МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 12

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c – соответственно первый, второй и третий члены некоторой арифметической прогрессии (при этом a, b, c не заданы, но известно, что $c < 0 < a$). Меньший корень уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$ является четвёртым членом этой прогрессии. Найдите его.

2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt[3]{x^2 - y^2} = 57, \\ y + \sqrt[3]{x^2 - y^2} = -68. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12468.

4. [5 баллов] Четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм с тупым углом C. Пусть E – точка пересечения прямой AB с перпендикуляром к AC, проходящим через C, а прямая ED пересекает диагональ AC в точке N. Известно, что $CN = 4$, $AN = 8$, $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle ADC\right) = \frac{2}{5}$.

   а) Найдите $\operatorname{tg}\angle BAC$.

   б) Найдите площадь треугольника ENA.

5. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN, касается стороны AB в точке A. Прямая AC повторно пересекает окружность в точке K. Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь четырехугольника $ANKM$, если известно, что $AB = \sqrt{10}$, $BM = \sqrt{2}$.

6. [5 баллов] На доску выписаны попарно различные натуральные числа: часть из них делятся на 5, но не делятся на 7, остальные же наоборот делятся на 7 и при этом не делятся на 5. Оказалось, что выбрать тройку чисел из выписанных на доску так, чтобы среди них оказалось хотя бы одно кратное 5 и хотя бы одно кратное 7, можно 49 способами. Сколько было выписано чисел?

7. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$4 - 3x - |6x - 2| \leqslant ax + b \leqslant \frac{17 + 15x}{5 + 3x}$$

выполнено для всех x на промежутке $[-1; 1]$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

Пусть d - разность этой прогрессии, тогда:

$a = a$

$b = a + d$

$c = a + 2d$

Подставим получившиеся значения в уравнение:

$ax^2 + 2\cdot(a+d)x + (a+2d) = 0$

$2(a+d) = a + (a+2d) = a+c$

$ax^2 + \cancel{2}(a+c)x + c = 0$

Поделим обе части на a (a по усл. >0) $\Rightarrow$

$x^2 + \frac{a+c}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$x^2 + x + \frac{c}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$x(x+1) + \frac{c}{a}(x+1) = 0$

$(x + \frac{c}{a})(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{c}{a}$ (т.к. $c < 0 < a, \neq 0$

$x_1 > 0$)

$\underline{x_2 = -1} < 0$ это и есть меньший корень

Ответ: -1

$x + \sqrt[3]{(x-y)(x+y)} = 57$

$y + \sqrt[3]{(x-y)(x+y)} = -68$

$x+y + 2\sqrt[3]{(x+y)(x-y)} = -11$

$(x-y) = 125$

$(x+y) = t$

$-68+57$ $\quad 57+68=125$

$68-57=11$

$t + 2\cdot 5\sqrt[3]{t} = -11$

$\sqrt[3]{t} = l$

$l^3 + 10l + 11 = 0$

$l^3 + 0l^2 + 10l + 11 \,|\, l+1$

$l^3 + l^2 \quad | \; l^2 - l + 11$

$-l^2 + 10l$

$-l^2 - l$

$11l + 11$

$l = -1$

~~$-1 - 10 + 11 = 0$~~

~~$l^3 + 10l + 11 \;|\; (l+1)$~~

$(l^2 - l + 11)(l+1)$

$l^3 + \cancel{l^2} - \cancel{l^2} - l + 11l + 11$

$l^3 + 10l + 11 = 0$

$(l+1)(l^2 - l + 11) = 0$

$l^2 - l + 11 = 0$

$D < 0$

$l_1 = -1$

$t = -1$

$(x-y) = 125$

$x+y = -1$

$2x = 124$

$x = 62 \Rightarrow y = -63$

3^0

$c < 0 < a$

a, b, c – арифм. прогр.

$d < 0$

$a \; ; a+d ; a+2d$

$ax^2 + 2(a+d$

$ax^2 + (a+c)x + c = 0$

$x^2 + x + \frac{c}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$x(x+1) + \frac{c}{a}(x+1) = 0$

$(x + \frac{c}{a})(x+1) = 0$ $\quad$ Корни: -1 и $-\frac{c}{a} > 0$

-1

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.

$$\begin{cases} x + \sqrt[3]{x^2-y^2} = 57 & (1) \\ y + \sqrt[3]{x^2-y^2} = -68 & (2) \end{cases}$$

