МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

Пусть a — первый член геом. прогрессии, q — ее знаменатель.

Тогда $b = aq$, $c = aq^2$, а корень единственного данного уравнения — aq^3.

$ax^2 + 2bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0.$

$a(x^2 + 2qx + q^2) = 0.$

$aq^3 = -q. \Leftrightarrow a(x+q)^2 = 0.$

($a \neq 0$, $q \neq 0$, иначе не было бы геом. прогрессии)

$\Downarrow$

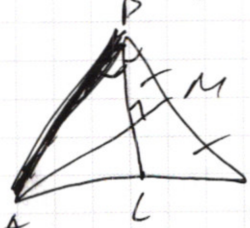
$c = aq^2 = -1.$

Ответ: -1.

Задача 2.

Эти медиана и биссектриса не могут выходить из одной вершины, иначе половина угла составляла бы не менее $90°$, в весь угол не менее $180°$, невозможно в треугольнике.

Значит, перпендикулярные медиана и биссектриса проведены из разных вершин.



В $\triangle ABM$ биссектриса является высотой $\Rightarrow BL$.

$AB = BM = \frac{BC}{2}.$

Для перпендикулярности медианы и биссектрисы необходимо и достаточно то, что одна сторона в 2 раза больше другой.

(В обратную сторону: проведем медиану AM, $\triangle ABM$ равнобедренный $\Rightarrow$ биссектриса в нем является высотой угла B)

Пусть $AB = x > 0$. Тогда $BC = 2x$, поэтому $AC = 1200 - 3x$, и x соответствует неравенствам треугольника.

$$\begin{cases} x + 1200 - 3x > 2x \\ x + 2x > 1200 - 3x \\ 2x + 1200 - 3x > x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1200 > 4x \\ 6x > 1200 \\ 1200 > 2x \end{cases}$$

x принимает целые значения в $(200; 300)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x < 300 \\ x > 200 \end{cases}$

т.е. 99 вариантов.

Ответ: 99

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

Задача 3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases}$$

$$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \quad \uparrow^2$$

$$\begin{cases} y\geqslant 2x \\ y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \end{cases}$$

$$y^2-(5x-1)y+4x^2+2x-2=0.$$

$$D=25x^2-10x+1-16x^2-8x+8=$$

$$=9x^2-18x+9=9(x-1)^2.$$

$$y=\frac{5x-1+3x-3}{2}=4x-2 \geqslant 2x \Leftrightarrow x\geqslant 1.$$

$$y=\frac{5x-1-3x+3}{2}=x+1 \geqslant 2x \Leftrightarrow x\leqslant 1.$$

Значит,

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geqslant 1 \\ y=4x-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leqslant 1 \\ y=x+1. \end{cases} \end{array}\right. \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geqslant 1 \\ y=4x-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leqslant 1 \\ y=x+1 \end{cases} \end{array}\right. \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3. \end{cases}$$

1) $x\geqslant 1.$ $y=4x-2.$

$$2(x-1)^2+16(x-1)^2=3.$$

$$(x-1)^2=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{\frac{1}{6}}. \\ x=1-\sqrt{\frac{1}{6}}<1 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x=1+\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{6}+6}{6}. \\ y=\frac{2\sqrt{6}+6}{3}. \end{cases}$$

2) $x\leqslant 1$ $y=x+1.$

$$2(x-1)^2+(x-1)^2=3.$$

$$(x-1)^2=1.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=2>1. \\ x=0. \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

Ответ: $(0;1)$

$$\left(\frac{\sqrt{6}+6}{6};\ \frac{2\sqrt{6}+6}{3}\right).$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

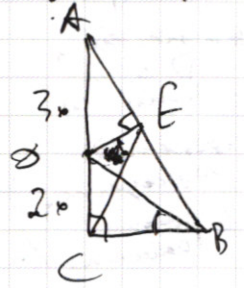
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4.



$AD : AC = 3:5 \Rightarrow$ пусть $AD = 3x$, тогда $DC = 2x$.

$\angle BED = 90° = \angle BCD \Rightarrow$ вокруг $CDEB$ можно описать окружность

$\angle CBD = \angle CED = 45°$.

$\Downarrow$

$CB = CD = 2x$.

$\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$.

$AC = \sqrt{29}$

$\Downarrow$

$BC = \frac{2}{5}\sqrt{29}$

$\Downarrow$

$AB = \sqrt{29} \cdot \frac{\sqrt{29}}{5} = \frac{29}{5}$

$\triangle AED \sim \triangle ACB$

$\Downarrow$

$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$.

$\Leftarrow AE \cdot \frac{29}{5} = AE \cdot AB = AD \cdot AC = \frac{3}{5} \cdot 29$.

$AE = 3$.

