МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

I

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$. VI

   ± (2 б.)

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство ? III

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$x-6y=\sqrt{y(x-6)-(x-6)}=\sqrt{(y-1)(x-6)}$ $\Rightarrow x>6y$

$y>1$

$x>6$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$

$x^2-12x+36-16+2y^2-4y+2-2=0$

$(x-6)^2-16+2(y-1)^2-2=0$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$10\le\frac{1}{2}a\le14$

Пусть $a=x-6$, $b=y-1$

$20\le a\le 28$

$a-6b=x-6-6y+6=x-6y$

$-3\le\frac{1}{2}a\le1$

$(a-6b)^2=ab$

$a^2+2b^2=18\Rightarrow a^2=18-2b^2$

$-10\le-\frac{1}{2}a\le8$

$a^2-12ab+36b^2=ab$

$-20\le-a\le16$

$18-2b^2-12ab+36b^2=ab$

$a\in[-16;20]$

$-23\le-\frac{1}{2}a\le-5$

$36\cdot9=360-36=360-40+4=324$

$a\in[10;46]$

$\frac{4}{7}=\frac{20}{35}=\frac{40}{70}=\frac{400}{700}=\frac{350}{700}+\frac{50}{700}=0,5+0,07\approx57\%$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$-8 < b \leq -5$

$2 + 4 + 4 + 2 + 1 + 5 = \underline{\underline{18}}$ б.

III : 2 б. мин, всего 20/30 б.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} (a-bb)^2 = ab \\ a^2+2b^2 = 18 \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$8x-6|2x-1|\le ax+b\le -8x^2+6x+7$

$y=ax+b$ – уравн. прямой

$y=-8x^2+6x+7$ – уравн. параболы, ветви напр. ↓

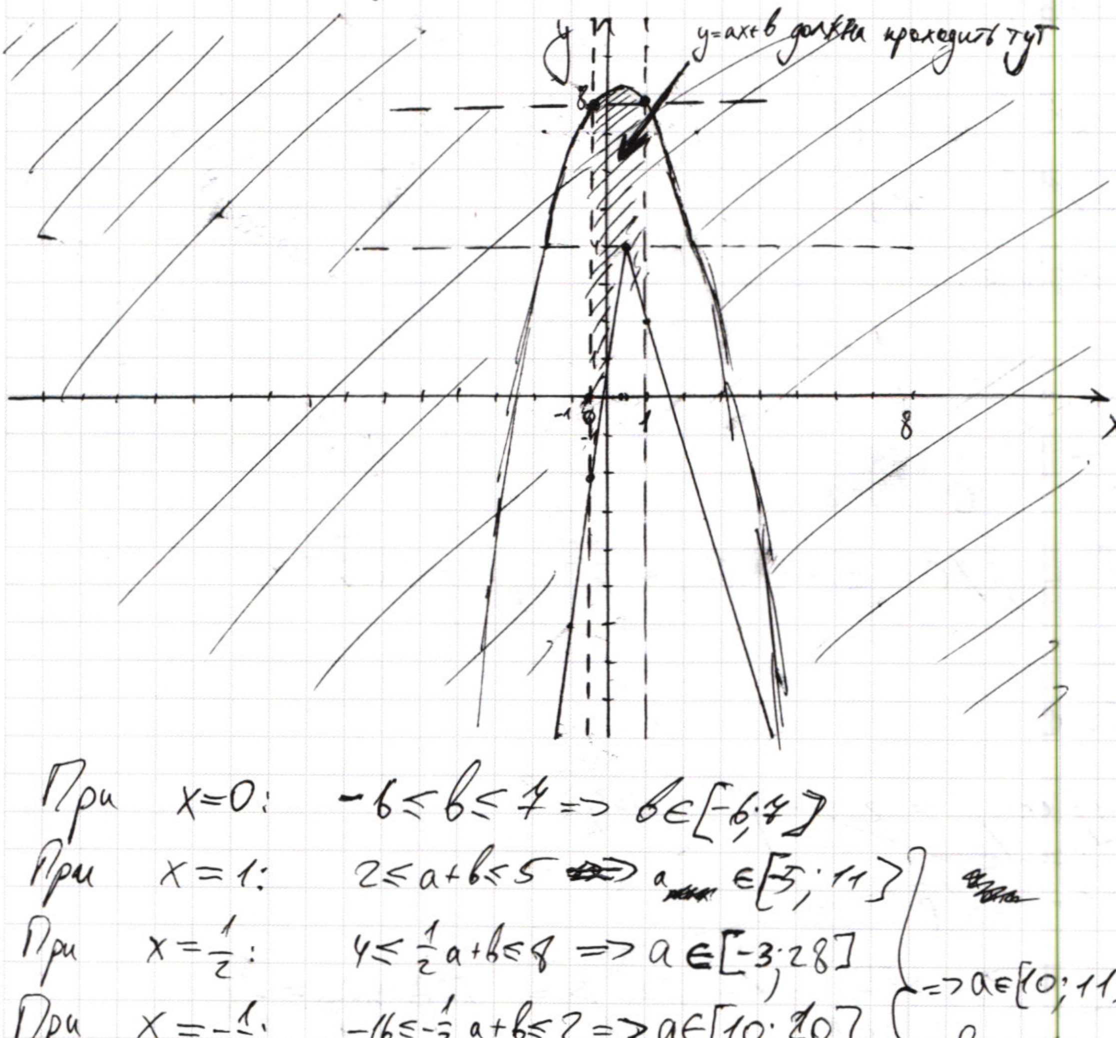
$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{2\cdot(-8)}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