При вычитании ур-я (2) из (1) получим:

$$(x-y) + (\cancel{\sqrt[3]{x^2-y^2} - \sqrt[3]{x^2-y^2}}) = 125$$

$$x - y = 125 \quad (4)$$

При сложении уравнений (1) и (2) получим:

$$(x+y) + 2\sqrt[3]{x^2-y^2} = -11 \quad (3)$$

Подкоренное выражение можно разложить как

$x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$ => подставим его в уравнение (3):

$$(x+y) + 2\sqrt[3]{(x+y)(x-y)} = -11 \quad (5)$$

Подставим значение из уравнения (4) в уравнение (5):

$$(x+y) + 2\cdot 5\sqrt[3]{x+y} = -11$$

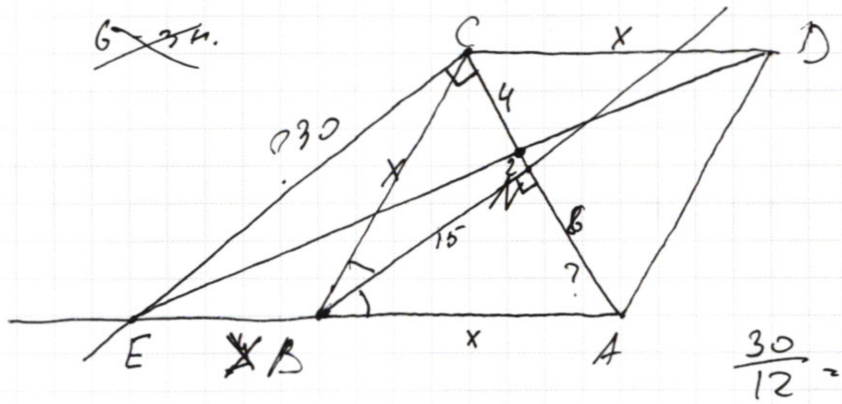
Пусть $t = \sqrt[3]{x+y}$, тогда: $t^3 + 10t + 11 = 0$ (6)

Выражение (6) можно представить как

$(t+1)(t^2-t+11) = 0$. Единственное решение $t_1 = -1$, т.к. t^2-t+11 имеет отрицательный дискриминант $D = 1 - 4\cdot 11 = -43 < 0$

См. на след. стр.

~~6 зн.~~



$tg\left(\frac{1}{2}\angle ADC\right) = \frac{2}{5}$

$225+36=261$

$\frac{30}{12} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$;

$S_{ENA} = NA \cdot \frac{1}{2} \cdot EC =$

$= 8 \cdot 30 = 120$

4 3 2

5 4 3

3 2 1

$10^5 \cdot a + 10^4 \cdot b + 10^3 \cdot c + 10^2 \cdot d + 10^1 \cdot e + 10^0 \cdot f$ 9 чисел.

$f = 6$

5

1 ←

56

1 2

? 1156

3

1

11156

999

11156 +

9999 + 999 + 99

+ 1156 + 156

$$\begin{array}{r} 11156 \\ +\ 1156 \\ \hline 12312 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12312 \\ +\ 156 \\ \hline 12468 \end{array}$$

11100 − 3

11097

10000 + 1000 + 100 −

− 3

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

продолжение задачи 2.

$t=-1 \Rightarrow \sqrt[3]{x+y}=-1 \Rightarrow x+y=-1 \quad (7)$

Составим систему из уравнений (7) и (4)

$\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=125 \end{cases}$ $\quad 2x=124 \Rightarrow \underline{x=62}$

$\underline{y=-63}$

Ответ: $x=62$; $y=-63$.