$EB = \frac{29}{5} - 3 = \frac{14}{5}$.

$BC = \frac{2}{5}\sqrt{29}$

$\Rightarrow S_{CBE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{5} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{29} \cdot \frac{\sqrt{29}}{\frac{29}{5}} = \frac{14}{5}$.

$S_{ACB} = \frac{1}{2}\sqrt{29} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{29} = \frac{29}{5}$.

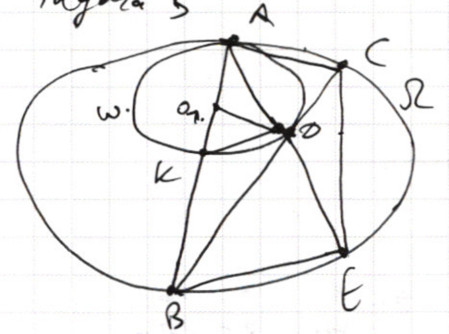
$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{5}\sqrt{29} \cdot \frac{\frac{2}{5}\sqrt{29}}{\frac{29}{5}} = \frac{9}{5}$.

$S_{CDE} = S_{ACB} - S_{CBE} - S_{ADE} = \frac{29}{5} - \frac{14}{5} - \frac{9}{5} = \frac{6}{5}$.

Ответ: $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{2}{5}$.

$S_{CDE} = \frac{6}{5}$.

Задача 5



Пусть радиус Ω — R, радиус ω — r.

Т.к. окружности касаются в точке A, их общая касательная $\perp$ линии центров $\Rightarrow$ AB и AK — диаметры окружностей Ω и ω, пусть O_1 — центр ω.

$O_1D \parallel AC$. $\Leftarrow$ $\angle BDO_1 = 90°$ (угол между касательной и радиусом, проведенным в точку касания). $\Leftarrow$ $\angle BCA = 90°$ (AB — диаметр Ω)

$\triangle BO_1D \sim \triangle BAC$, угол B — общий.

$$\frac{BO_1}{BA} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{2R-r}{2R} = \frac{3}{4} \Rightarrow r = \frac{2R}{4} = \frac{R}{2},$$

Значит K — центр Ω.

$9 = BD^2 = BK \cdot BA = R \cdot 2R = 2R^2$. $\Rightarrow R = \frac{3}{\sqrt2} = \frac{3\sqrt2}{2}$.

$r = \frac{R}{2} = \frac{3\sqrt2}{4}$.

$\angle ADK = 90°$ (диаметры ω и Ω).
$\angle AEB = 90°$
; угол A — общий $\Rightarrow$ $\triangle ADK \sim \triangle AEB$.

$KD \parallel BE$.

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AD}{AE}$$
$$\frac{R}{2R} = \frac{AD}{AD+DE} \Rightarrow AD = DE.$$

$3 = BD \cdot CD = AD \cdot DE = AD^2$. $\Rightarrow AD = DE = \sqrt3$. $\Rightarrow AE = 2\sqrt3$.

$\angle EBD = \angle BDK = \angle EAB$ (угол между касательной и хордой).

$\angle ADB = 90° + \angle BDK = 90° + \angle EBD$.

$\sin\angle ADB = \cos\angle EBD = \cos\angle EAB = \frac{AE}{AB} = \frac{2\sqrt3}{3\sqrt2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

$S_{BACE} = \frac{1}{2} BC \cdot AE \cdot \sin\angle ADB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt3 \cdot \frac{\sqrt2}{\sqrt3} = 4\sqrt2$.

Ответ: $R = \frac{3\sqrt2}{2}$; $r = \frac{3\sqrt2}{4}$; $S_{BACE} = 4\sqrt2$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7. Все переменные в решении являются рациональными положительными числами.

$f(a) = f(1\cdot a) = f(1) + f(a) \Rightarrow f(1) = 0.$

$0 = f(1) = f(x\cdot \frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x}) \Rightarrow f(\frac{1}{x}) = -f(x).$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y).$

Значит, $f(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y).$

Будем рассматривать нат. числа от 1 до 21.

~~[illegible]~~ Для p простого $f(p) = [\frac{p}{2}]$,

$f(2) = 1$.
$f(3) = 1 \Rightarrow$
$f(5) = 2$
$f(7) = 3$.
$f(11) = 5$.
$f(13) = 6$.
$f(17) = 8$.
$f(19) = 9$.

$f(1) = 0$
$f(4) = f(2) + f(2) = 2$.
$f(6) = f(2) + f(3) = 2$.
$f(8) = f(4) + f(2) = 3$.
$f(9) = f(3) + f(3) = 2$.
$f(10) = f(5) + f(2) = 3$.
$f(12) = f(4) + f(3) = 3$.
$f(14) = f(7) + f(2) = 4$.
$f(15) = f(5) + f(3) = 3$.
$f(16) = f(8) + f(2) = 4$.
$f(18) = f(9) + f(2) = 3$.
$f(20) = f(4) + f(5) = 4$.
$f(21) = f(3) + f(7) = 4$.