$y_0=-8\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}+\frac{6\cdot 3}{8}+7=-\frac{9}{8}+\frac{18}{8}+7=\frac{9}{8}+7=8\frac{1}{8}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge\frac{1}{2}\\ y=8x-12x+6\end{cases}\\ \begin{cases}x<\frac{1}{2}\\ y=20x-6\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge\frac{1}{2}\\ y=-4x+6\end{cases}\\ \begin{cases}x<\frac{1}{2}\\ y=20x-6\end{cases}\end{array}\right.$$

$ax+b\ge 8x-6|2x-1|$

$ax+b\le -8x^2+6x+7$



При $x=0$: $-6\le b\le 7 \Rightarrow b\in[-6;7]$

При $x=1$: $2\le a+b\le 5 \Rightarrow a\in[-5;11]$

При $x=\frac{1}{2}$: $4\le\frac{1}{2}a+b\le 8 \Rightarrow a\in[-3;28]$

При $x=-\frac{1}{2}$: $-16\le-\frac{1}{2}a+b\le 2 \Rightarrow a\in[10;20]$

$\Rightarrow a\in[10;11]$

При $a=10$ $b\in[-6;-5]$

При $a=11$ $b=-6$

Ответ: $a\in[10;11]$, $b\in[-6;-5]$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№3

$x-6y=a-6b \qquad a=x-6 \qquad b=y-1$

$$\begin{cases}(a-6b)^2=ab\\ a^2+2b^2=18\end{cases}$$

$a^2-16+2(b^2-1)=0$

$(a-4)(a+4)+2(b-1)(b+1)=0$

$(4-a)(a+4)=2(b-1)(b+1)$

$$\begin{cases}a^2-12ab+36b^2=ab\\ a^2+2b^2=18\end{cases}$$

$-13ab+34b^2=-18$

$13ab-34b^2=18$

$18+34b^2-13ab=0$

№5 (б)

$S_{BACE}=S_{BCA}+S_{BEC}$ ~~$+S_{ECD}$~~

$S_{BCA}=\frac{BC\cdot AC}{2}=\frac{5}{2}AC=\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{3}AO_2=\frac{25}{6}\cdot\frac{6}{\sqrt5}=5\sqrt5$

$S_{BEC}=S_{BED}+S_{EDC}$

~~$\sin 2\beta=\frac{\sqrt5}{3}=2\sin\beta\cos\beta=2\sin\beta\sqrt{1-\sin^2\beta}$~~

~~$\frac{\sqrt5}{6}=\sin\beta\sqrt{1-\sin^2\beta}$~~

~~$\frac{\sqrt5}{6\sin\beta}=\sqrt{1-\sin^2\beta}\Rightarrow\frac{5}{36\sin^2\beta}=1-\sin^2\beta\Rightarrow\sin^2\beta-\sin^4\beta=\frac{5}{36}$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$x-6y\geqslant 0$

$x\geqslant 6y$

$xy-6y-x+6=y(x-6)-(x-6)=(y-1)(x-6)$

$$\left[\begin{array}{l} y=1 \\ x=6 \\ \begin{cases} y>1 \\ x>6 \end{cases} \\ \begin{cases} y<1 \\ x<6 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1 \\ x\geqslant 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x=6 \\ y\leqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y>1 \\ x>6 \end{cases} \\ \begin{cases} y<1 \\ x<6 \end{cases} \end{array}\right.$$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=x^2-12x+36-16+2y^2-4y+2-2=0$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

Пусть $x-6=a$, $y-1=b$.