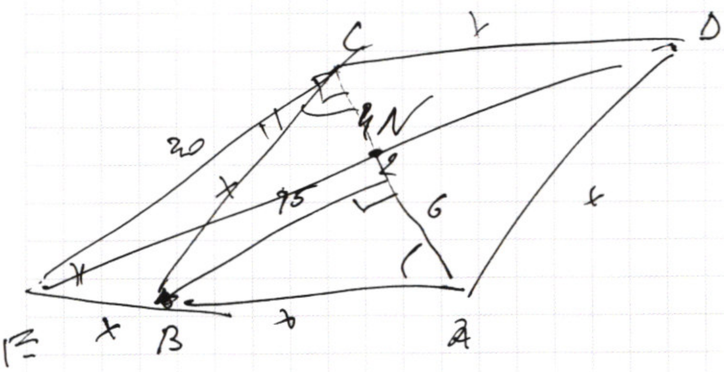
$b^3 + 2bb + 2b^2 = 0$

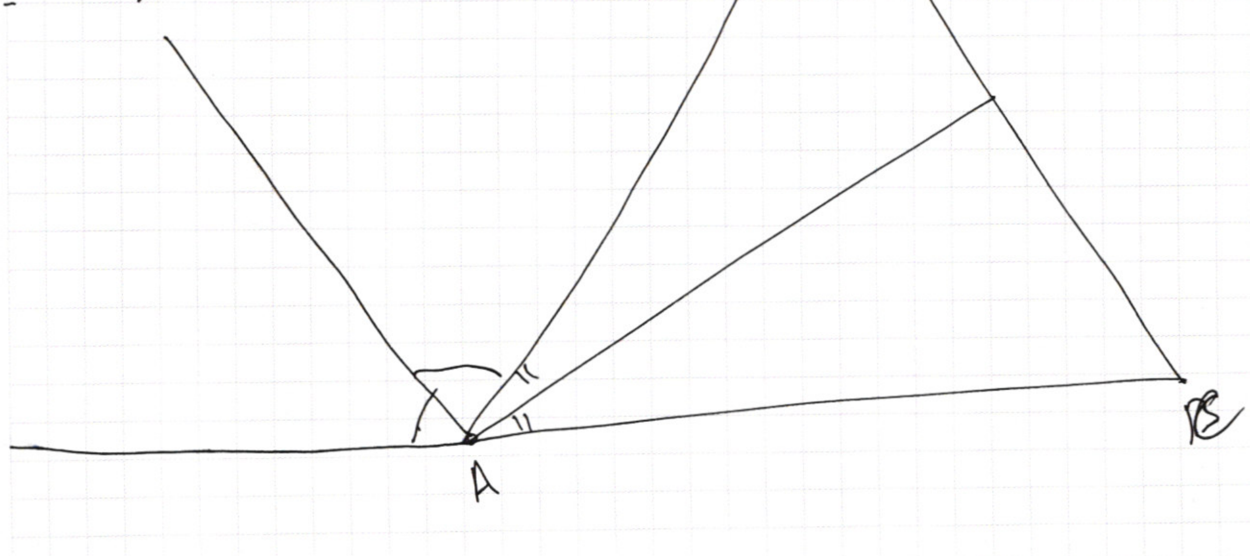
$b + 2b^2 = 0$

$t = 2t^2 + 3t \cdot 0 + 2\,27 = 0$

1 2 3 4 5 6 7 8

$\sqrt{10} + \sqrt{2} \neq \sqrt{5}$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3.

Сначала оценим какие степени ~~пят~~ десяток могут создать такую ситуацию.

~~Остат~~ Высшая ~~остаток~~ степень 10-ки не может быть 7 ~~10^7~~, т.к. при этом в сумму остатков входило бы 6-значное число, но число 12468 - пятизначное.

Высшая ~~остаток~~ степени 10-ки может быть 6 ~~10^6~~, например, число 111111.

$11111 + 1111 + 111 = 12333.$

Высшая ~~остаток~~ степень 10-ки может быть 5 ~~10^5~~, например, число 999999.

$9999 + 999 + 99 = 11097.$

Высшая степень 10-ки не может быть ~~10^4~~ 4 и ниже, т.к. при этом даже ~~при~~ у числа 999999 сумма остатков будет меньше 12468.

Нам подходят лишь степени 6, 5, 4, или степени 4, 3, 2.

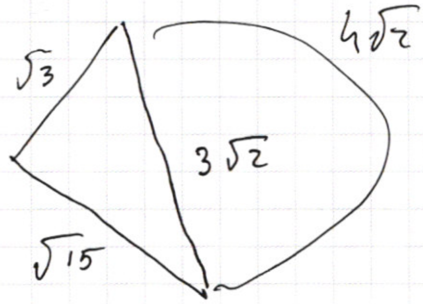
Заметим, что последняя цифра 6-ти значного числа ~~в~~ повторяется в сумме остатков 3 раза

см. след. стр.

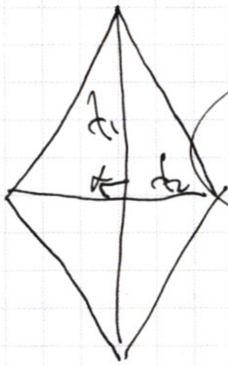
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\frac{4}{3}\sqrt{3}$

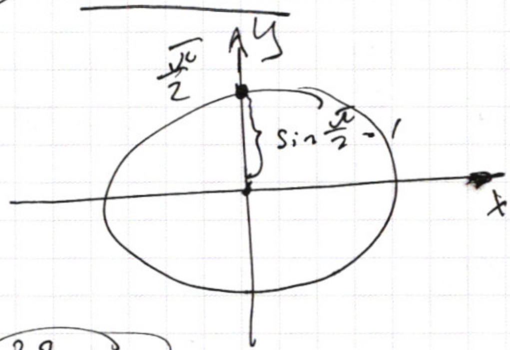


$\cdot \frac{4}{3} \Rightarrow$



$S = d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha =$

$2\sqrt{2} = r$



$\frac{4}{3}\sqrt{10} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{2} \cdot 1 = \frac{32}{3}\sqrt{5}$

$d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение задачи 3.