~~[illegible]~~ Среди $f(x)$, $x \in [1, 21]$.

$f(x) = 0$ — 1 число ($\Leftarrow$)
$f(x) = 1$ — 2 числа.
$f(x) = 2$ — 4 числа
$f(x) = 3$ — 6 чисел.
$f(x) = 4$ — 4 числа.
$f(x) = 5$ — 1 число.
$f(x) = 6$ — 1 число
~~[illegible]~~
$f(x) = 8$ — 1 число
$f(x) = 9$ — 1 число

Необходимо выбрать пару $(x; y)$ так, чтобы $f(y) > f(x)$.

Кол-во способов это сделать:

$1\cdot 20 + 1\cdot 19 + 1\cdot 18 + 1\cdot 17 + 4\cdot 13 + 6\cdot 7 + 4\cdot 3 + 2\cdot 1 =$

$= 20 + 19 + 18 + 17 + 52 + 42 + 12 + 2 =$

$= 74 + 52 + 56 = 182$

Ответ: 182 пары.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 6.

1) $2x^2 - (a+1)x - 1 - b \le 0$ при $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

Это квадратный трехчлен с ветвями вверх.

Необходимо и достаточно, чтобы выполнялось при $x = -\frac{1}{4}$, $x = \frac{3}{2}$:

$-\frac{5}{8} \le -\frac{a}{4} + b$

$2 \le \frac{3a}{2} + b$.

2) $x \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$: $ax + b \le 3x - 1$

$b + 1 \le (3 - a)x$.

$x \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$: $ax + b \le 1 - x$

$b - 1 \le (-a - 1)x$,

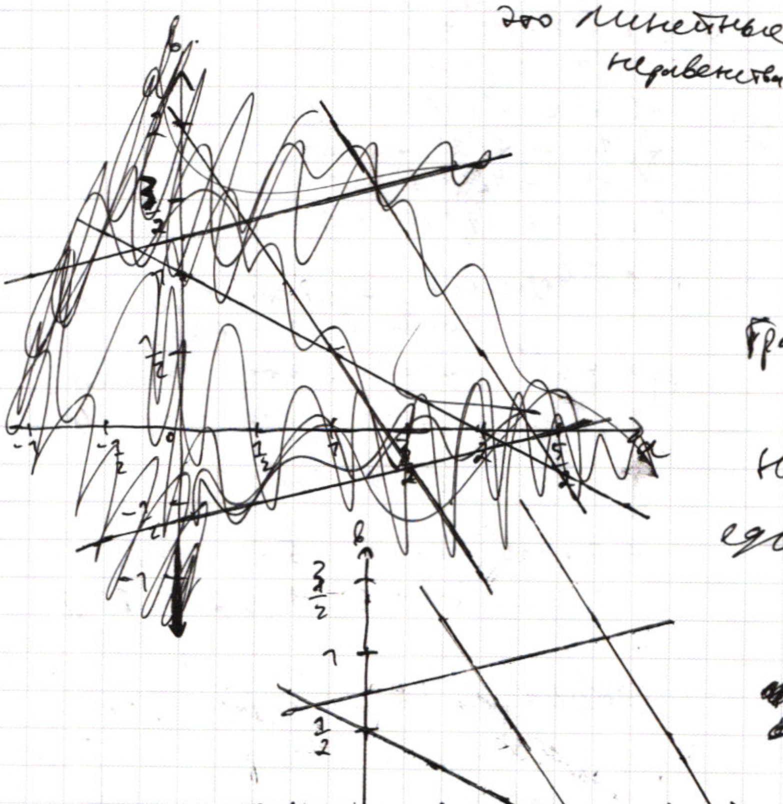
это линейные неравенства.

Необходимо и достаточно, чтобы выполнялось при $x = -\frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$.

$-\frac{a}{4} + b \le \frac{5}{4}$.

$\frac{3a}{2} + b \le \frac{7}{2}$

$\frac{a}{2} + b \le \frac{1}{2}$.



Графически решая эту систему неравенств, находим единственное решение $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$.