Тогда: $a-6b=x-6-6y+6=x-6y$

$$\begin{cases} (a-6b)^2=ab \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$$

$2b^2=18-a^2$

$b^2=9-\frac{1}{2}a^2$

$a^2+b^2=18-b^2$

$(a+b)^2=18-b^2+2ab$

$a^2-12ab+36b^2=ab$

$a^2-12ab+36\cdot 9-18a^2=ab$

$a^2-13ab+324-18a^2=0$

$-17a^2-13ab+324=0$

$17a^2+13ab=324$

$D=169b^2-4\cdot 17\cdot 36\cdot 9$

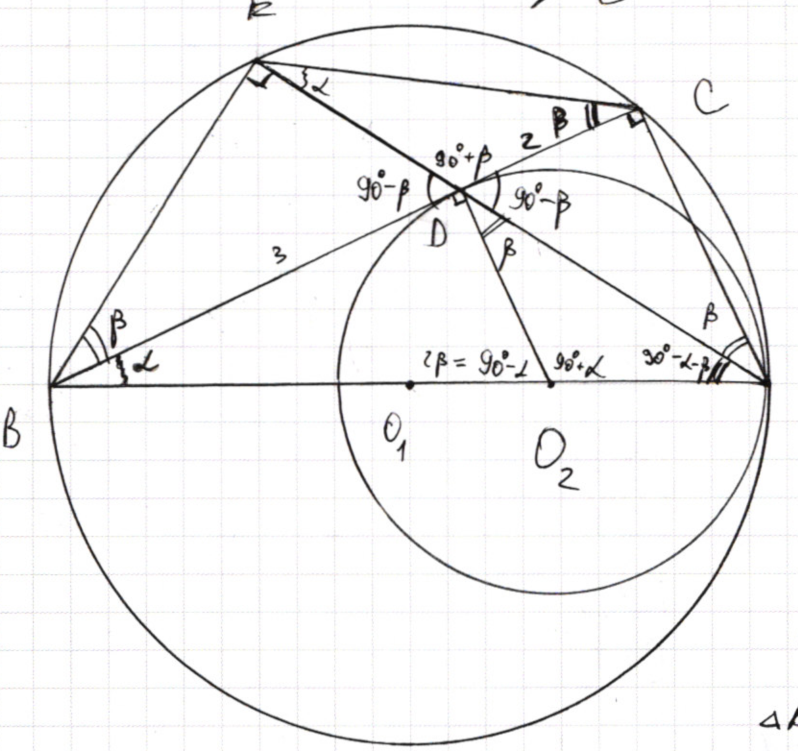
$a=\frac{-13b\pm\sqrt{169b^2-4\cdot 6^2\cdot 9\cdot 17}}{2\cdot 17}$

$34a=-13b\pm\sqrt{169b^2-2^2\cdot 6^2\cdot 3^2\cdot 17}$

$34a+13b=\pm\sqrt{(13b-36\sqrt{17})(13b+36\sqrt{17})}$

$4\cdot 17^2a^2+2\cdot 13\cdot 17ab+13^2b^2=169b^2-36^2\cdot 17$

№5



Дано: AB – диаметр Ω, O_1 – центр Ω, O_2 – центр ω, $O_2D \perp BC$, $CD=2$, $BD=3$, $O_2D = AO_2$

Найти: AO_2, AO_1, S_{BACE}

Решение:

$\angle BCA = 90°$, $\angle BEA = 90°$ (оп. на диам.)

O_2D – рад., BC – кас., $O_2D \perp BC$;

$\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ по 2∠

$AO_2 = DO_2 = \frac{3}{5} AC$

$BO_2 = \frac{3}{5} AB \Rightarrow O_2A = \frac{2}{5} AB = \frac{4}{5} O_1A$

Т.к. $AO_2 = DO_2$, то $\triangle AO_2D$ – р/б $\Rightarrow \beta = 90° - \alpha - \beta$

$2\beta = 90° - \alpha$

$\alpha = 90° - 2\beta$

$\triangle BDA \sim \triangle EDC$ по 2∠ $\Rightarrow \frac{ED}{BD} = \frac{DC}{DA}$

$ED \cdot DA = BD \cdot DC = 6$

$\sin \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{5}{3} AO_2}{\frac{5}{2} AO_2} = \frac{2}{3} = \sin(90° - 2\beta) = \cos 2\beta$