Последняя цифра суммы 8 => последняя цифра 6-значного числа равна 6 ($6 \cdot 3 = 1\underline{8}$).

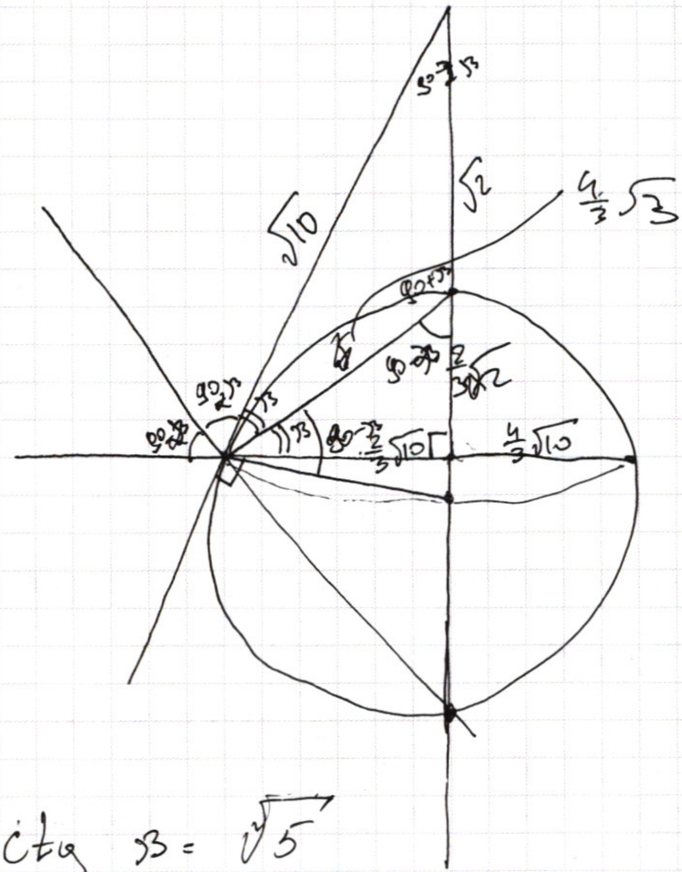
Для удобства обозначим 6-значное число n, а число $12468 = k$.

Во всех вариантах степеней 10^2 встречается в сумме трижды. => Предпоследняя цифра числа $n = 5$ ($5 \cdot 3 = 1\underline{5}$; $\underline{5+1=6}$)
переход через разряд у 18-ти.

В одном варианте степеней 10^3 встречается 3 раза, а в другом, 2 раза. Сейчас мы определим, какие степени используются, т.к. число 5 в сумме дало 15, то исходя из перехода через разряд, 3-ая цифра от конца числа n, при умножении на 2 или 3 даёт на конце $4-1=3$. Число, при умножении на 2, не может иметь на конце нечетную цифру => Мы однозначно определили степени 10-ок. (Это степени 6, 5 и 4) Число, которое при умножении на 3 даёт на конце 3, это число $\underline{1}$.

Перехода через разряд нет

см. след. стр.



$$\cancel{\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8-x}}{\sqrt{x}}}$$

$$\cancel{\sqrt{5} = \frac{\sqrt{8-x}}{x}}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10-(x+\sqrt{2})^2}}{x}$$

$$\sqrt{5} =$$

$$5 = \frac{10-(x+\sqrt{2})^2}{x^2}$$

$$ctg\ \beta = \sqrt{5}$$

$$ctg\ \beta = \frac{x}{\frac{4}{3}\sqrt{3}} = \qquad \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10-(x+\sqrt{2})^2}}{x}$$

$$10 - x^2 - 2\sqrt{2}x - 2 = 5x^2$$

$$6x^2 + 2\sqrt{2}x - 8 = 0$$

$$D = 8 + 24\cdot 8 = 25\cdot 8\ \cancel{(15\sqrt{2})^2}$$

$$= 5^2\cdot 2^2\cdot 2$$

$$\sqrt{D} = 10\sqrt{2}$$

$$\frac{x}{\frac{4}{3}\sqrt{3}} = \sqrt{5} \qquad 5x^2 = -x^2 - 2\sqrt{2}x - 2 + 10$$

$$x = \frac{4}{3}\sqrt{15} \qquad 6x^2 + 2\sqrt{2}x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-2\sqrt{2} \pm 10\sqrt{2}}{12} = \cancel{\sqrt{2}}\ \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$$\sqrt{10 - 2\cdot\frac{5^2}{3^2}} = \sqrt{\frac{90}{3^2} - \frac{2\cdot 5^2}{3^2}} = \sqrt{\frac{40}{3^2}} = \frac{2}{3}\sqrt{10}$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{20} \qquad 2\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$\sqrt{2}$$

$$\frac{4}{3}\sqrt{15} \qquad 15 + 3 = 18 \qquad \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \qquad \frac{4}{3}\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$$

$$\sqrt{18} =$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение задания 3 (часть 3).

