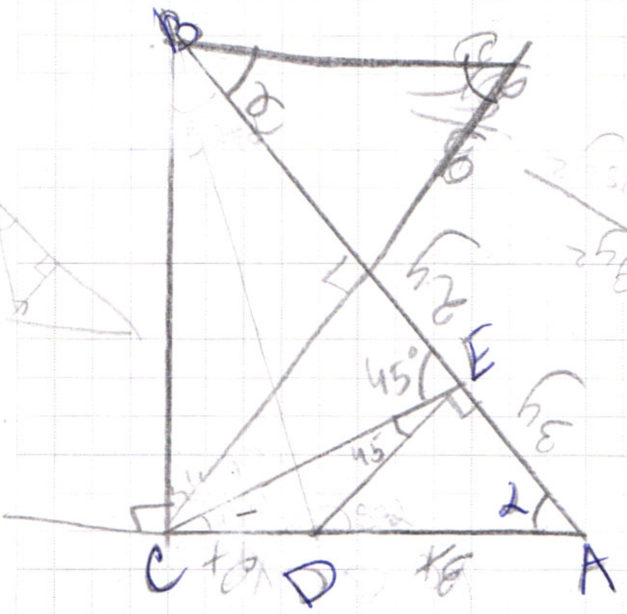
$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}, \\ 2x^2+\underbrace{y^2-4x-4y+3}_{\text{преобразуем}}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)}, \\ (y-1)(y-3)+2x^2-4x=0. \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} (x-1)(y-2)\geq 0 \\ y\geq 2x \end{cases}$

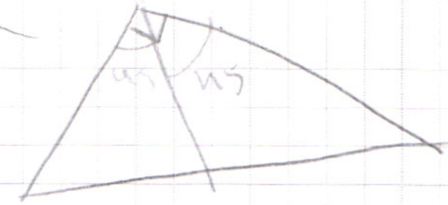
$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)}, \\ (y-1)(y-3)+2x(x-2)=0 \end{cases}$$