$\sin 2\beta = \sqrt{1 - \cos^2 2\beta} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin 2\beta = \frac{BC}{BA} = \frac{5}{BA} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow$ $BA = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} \Rightarrow AO_1 = 1{,}5\sqrt{5}$

$AO_2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{5} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$

Ответ: $AO_1 = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, $AO_2 = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/2]$

$f(x) = f(1) + f(x) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(y) > f(x)$

$S(f(x))$ = кол-во таких зн. $f(x)$ на $[2;22]$

a	$f(a)$	$f(x)$	$S(f(x))$
2	1	1	2
3	1	2	3
4	2	3	6
5	2	4	5
6	2	5	1
7	3	6	2
8	3	8	1
9	3	9	1
10	3		
11	5		
12	3		
13	6		
14	4		
15	3		
16	4		
17	8		
18	4		
19	9		
20	4		
21	4		
22	6		

Всего: 21 число

$N(f(y))$ — кол-во знач. $f(y)$, больших ~~знач~~ $f(x)$

Тогда ответом будет сумма ~~произв.~~ всех $S(f(x)) \cdot N(f(y))$

(т.е. выбрать 1 из $S(f(x))$ вар. и выбрать 1 из $N(f(y))$ вар. $f(y)$, при которых $f(y) > f(x)$)

$S(f(x))$	$N(f(y))$
2	19
3	16
6	10
5	5
1	4
2	2
1	1
1	0

$2 \cdot 19 + 3 \cdot 16 + 6 \cdot 10 + 5 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 =$

$= \underline{38} + 48 + \underline{60} + 25 + 4 + 4 + \underline{1} =$

$= 99 + 25 + 48 + 8 =$

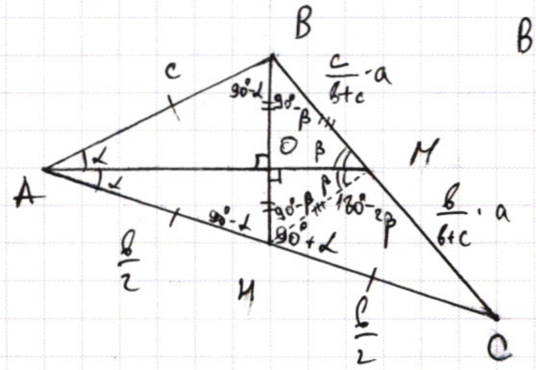
$= 99 + 55 + 1 + 25 =$

$= 100 + 55 + 25 = 180$

Ответ: всего 180 таких пар

№ 2

$P_{ABC} = 900 = a + b + c$



$\left.\begin{array}{l}\angle BAO = \angle OAH \\ BH \perp AM\end{array}\right\} \Rightarrow AO$ – бисс. и выс. $\Rightarrow AB = AH$; $BO = OH$

$c = \frac{b}{2}$

$2c = b \quad (b \underset{2}{\equiv} 0)$

Т. о бисс.: $\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{MC} \Rightarrow BM = \frac{c}{b+c}a$

$MC = \frac{b}{b+c}a$

$BM = \frac{c}{3c}a = \frac{1}{3}a$

$MC = \frac{2c}{3c}a = \frac{2}{3}a$

$b + c > a \qquad 3c > a$

$1{,}5b > a$

$MH = BM = \frac{1}{3}a$

$a + b + c = 900 \Rightarrow a + 3c = 900$

$a = 900 - 1{,}5b$

$a = 3(300 - \frac{b}{2})$

$a < 1{,}5b$

$900 - 1{,}5b < 1{,}5b$

$900 < 3b$

$b > 200$

$\begin{cases} a = 900 - 1{,}5b \\ c = \frac{b}{2} \\ b > 200 \\ b \vdots 2, \; a \vdots 3 \end{cases}$

~~Числа в выдаче~~ a, c – ~~нев.~~

Пусть $a = 3$. Тогда $1{,}5b = 900 - 3$

$b = \frac{900 \cdot 2}{3} - \frac{3}{1{,}5} = 600 - 2 = 598$

$c = \frac{b}{2} = \frac{598}{2} = 299$

Тогда $b \in [202; 598]$, $b \vdots 2$

Но: $a + c > b$

$a > \frac{b}{2}$

$900 - 1{,}5b > 0{,}5b$

$2b < 900$

$b < 450$

$b + c > a$

$1{,}5b > 900 - 1{,}5b$

$3b > 900$

$b > 200$

$a + b > c$

$900 - 0{,}5b > 0{,}5b$

$b < 900$

Тогда $b \in [202; 448]$, $b \vdots 2 \Rightarrow$ Всего таких Δ $\frac{448 - 202}{2} + 1 = \boxed{124}$