4-я с конца цифра – это 1 ($1 \cdot 2 = 2$) или 6 ($6 \cdot 2 = 12$)

Если 4-я с конца цифра это 1, то 5-я с конца $= 1$ ($1 \cdot 1 = 1$)

Если 4-я с конца цифра это 6, то 5-я с конца $= 0$ ($0 \cdot 1 = 0$; $\underbrace{0+1=1}_{\text{переход через разряд.}}$)

6-я с конца цифра числа n – любая, от 1 до 9). Итого: у нас 2 варианта на 4-й с конца цифры, в каждом из этих двух вариантов сущ-ет ещё 9 вариантов. =>

Общее число 6-значных чисел $=$ $= 2 \cdot 9 = 18$ чисел

Ответ: 18 чисел.

$4-3x-|6x-2| \leq \frac{17+15x}{5+3x}$

$14^2=$

$4-3x-|6x-2| \leq 5-\frac{8}{5+3x}$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ +14 \\ \hline 196 \end{array}$$

$-3x-|6x-2| \leq 1-\frac{8}{5+3x}$

$x > \frac{1}{3}$:

196

$-3x-6x+2 \leq 1-\frac{8}{5+3x}$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 12 \\ \hline 26 \\ +13 \\ \hline 156 \end{array}$$

$-9x+1 \leq -\frac{8}{5+3x}$

$9x-1 \geq \frac{8}{5+3x}$

$15+19=34$

352

$(3t-1)(5+t) \geq 8$

$15t+3t^2-5-t-8 \geq 0$

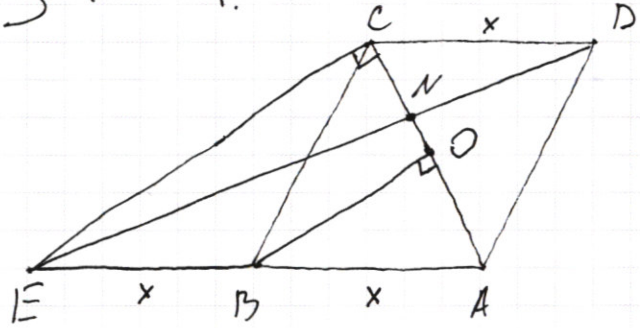
$3t^2+14t-13 \geq 0$

$D = 14^2+13\cdot12$

$D = \cancel{14^2+} \; 352$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4.



Проведем из B перпендикуляр на AC. Пусть его основание это т. O.

Пусть $AB = CD = x$, тогда:

$\triangle CND$ и $\triangle ENA$ подобны ($CD \parallel EA \Rightarrow \angle NAE = \angle DCN$, $\angle CND = \angle ENA$) $\Rightarrow$ Коэффициент подобия $K = \frac{AN}{NC} = \frac{8}{4} = 2$. $\Rightarrow EA = CD \cdot K = 2x \Rightarrow EB = BA = x$.

Рассмотрим $\triangle ECA$. В нем CB - медиана, проведенная из прямого угла $\Rightarrow CB = EB = BA = x$.

$\Rightarrow ABCD$ - ромб ($AB = BC$). $\Rightarrow \triangle BAC$ - равнобедр.

$\Rightarrow BO$ в $\triangle ABC$ - биссектриса и медиана.

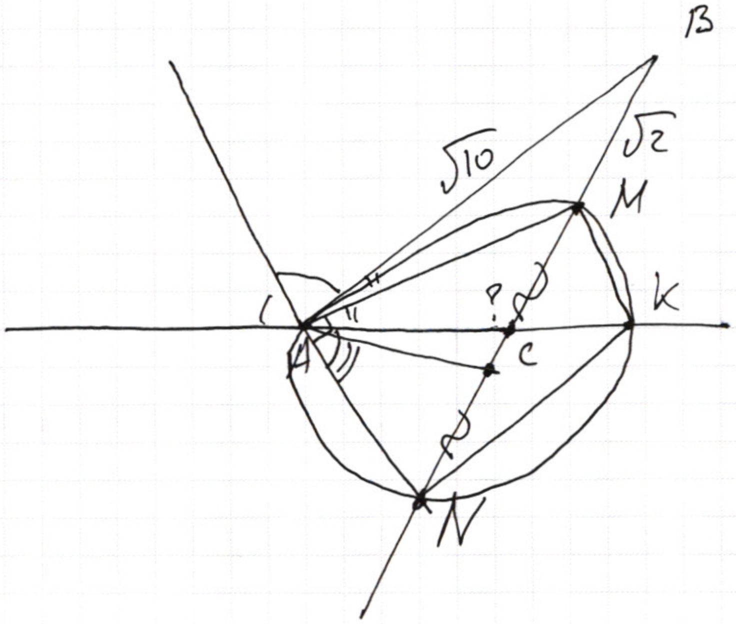
$\angle CDA = \angle CBA$ (в параллелогр.) $\Rightarrow \angle OBA = \frac{1}{2}\angle CDA$. $OA = \frac{1}{2} CA = \frac{1}{2}(CN + NA) = 6$.