$$(x-3)(x-1)+x^2-4y+y^2=0$$

$$(x-3)(x-1)-x^2-4y+y^2=0$$



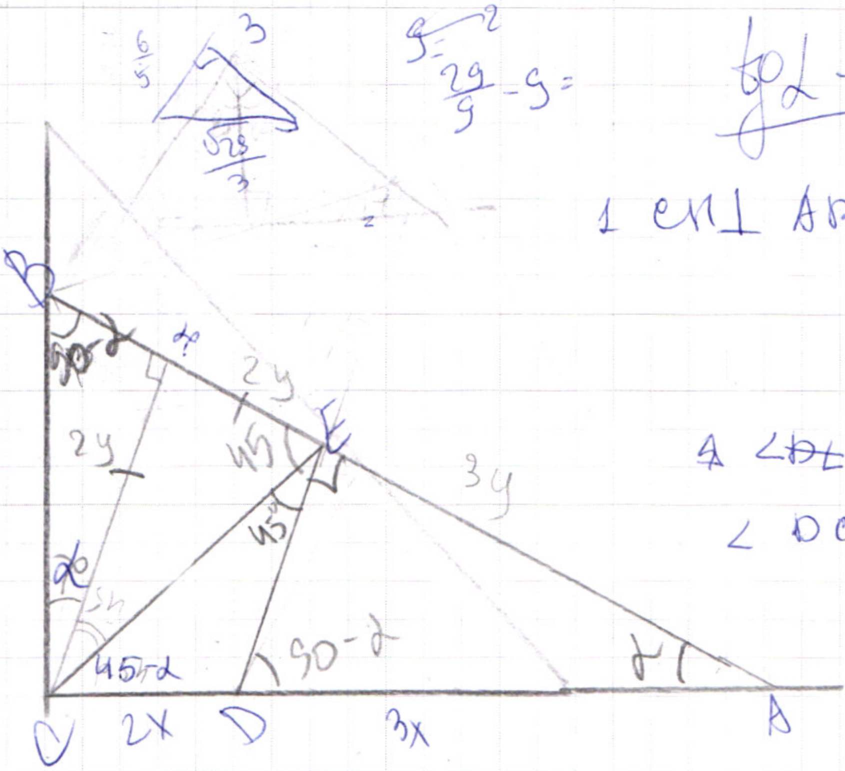
tgα



$tg\,\alpha = \frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}$

$\frac{29}{9} - 9 =$

$tg\,\alpha - ?$



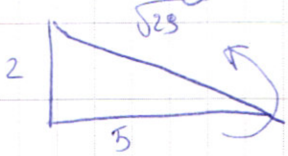
1 $CH \perp AB \Rightarrow \triangle BHC \sim \triangle DAE$
CHA
$\angle BCH = \alpha$

4 $\angle EDA = 90 - \alpha$, тогда
$\angle DCE + \angle DEC = \angle EDA$
$\angle DCE + 45 = 90 - \alpha$
$\angle DCE = 45 - \alpha$
т.к. в $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$,
то $\angle HCE = \angle C - \angle BCH - \angle ECA =$
$= 90 - \alpha - 45 + \alpha = 45$, тогда
$\angle HCE = 45° \Rightarrow \triangle HCE$ △

$tg\,\alpha = \frac{CH}{AH} = \frac{2y}{5y} = \frac{2}{5}$

$AC = \sqrt{29}$

$1 + tg^2 = \frac{1}{\cos^2}$, $\cos^2 = \frac{1}{1+tg^2} = \frac{1}{\frac{29}{25}} = \frac{25}{29}$



$AC^2 = (2y)^2 + (5y)^2$

$29 = 29y^2 \Rightarrow y = 1$, тогда $CH = 2$; $AH = 5$

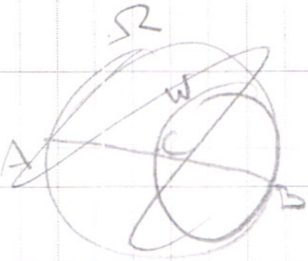
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

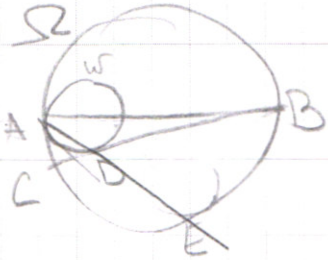
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

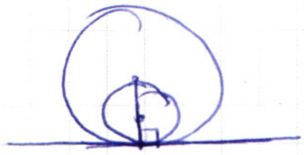
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





CD-1

BD=3

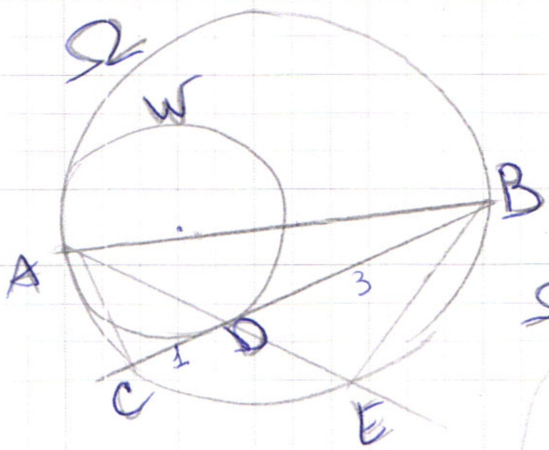


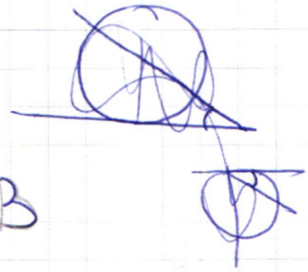
R-?