Ответ: 124 треугольника

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$a = a$

$b = aq$

$c = aq^2$

$d = aq^3$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$D = 4b^2 - 4ac = 4(aq)^2 - 4a \cdot aq^2 = 4a^2q^2 - 4a^2q^2 = 0$

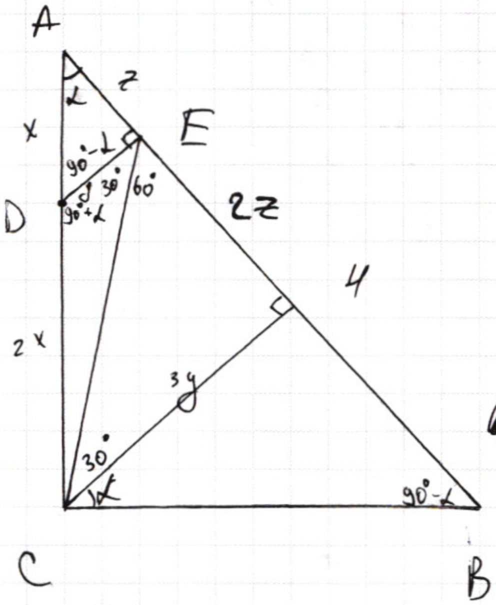
$d = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a} = \frac{aq}{a} = q$

$aq^3 = q \Rightarrow aq^2 = 1$

$c = aq^2 = 1$

Ответ: III член ГП $c = 1$

№4



Дано: $\angle ACB = 90°$, $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$ (т.е. $AD = x$, $DC = 2x$), $DE \perp AB$, $\angle CED = 30°$, $AC = \sqrt{7}$

Найти: $tg\angle BAC$; S_{CED}

Решение:

1) $tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE}$ $\quad CH \perp AB$

$\triangle ADE \sim \triangle AHC$

$\frac{AE}{AH} = \frac{AD}{DC} = \frac{1}{3} \Rightarrow AE = z$, $EH = 2z$

$\frac{DE}{CH} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow DE = y$, $CH = 3y$. $\quad DE \parallel CH$ ($DE \perp AB$, $CH \perp AB$) $\Rightarrow \angle DEC = \angle ECH = 30°$

Тогда $\frac{EH}{CH} = tg 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 2z = \frac{\cancel{3}^{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}_{1}} y \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{3}} z$; $\quad z = \frac{\sqrt{3}}{2} y$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$tg\,\alpha = \frac{DE}{AE} = \frac{y}{z} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}z}{z} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

б) $S_{CED} = S_{ACH} - S_{ADE} - S_{CEH}$

$tg^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} \Rightarrow tg^2\alpha(1-\sin^2\alpha) = \sin^2\alpha$

$tg^2\alpha - tg^2\alpha\sin^2\alpha = \sin^2\alpha$

$\sin^2\alpha(tg^2\alpha + 1) = tg^2\alpha$

$\sin^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{tg^2\alpha+1} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{tg^2\alpha+1}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{4}{3}+1}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}}$

$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$\sin\alpha = \frac{y}{x} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$\frac{y}{\frac{\sqrt{7}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow y = \frac{2}{3}$

$z = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow S_{ACH} = \frac{CH\cdot AH}{2} = \frac{3y\cdot 3z}{2} = \frac{3\cdot\frac{2}{3}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \sqrt{3}$

$S_{CEH} = \frac{CH\cdot EH}{2} = \frac{3y\cdot 2z}{2} = 3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$S_{ADE} = \frac{AE\cdot DE}{2} = \frac{y\cdot z}{2} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

$S_{CED} = S_{ACH} - S_{ADE} - S_{CEH} = \sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{3-2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

Ответ: а) $tg\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$ б) $S_{CED} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{y(x-6)-(x-6)} \\ (x-6)^2-16+2(y-1)^2-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-6y)^2=(x-6)(y-1) \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$