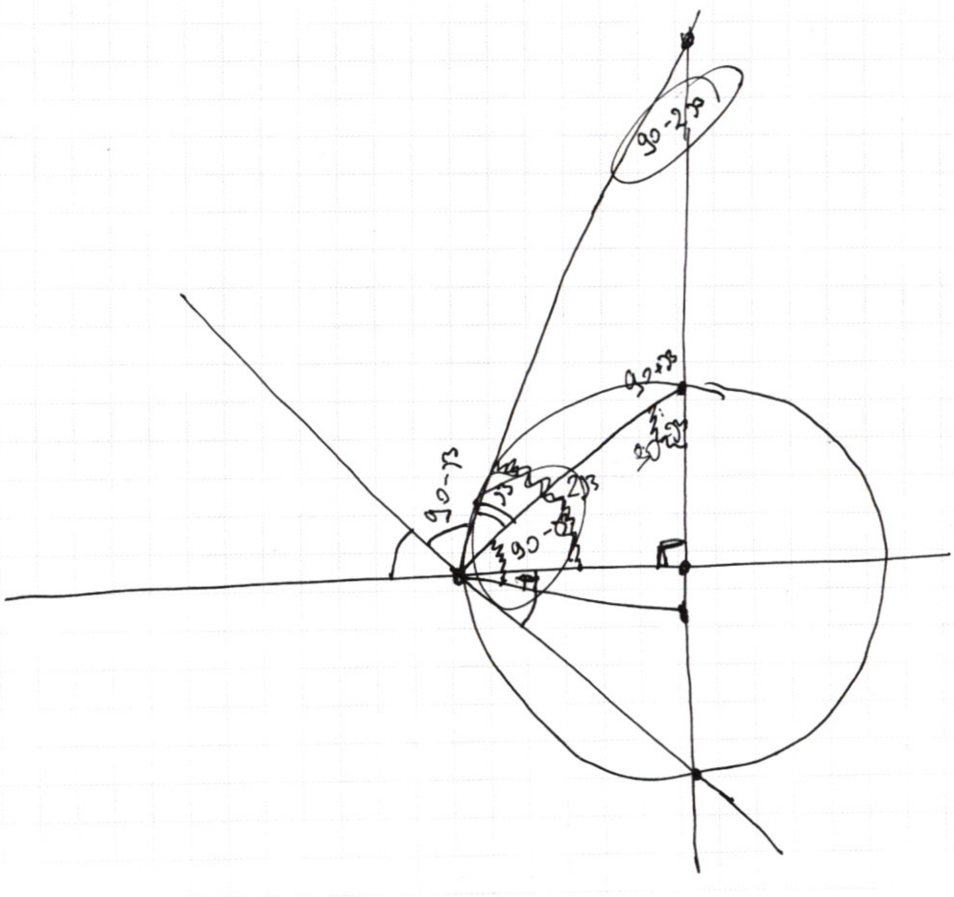
$\Rightarrow BO = \frac{OA}{tg\angle OBA} = \frac{6}{\frac{2}{5}} = 15$. В $\triangle CEA$ BO - средняя линия $\Rightarrow EC = 2 \cdot BO = \underline{30}$

$tg\angle BAC = \frac{EC}{CA} = \frac{30}{12} = \underline{\frac{5}{2}}$

$S_{ENA} = \frac{1}{2} \cdot NA \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 8 = \underline{120}$