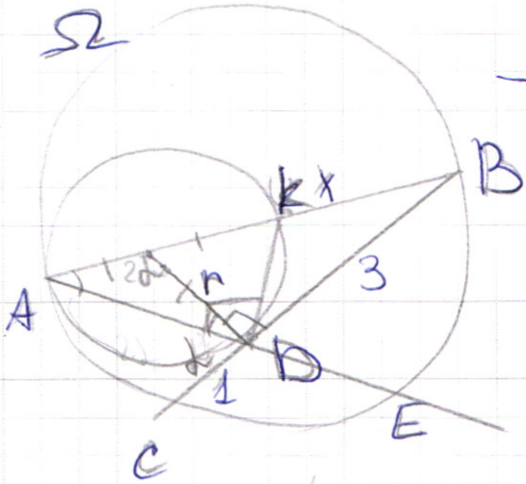
r-?

S_{BACE}?

1. Центры O_1 и O_2 лежат на одной прямой AB







$\cancel{\alpha+2\beta=180}$

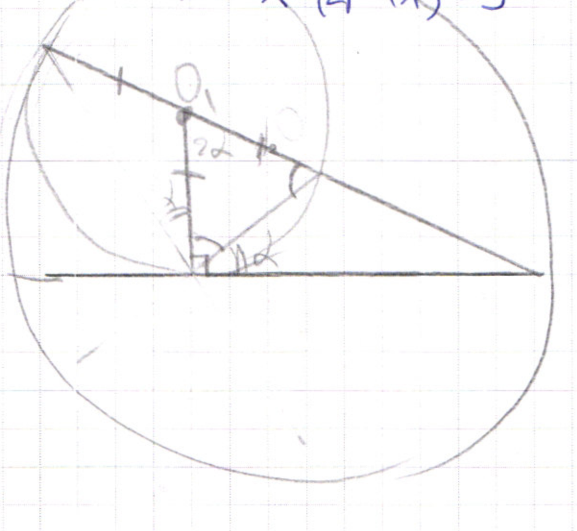
$\alpha+\beta=90$

$\cancel{\beta=90}$

$BD^2 = BK \cdot AB$

$9 = \cancel{x(R-x)}\ \cancel{x2r}$

$x\ R = x\ (2r+x) = 9$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$

$D = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$

$x_2 = 1$

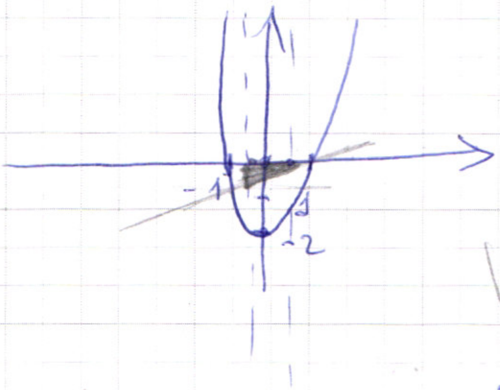
$2(x+\frac{1}{2})(x-1) \le ax+b \le x + |2x-1|$

$x \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$: $2(x+\frac{1}{2})(x-1) \le ax+b \le 1-x \quad | -1+x$

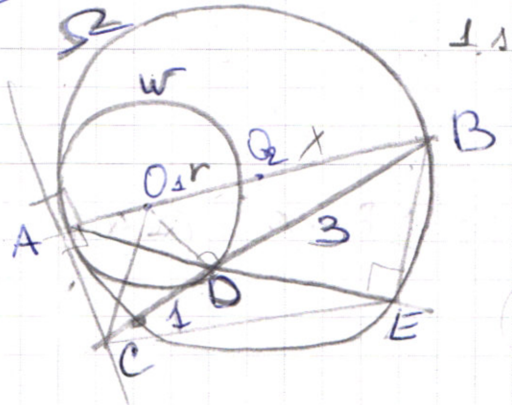
$2(x+\frac{1}{2})(x-1) + 1(x-1) \le ax+b-1+x \le 0$

$(x-1)(2x+2) \le x(a+1)+b-1 \le 0$

$y = 2(x-1)(x+1)$ – параб, ветви ↑



$y = (a+1)x + b - 1$



$y = x(2r+x)$

$\triangle BOD \sim \triangle BAK \Rightarrow \frac{OD}{AK} = \frac{BD}{AB} = \frac{OB}{BK}$