$x^2-12x+36$ $2y^2-4y+2$

$34 \cdot 4 = 136$, $136 \cdot 18$: $1088 + 136 = 2448$

Пусть $a=x-6$, $b=y-1$

$a-6b=x-6-6y+6=x-6y$

$(a-6b)^2=ab$

$a^2+2b^2=18$

$a^2=18-2b^2=2(3-b)(3+b)=2(4-y)(y+2)$

$a=\sqrt{2(3-b)(3+b)}$

$a^2-12ab+36b^2=ab$

$a^2 + 36b^2=13ab$

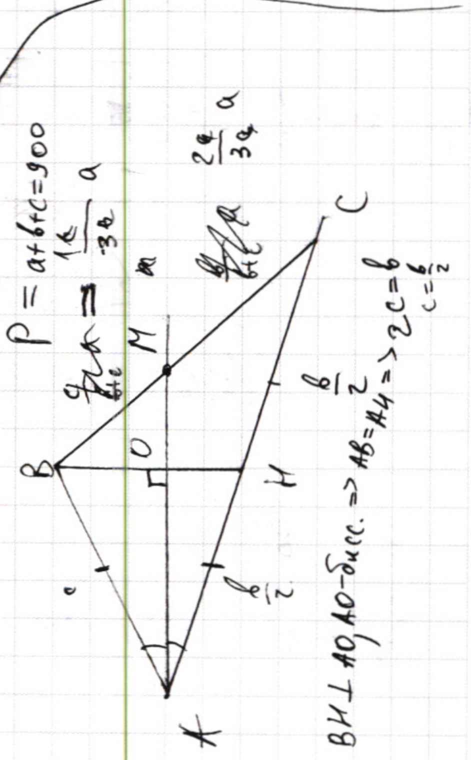
$13(ab-3b^2)=18-2b^2$

$13ab-36b^2=18-2b^2$

$13ab-34b^2=18$

$34b^2-13ab+18=0$

$D=169a^2-4\cdot34\cdot18=169a^2-2448$



$$8x-6|2x-1|\le ax+b\le -8x^2+6x+7$$

При $x=1$: $8-6\cdot|2-1|\le a+b\le -\cancel{8}+6+\cancel{7}$ $\quad -1$

$8-6\le a+b\le 5$

$2\le a+b\le 5$ $\qquad 2-a\le b\le 5-a$

При $x=0$: $0-6\le b\le 7$

$b\in[6;7]$

$b_{min}=-6 \Rightarrow$ ~~a_{max}~~ $2\le a_{max}-6\le 5$

$8\le a_{max}\le 11$

$b_{max}=7 \Rightarrow 2\le a_{min}+7\le 5$

$-5\le a_{min}\le -2$

$a\in[-5;11]$

При $x=\frac{1}{2}$: $8\cdot\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}a+b\le -8\cdot\frac{1}{4}+\frac{6}{2}+7$

$4\le\frac{1}{2}a+b\le -2+3+7$

$4\le\frac{1}{2}a+b\le 8$ $\qquad 4-\frac{1}{2}a\le b\le 8-\frac{1}{2}a$

При $x=-\frac{1}{2}$: $-8\cdot\frac{1}{2}-6\cdot|-2|\le -\frac{1}{2}a+b\le -8\cdot\frac{1}{4}-\frac{6}{2}+7$

$-4-12\le -\frac{1}{2}a+b\le -2-3+7$

$-16\le -\frac{1}{2}a+b\le 2$

$\frac{1}{2}a-16\le b\le 2+\frac{1}{2}a$ $\qquad \frac{448-202}{2}=\frac{246}{2}=123$

2 $\quad$ 8 $\qquad\qquad$ 4 $\quad$ 16

$\frac{8-2}{2}=3$ $\qquad$ 2, 4, 6, 8 $\qquad$ $\frac{16-4}{2}+1=7$ $\qquad$ 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$tg^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$

$tg^2\alpha - tg^2\alpha \cdot \sin^2\alpha = \sin^2\alpha$

$tg^2\alpha = \sin^2\alpha(tg^2\alpha + 1)$

$\sin^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{tg^2\alpha+1}$

$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{tg^2\alpha+1}} = \frac{\frac{2}{\sqrt3}}{\sqrt{\frac43+1}} = \frac{\frac{2}{\sqrt3}}{\sqrt{\frac73}} = \frac{\frac{2}{\sqrt3}}{\frac{\sqrt7}{\sqrt3}} = \frac{2}{\sqrt7}$