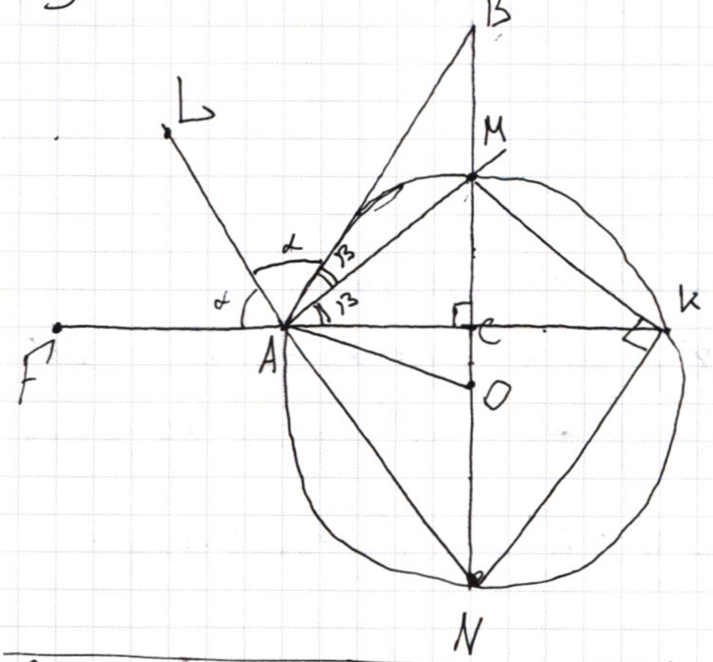
Ответ: $tg\angle BAC = \frac{5}{2}$; $S_{ENA} = 120$


B
$\sqrt{10}$
$\sqrt{2}$
M
K
C
N


90-2β
90-β

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5.



Пусть ~~в~~ O — центр описанной окр-ти $\triangle AMN$. $O \in MN$, т.к.

1. *Угол между биссектрисами $\angle FAL$ (где F находится на продолжении стороны AC за т. A, а L находится на продолжении стороны AN за точку A.)

* Пусть угол $LAB = \alpha$; $\angle BAM = \beta \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle FAC = 180 = 2\alpha + 2\beta \Rightarrow \angle LAB = \alpha + \beta = \frac{180}{2} = 90°$

и $\angle BAC$ равен $90°$ ($\angle LAM = 90°$) $\Rightarrow \angle MAN = 90°$

Т.к. BA касается окр-ти, то $\angle BAO = 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle MAO = 90 - \beta = \angle AMO \Rightarrow \angle AMB = 90 + \beta \Rightarrow \angle ABC =$ $= 90 - 2\beta \Rightarrow \angle ACB = 180 - \angle BAC - \angle ABC = \underline{90°}$

Пусть $MC = x$. $\Rightarrow AC = \sqrt{10 - (x+\sqrt{2})^2}$. Т.к. в $\triangle ABC$ AM — биссектриса, то по св-ву биссектриса

$$\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CM} \Rightarrow \qquad \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10-(x+\sqrt{2})^2}}{x}$$

$$6x^2 + 2\sqrt{2}x - 8 = 0$$

$$x = \frac{2}{3}\sqrt{2} = MC \Rightarrow AC = \frac{2}{3}\sqrt{10} \Rightarrow AM = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

см. на след стр.

$\cancel{x}\cancel{(x-1)(x-2)})$

$\cancel{\dfrac{x!}{(x-3)!\,3!}}$ -

$\dfrac{(x+y)!}{(x+y-3)!\,3!} - \dfrac{x!}{(x-3)!\,3!} - \dfrac{y!}{(y-3)!\,3!} = 49$

$(x+y)(x+y-1)(x+y-2) - x(x-1)(x-2) - y(y-1)(y-2) =$

$= 49 \cdot 6$

$(x^2+2xy+y^2-x-y)(x+y-2)$

$\cancel{x^3} + x^2y - \cancel{2x^2} + 2x^2y + 2xy^2 - 4xy + \quad \cancel{-2y^2}$

$+ y^2x + \cancel{y^3} - 2y - \cancel{x^2} - xy + \cancel{2x} - xy - \cancel{y^2} + \cancel{2y}$

$(x^2-x)(x-2)$

$\cancel{x^3} - \cancel{2x^2} - \cancel{x^2} + \cancel{2x}$

$x^2y + 2y^2x + 2x^2y + 2xy^2 - 6xy -$

$\cancel{x^3} + x^2y - \cancel{2x^2} + 2x^2y + 2xy^2 - 4xy +$

$+ xy^2 + \cancel{y^3} - \cancel{2y^2} - \cancel{x^2} - xy + \cancel{2x} - yx - \cancel{y^2} + \cancel{2y}$

$x^2y + xy^2 + 2x^2y + 2xy^2 - 6xy = 49 \cdot \cancel{6}^{2}$

$\cancel{3}$:

$x^2y + xy^2 - 2xy = 49 \cdot 2$

$xy(x+y-2) = 49 \cdot 2$

$7 \cdot 7 \cdot 2$

$\cancel{xy = 49}$

$1 + 4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 2 =$

$7 \cdot 2$

$7 = 1 + 8 \cdot 49$

$\cancel{7}$

9 чисел.