$AK = \frac{r(2r+x)}{3}$ $\quad \frac{r}{AK} = \frac{3}{2r+x} = \frac{r+x}{3+AK}$

$AK = 2r^2 + 3rx + x^2 - 3$ $\quad (2r+x)(r+x) = 2r^2 + 2rx + xr + x^2$

$= \frac{r}{3}(\;\; \frac{2}{3}r^2 + \frac{xr}{3}$ $\quad 3 + AK = 2r^2 + 3rx + x^2$

$\frac{4}{3}r^2 + 2\frac{2}{3}rx + x^2 - 3 = 0 \;|\; 3$ $\quad 4r^2 + 8rx + 3x^2 - 9 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

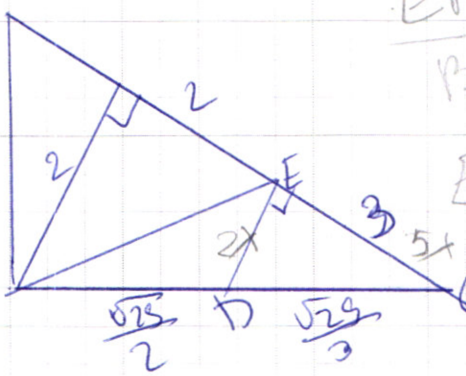
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{EH_1}{BC}$ $=\frac{3}{5\frac{4}{5}}$ $=\frac{3}{5{,}8}$ $\frac{6\sqrt{29}\cdot 5}{2\cdot 5\cdot 5{,}8\cdot\sqrt{29}}$

$\frac{29}{9}-9$ $tg\alpha=\frac{DE}{EC}$ $=\frac{6}{2\cdot 5{,}8}$

$EH_1=\frac{3BC}{5{,}8}$ $DE\ tg\alpha\cdot EC=\frac{2\cdot 3}{5}=\frac{6}{5}$

$=$

$AD=9+\frac{36}{25}=9+\frac{36}{25}=\frac{225+36}{25}=$

$=\frac{261}{25}$

$29x^2=\frac{28}{9}$

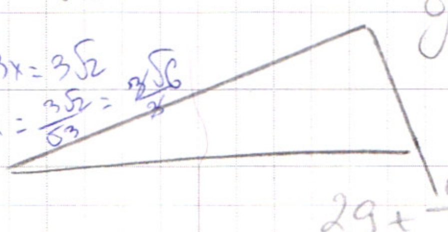
$15\cdot 15=9\cdot 25$

$x^2=\frac{1}{9}$

$x=\frac{1}{3}$ $\frac{5}{3}$ $\sqrt{\frac{9\cdot 25+9\cdot 4}{25}}$ $\sqrt{\frac{9\cdot 29}{25}}=\frac{3}{5}\sqrt{29}$

$tg\alpha=\frac{BC}{AC}\Rightarrow AC=\frac{BC}{tg\alpha}=\frac{5BC}{2}=\frac{\sqrt{29}}{1}$

$\frac{x}{3}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\sqrt{3}x=3\sqrt{2}$ $x=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{6}}{3}$



$BC=\frac{2\sqrt{29}}{5}$

$\frac{r}{r+x}=\frac{1}{3}$

$29+\frac{4\cdot 29}{25}=$ $\frac{9\cdot 29}{25}=\frac{9\cdot 25}{25}$

$\frac{29\cdot 25+4\cdot 25}{25}=\frac{29}{25}\ \frac{9\cdot 4}{25}$

$3r=r+x$

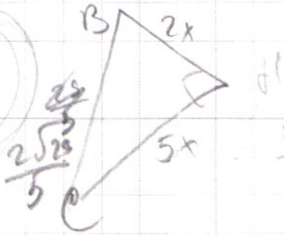
$2r=x$, $2r+x=AB$ $BA=\frac{29}{5}$

$4r=AB=2R$

тогда $R=2$

$\Downarrow$

$R=2r$



$\frac{3\cdot 2}{5}=$

$\frac{BH}{CH}=\frac{2}{5}$

$29x^2=\frac{4\cdot 29}{25}$

$x=\frac{2}{5}$

$\frac{DE}{CD}=\frac{BD}{AD}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2x^2+y^2-4x-y+3=0 \end{cases}$$