$AD = \frac13 AC = \frac{\sqrt7}{3} \Rightarrow DE = \frac23$

$CH = 2$

$z = \frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{\sqrt3}{3}$

$1-\sin^2\alpha =$

$S_{ACH} = \frac{CH \cdot AH}{2} = \frac{3y\cdot 3z}{2} =$

$\sqrt3 = 1{,}73$

$S_{ACH} = 1{,}73$

$S_{CEH} = \frac{2}{1{,}75} = \frac{4}{3{,}5} = \frac{8}{7} \approx 1{,}12$

1 2
2 3
3
4
5
6
8
9

$2+3+6+5+1+2+8+1 =$
$= 1+2\cdot3+3+5+6 =$
$= 9+11 = 20$

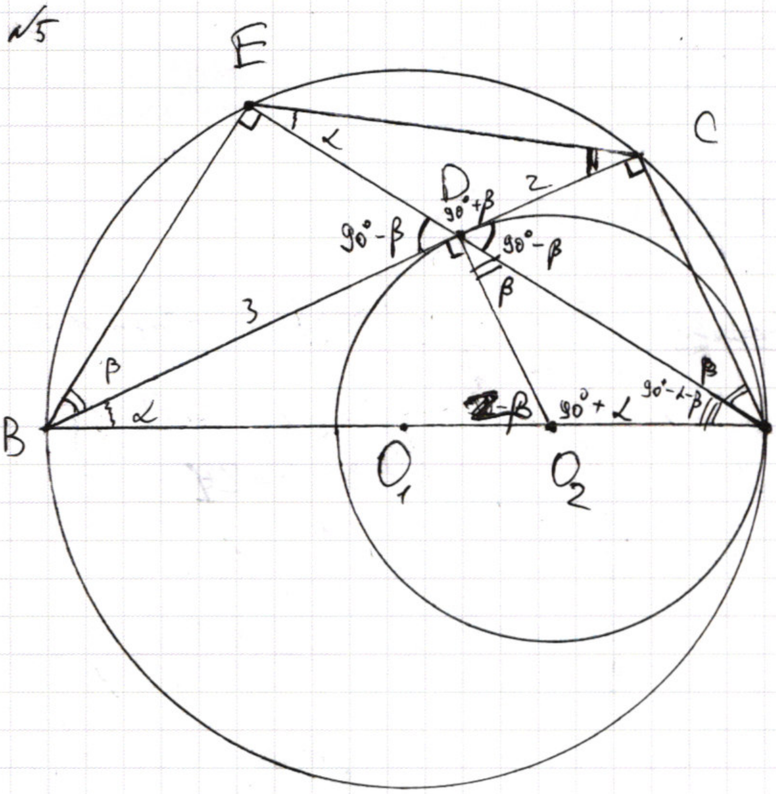
$f(10) = f(2)+f(5) = 3$

x	f(x)	x	f(x)
1	0	11	5
2	1	12	3
3	1	13	6
4	2	14	4
5	2	15	3
6	2	16	4
7	3	17	8
8	3	18	4
9	3	19	9
10	3	20	4
		21	4
		22	6

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№5



$\cancel{\frac{AB}{2}}$

$DC=2$

$DB=3$

$x=AO_1-?$

$y=AO_2-?$

S_{BACE}

$\beta=45°-\frac{\alpha}{2}$

$\beta=90°-\alpha-\beta$

$2\beta=90°-\alpha$

$\alpha=90°-2\beta$

$AO_2=DO_2=y$

$\triangle BDO_2 \sim \triangle BAC$ $\quad \frac{BD}{BC}=\frac{DO_2}{AC}$

$\frac{3}{5}=\frac{y}{AC}$

$y=\frac{3}{5}AC$

$\cancel{34=17\cdot 2}$

$\cancel{2\cdot 3\cdot 6\cdot 2\cdot 17=3\cdot 6\cdot 17}$

№7

$f(23)=11$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/2]$

$f(x)=f(1)+f(x) \Rightarrow f(1)=0$

$\cancel{f(0)=f(0)+f(x)}$

$\cancel{f(x)=0}$

$\frac{12}{30}=\frac{2}{5}=0{,}4$

за $\frac{3}{8}\approx 0375$ олимпиада

$f(2)=1$

$f(1)=f(x)+f(\frac{1}{x})$

$f(2x)=f(x)+1$

$f(\frac{1}{x})=-f(x) \Rightarrow f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$

$f(3x)=f(x)+1$

$f(5x)=f(x)+1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$a - 1$ в гп

$b - 2$

$c - 3$

$b = aq$

$c = aq^2$

$d - 4$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$D = 4b^2 - 4ac = 4a^2q^2 - 4a^2q^2 = 0$

$d = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a} = \frac{aq}{a} = q$

$d = aq^3$

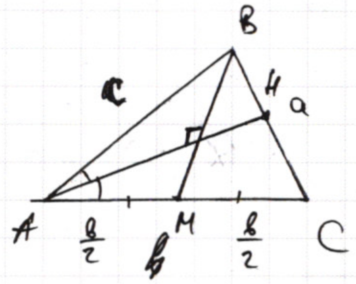
$aq^3 = q$

$aq^2 = 1 = c \Rightarrow c = aq^2$

№2

$P = 900$

$a+b+c = 900$



$\frac{b}{c} = \frac{CH}{HB}$

???