$y(y-1) = 7 \cdot 7 \cdot 2.$

$y^2 - y - 7 \cdot 7 \cdot 2 = 0$

y

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение задачи 5.

т.к. $\triangle AMC$ и $\triangle AMN$ подобны ($\angle ACM = \angle MAN$; $\angle AMN$ общий), то:

$$AN = AM \cdot tg\angle AMC = AM \cdot \frac{AC}{CM} = \frac{4}{3}\sqrt{15} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по т. Пифагора $MN = 2r = 4\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $\underline{r = 2\sqrt{2}}$

$AMKN$ - дельтоид ($\angle ACN = 90°$; $AMKN$ - вписанн., $\angle MAN = 90°$) $\Rightarrow$ $AK = 2AC = \frac{4}{3}\sqrt{10}$

$S_{AMKN} = d_1 \cdot d_2 \cdot \sin 90° = d_1 \cdot d_2 = AK \cdot MN = \frac{4}{3}\sqrt{10} \cdot 4\sqrt{2} =$

$= \underline{\frac{32}{3}\sqrt{5}}$

Ответ: $\angle ACB = 90°$; $r = 2\sqrt{2}$; $S_{AMKN} = \frac{32}{3}\sqrt{5}$

$x^2y + 2x^2y + 2xy^2 - 4xy + xy^2 - yx - xy = 49 \cdot 6$

$4 - 3x - 6x + 2 \leq ax + b$

$(a+9)x + (b-6) \leq 0$

$x \leq -\frac{b-6}{a+9}$

$x \geq \frac{1}{3}$: $\quad x \leq -\frac{b-6}{a+9}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6.

Кол-во троек, описанных в условии = Кол-во всех троек − Кол-во троек, где все числа $\vdots 5$ − Кол-во троек, где все числа $\vdots 7$.

Пусть чисел $\vdots 5$ − x

Пусть чисел $\vdots 7$ − y, тогда

$$\frac{(x+y)!}{(x+y-3)!\,3!}-\frac{x!}{(x-3)!\,3!}-\frac{y!}{(y-3)!\,3!}=49$$

$$(x+y)(x+y-1)(x+y-2)-x(x-1)(x-2)-y(y-1)(y-2)=49\cdot 6$$

Приведем подобные:

$$xy(x+y-2)=49\cdot 2$$

Числа $x;\ y;\ (x+y-2)$ − натуральные

$$xy(x+y-2)=7\cdot 7\cdot 2.$$

$x=2;\ y=7 \Rightarrow \underline{x+y=9}$

Ответ: 9 чисел.

D:

$(3t-1)(5+t)\geq 8$

$15t+3t^2-5-t-8\geq 0$

$3t^2+14t-13\geq 0$

$D=14^2+13\cdot 12$

$D=352$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

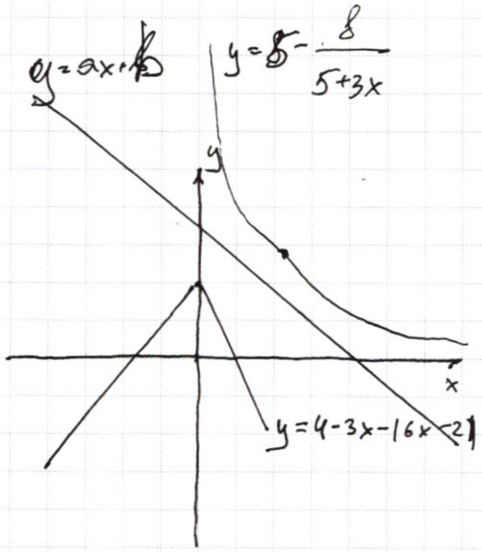
Задача 7.

$$\begin{cases} 4-3x-|6x-2| \leq ax+b \\ ax+b \leq \dfrac{17+15x}{5+3x} \end{cases}$$

$5+3x \neq 0$ при $x \in [-1;1]$

При $x \geqslant \frac{1}{3}$:

$4-3x-6x+2 \leq ax+b$



$(a+9)x+(b-6) \leq 0$

$x \leq -\dfrac{b-6}{a+9}$

$1 \leq -\dfrac{b-6}{a+9}$

$\cancel{(ax+b)(5+3x) \leq}$

$ax+b \leq 5-\dfrac{8}{5+3x}$

$ax+(b-5) \leq -\dfrac{8}{5+3x}$

$(ax+(b-5))(5+3x) \leq -8$

$4-3x-6x+2 \leq 5-\dfrac{8}{5+3x}$

$1-9x \leq -\dfrac{8}{5+3x}$

$\cancel{8-9x}\ (9x-1)(3x+5) \geq 8$

$27x^2+42x-13 \geq 0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)