ОДЗ: $xy-2x-y+2\geq 0$

$x(y-2)-(y-2)\geq 0$

$(y-2)(x-1)\geq 0$

$y^2-4xy+4x^2=(y-2)(x-1)$ $\qquad 4y(x-1)$

$y^2-4xy+4x^2-2x^2-4x-4y+3+4xy=0$

~~$y^2+2x^2-4x-4y+3$~~

$(y-2)(x-1)$

$(y-2)(x-1)+4y(x-1)-(2x^2+4x-3)=0$

$2x^2+4x-5=0$ $+2$

$D=b^2-4ac=$

$=16+4\cdot 6=16+24=$

$=40=2\sqrt{10}$

$2x^2+4x-25=0$ $+25$

$D=16+4\cdot 5=6^2$

$x_1=-b-4\sqrt{D}$

$y^2-4xy+4x^2=(x-1)(y-2)$

$(y-1)(y-2)=y^2-3y+2$ $\qquad x^2-4x+3+x^2+y^2-4y=0$

$(x-3)(x-1)+x^2-4y+y^2=0$

$y^2-3y+2+1-y-4y+2x^2=0$

$(y-1)(y-2)-y-4x+2x^2=0$ $\qquad x-3$

черновик ☑ чистовик ☐ (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$ ОДЗ: $(x-1)(y-2)\geq 0$

$y-2x\geq 0$

$y\geq 2x$

$\not{\Leftrightarrow}$ $y^2-4xy+4x^2=(x-1)(y-2)$

$(x-1)(y-2)+4xy-2x^2-4x-4y+3=0$

$4y(x-1)$

$(x-1)(y-2)+4y(x-1)$ $\cancel{}$ $(2x^2+4x-3)=0$

$(x-1)(5y-2)+(2x^2+4$

$\Leftrightarrow (y-3)(y-1)$

$2x^2-4x+y^2-4y+3=0$

$y^2-4y+3=0$

$D=b^2-4ac=16-12=$

$2x(x-2)+y(y-4)+3=0$

4

$y=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{4-2}{2}=1$

$y=\frac{-b+\sqrt{D}}{2}=\frac{4+2}{2}=3$

$(y-3)(y-1)+2x^2-4x=0$

$$\begin{cases} (y-3)(y-1)+2x(x-2)=0 \\ (x-1)(y-2)=\cancel{0 \Rightarrow x=1 \text{ или } y=2} \\ \quad\ \shortparallel \\ \quad (y-2x)^2 \end{cases}$$

$(x-1)(y-2)\geq 0$

$y\geq 2x$

$y-2\geq 2x-2$

$\frac{y-2}{2}\geq x-1$

$$\begin{cases} (y-2x)^2=(x-1)(y-2) \\ (y-3)(y-1)+2x(x-2)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$y\geq 2x$

$\left[\begin{array}{l} x\geq 1;\ y\geq 2 \\ x\leq 1;\ y\leq 2 \end{array}\right.$

$D=b^2-4ac=16-12=4$

$y_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{4-2}{2}=1$

$y_2=\frac{4+2}{2}=3$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

МФТИ

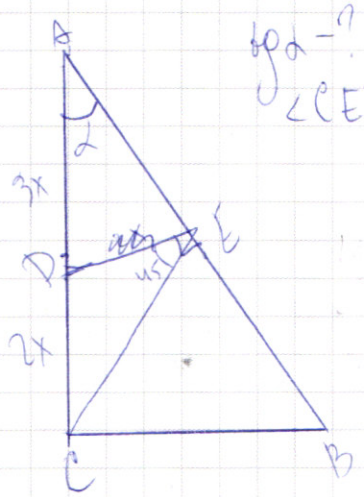
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