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

№3

$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}$

$x \geq 6y$

$t = x - 6y$

$t = \sqrt{xy + 6 - x - 6y}$

$t^2 = (x-6y)^2 = x^2 - 12xy + 36y^2$

$x^2 - 12xy + 36y^2 = xy + 6 - x - 6y$

$x^2 + x + 36y^2 + 6y - 13xy - 6 = 0$

$x(x+1) + 6y(6y+1) - 13xy - 6 = 0$

$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$

$x(x-12) + 2y(y-2) + 20 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(x-6y)^2 = y(x-6) - (x-6) = (y-1)(x-6)$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 16 - 2 = 0$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$a = x-6$

$b = y-1$

$a - 6b = x - 6 - 6y + 6 = x - 6y$

$$\begin{cases} ab = (x-6y)^2 = (a-6b)^2 \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$$

$\cancel{a^2 + 2ab + 2b^2 = 18 + 2ab}$

$$\begin{cases} ab = (a-6b)^2 \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$$

$a^2 = 18 - 2b^2$

$a = \sqrt{2}\sqrt{9-b^2} = \sqrt{2(3-b)(3+b)}$

$(a-6b)^2 = a^2 - 12ab + 36b^2$

$a^2 + b^2 = 18 - b^2$

$a^2 + 2ab + b^2 = 18 - b^2$

$a^2 + 2a^2 - 24ab + 72b^2 + b^2 = 18 - b^2$

$3a^2 - 24ab + 73b^2 = 18 - b^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{x^2}+x+\overset{34}{\cancel{36}}y^2+6y-13xy-6=\cancel{x^2}+\cancel{2y^2}-12x-4y+20$

$13x+34y^2+10y-13xy-26=0$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$

$(x-6)^2-16+2(y-1)^2-2=0$

$x^2-12x+36$ $\quad 2y^2-4y+2$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=24$

$(x-6y)^2=xy-6y-x+6$

$x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6=y(x-6)-(x-6)=(y-1)(x-6)$

$$\begin{cases}(x-6y)^2=(y-1)(x-6)\\(x-6)^2+2(y-1)^2=24\end{cases}$$

$(x-6)^2=24-2(y-1)^2$

$x-6=\frac{(x-6y)^2}{y-1}=\sqrt{2(12-y^2+4y-4)}=\sqrt{2(-y^2+4y+8)}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

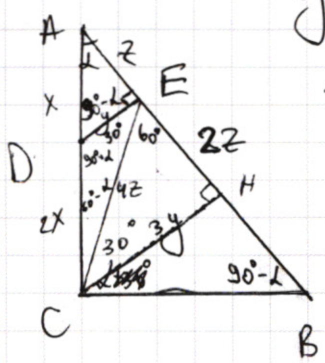
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№4

$\frac{BC}{AC}$ – ?

$tg\alpha$ – ?



$\angle CED = 30° \Rightarrow \angle CEB = 60°$

$\angle ECB = \cancel{90°} \; 180° - 60° - 90° + \alpha = \alpha + 30°$

$\angle ACE = 90° - 30° - \alpha = 60° - \alpha$

$\angle EDC = 180° - 90° + \alpha = 90° + \alpha$

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ по 2 $\angle$

$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$

$AE \cdot AB = AD \cdot AC = \frac{1}{3} AC^2$

$\cancel{\frac{BC}{AB}}$

$tg\,\alpha = \frac{DE}{AE}$

$\sin\alpha = \frac{DE}{x} = \frac{BC}{AB}$

$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$

$AB \cdot DE = BC \cdot \cancel{x} = \frac{1}{3} BC \cdot AC$

$\cancel{DE \cdot AB = AD \cdot BC = \frac{1}{3}}$

$tg\,30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{2z}{CH} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{2z}{3y} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cancel{6}^{2} z = \cancel{3}\sqrt{3}\, y$

$y = \frac{2}{\sqrt{3}} z$ $\quad z = \frac{\sqrt{3}}{2} y$

$\cancel{\frac{DE}{y}}$ $DE = y$

$z = AE$

$tg\,\alpha = \frac{DE}{AE} = \frac{y}{z} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)