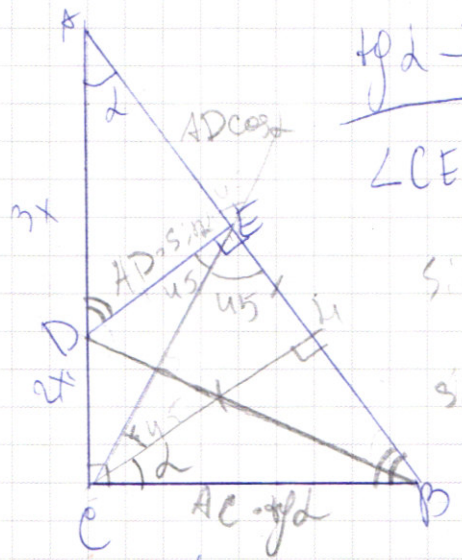
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$tg\alpha - ?$

$\angle CED = 45$



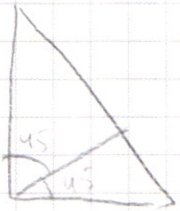
$tg\alpha - ? \quad \frac{CB}{AC}, \quad CB = AC \cdot tg\alpha$

$\angle CED = 45°$

$\sin\alpha = \frac{DE}{AD} \Rightarrow DE = \sin\alpha$

$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} \Rightarrow$

$AB = \frac{BC}{\sin\alpha}$



1. $\angle CED = 45° \Leftrightarrow$ | $\Rightarrow \angle CEB = 180 - 90 - 45 = 45°$
$\angle DEA = 90°$

Тогда CE - бис-са $\triangle DEB$ ($\angle DEC = \angle CEB$)

т.к. $\triangle DEB$ прямоуг-й, ~~то~~ $4 \angle DEC =$

$1 + \sin^2\alpha =$

$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

$\frac{1}{\sin^2\alpha} = (1 + ctg^2\alpha)^2$

$AB = BC \sin\alpha$

$AC = 5x$, тогда $BC^2 = 25x^2 - \frac{BC^2}{\sin^2\alpha}$

$BC^2\left(1 + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right) = 25x^2$

$(1 + ctg^2\alpha)^2 = ctg^2\alpha$

$2 + 2ctg^2\alpha + ctg^4\alpha = ctg^2\alpha$

$ctg^4\alpha + ctg^2\alpha + 2 = 0$

$tg\alpha = \frac{DE}{AE}, DE$

$ctg^2\alpha = t$, тогда $t^2 + t + 2 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$\triangle DAE \sim \triangle CAB$: $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{CB} = \frac{AE}{AC}$

$\frac{3x}{AB} = \frac{DE}{CB} = \frac{AE}{5x}$

$\frac{3x}{AB} = \frac{AE}{5x}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$b_1 = a$

$b_2 = b$

$b_3 = c$

$ax^2+2bx+c=0$

$D = b^2-4ac = 4b^2-4ac$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b-2\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{\cancel{a}}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{\cancel{a}}$

$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$

$a \neq 0$

$b_4 = b_3 q = \frac{c \cdot b}{a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 \cancel{-4ac}}}{\cancel{a}} \quad \Big| \cdot \cancel{2a}\ a$

$\cancel{2}cb = -b \pm \sqrt{b^2-4ac}$

$b_4 = c \cdot \frac{c}{b}$

$= \frac{c^2}{b}$

$ax^2+2bx+c=0$

$ax^2+2bx+c=0$

$\frac{a \cdot c^4}{b^2} + \frac{2bc^2}{b} + c = 0$

$\frac{a\ c^4}{b^2} + 2c^2 + c = 0$

$\frac{a}{b^2} c^4 + 2c^2 + c = 0$

$\frac{a \cdot cb^2}{a^2} + \frac{2b \cdot cb}{a} + c = 0 \quad \Big| \cdot a$

$cb^2 + 2b^2c + \cancel{a}c = 0$

$\cancel{b^2(c^2+2c)+c=0}$

$c^2 + c(2b^2 + 1\cancel{a}) = 0$

$c(c+2b^2+1) = 0$

$c = 0$ или $c = -2b^2-1$

$c \neq 0$, иде $\boxed{c = \cancel{-2b^2-1}}$

$c^2b^2 + 2b^2c + ac = 0$

$c(cb^2+2b^2+a) = 0$

$c = 0$

$c \neq 0$, иде

$cb^2 + 2b^2 + a = 0$

$b^2(c+2) = -a$

$b^2 = \frac{-a}{c+2} = \frac{ac}{1}$

$-a = ac^2 + 2ac \quad | : a, \quad a \neq 0$

$-1 = c^2 + 2c$

$c^2+2c+1=0$

$D = b^2-4ac = 4-4 = 0$

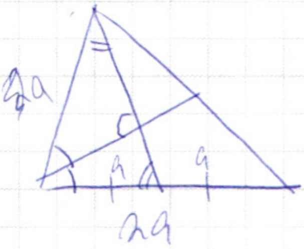
$x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2-0}{2} = -1$

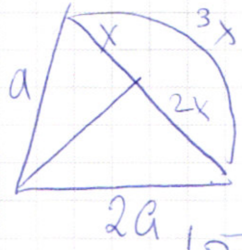
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)





$3a>3x$

$2a+3x>a$

$a+3x>2a$

$\boxed{P=3x+3a}$

$3a>3x$ $\quad 3x>a>x$

$2a+3x>a$ $\quad a+3x>0$

$a+3x>2a$ $\quad 3x>a$

$3(x+a)=1200$

$x+a=400$

$\cancel{3a>2x}$

$3x>a>x$

$\begin{cases} x+a=400 \\ 3x>a>x \end{cases}$ $\longrightarrow$ $\underset{a}{399}$ $\underset{x}{399}$ - всего вар-в.

$x=400-a$

$a \in (x; 3x)$

$a \qquad x$

$x_{max}=99$

$a_1=1$

$a_n=399$

$d=1$

$a_n=a_1+d(n-1)d$

$a_{399}=1+n-1$

$\begin{cases} a\in(100;200) \\ x+a=400 \\ 3 \end{cases}$

~~Пусть $a=3x$, тогда~~

~~$P=6x$, $x=200$~~

$a=x$, $P=3x+$

Пусть, $a=3x$, тогда

$P=3a+3x=$

$=9x+3x=\cancel{1200}$ $\quad 12x \Rightarrow x=100$

$a=x$, тогда

$P=3a+3x=6x=1200$

$x=200$

$a_1=101$

$a_n=199$

$d=1$

$n-?$

$a_n=a_1+(n-1)d$

$199=101+n-1$

$199=100+n$

$n=99$ вар-в для a

Для каждого a соотв-ет один x,

Потому всего 99 вар-в

тогда $a\in(100;200)$

$x<a$

$3x+a>0$

$3x>a$

$3x>a>x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$b_1 = a$

$b_2 = b$

$b_3 = c$

$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = ac$

$b_4 = c \cdot \frac{b}{a}$ – член ур-я $ax^2 + 2bx + c = 0$

тогда $a\left(\frac{cb}{a}\right)^2 + 2b\left(\frac{cb}{a}\right) + c = 0$

$\frac{c^2b^2}{a} + \frac{2b^2c}{a} + c = 0 \Big| \cdot a,$

$c^2b^2 + 2b^2c + ac = 0 \Big| \cdot \frac{1}{c}, c \neq 0$

$cb^2 + 2b^2 + a = 0$

$b^2(c+2) = -a$

$b^2 = \frac{-a}{2+c}$

Т.к. $b^2 = ac$, то $\begin{cases} b^2 = \frac{-a}{2+c} \\ b^2 = ac, \end{cases}$

тогда $\frac{-a}{2+c} = ac$

$-a = ac(2+c) \Big| \cdot \frac{1}{a}, a \neq 0$

$-1 = 2c + c^2$

$c^2 + 2c + 1 = 0$

$(c+1)^2 = 0$

$c = -1.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)