Ответ: $(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4})$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 7.$

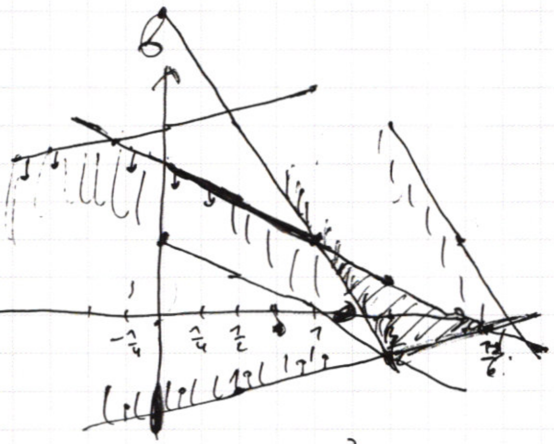
$-\frac{5}{8} \le -\frac{a}{4} + b \le \frac{5}{4}.$

$2 \le \frac{3}{2}a + b \le \frac{7}{2}.$

$\frac{a}{2} + b \le \frac{7}{2}.$

$a = \frac{3}{2}$

$b = -\frac{1}{2}.$



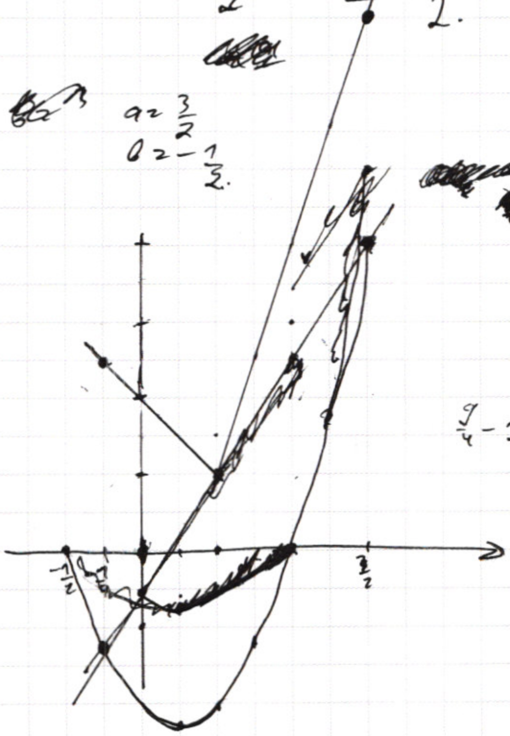
$a = \frac{3}{2}$ $\quad \frac{3}{2}$

$b =$ $\quad -\frac{7}{4}.$

$\frac{9}{4} - \frac{7}{4}.$

$\frac{9}{4} - \frac{7}{4}$ $\quad \frac{3}{4}$

$\frac{3}{2} - \frac{7}{4}.$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

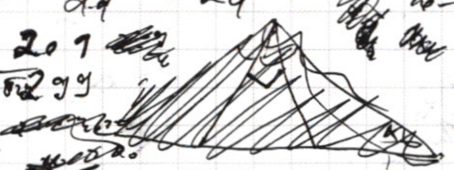
(заполняется секретарём)

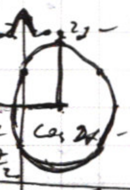
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

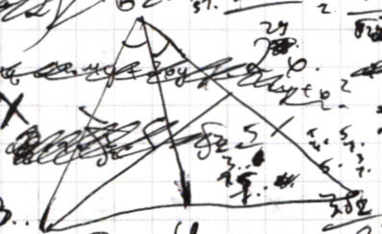
$f(2)=1$

$f(3)=1$

$f(5)=2$







$3x>y$

$\boxed{y<2}$

$(y-2)^2+2(x-1)^2=3$

$D=4-2(y-1)(y-3)\geq 0$

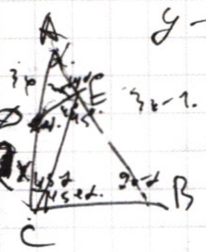
$(y-2)(x-1)$

$y\geq 2x$

$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{5}{3}$

$y-2\geq 2x-2$

$1-\frac{13}{12}=-\frac{1}{12}$



$y\geq 2x$

$y^2-5xy+y+4x^2+2x-2=0$

$D=(5x-1)^2-4(4x^2+2x-2)=25x^2-10x+1-16x^2-8x+8=$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

CE $2\frac{\sqrt{29}}{\dots}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$CE = 2\sqrt{2}$

$\partial E = \frac{2}{5}\sqrt{29}$ $\frac{3}{\sqrt{29}} = \frac{6}{5}$

$\sqrt{29} \to 3$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ $f(2) = 1$

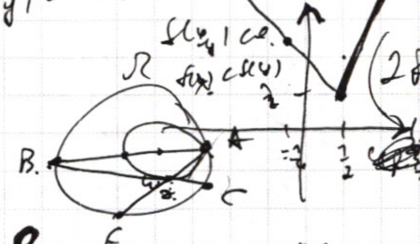
$f(3) = 1$

$f(5) = 2$

$f(7) = 3$

$\frac{6}{5}$ $2\sqrt{2}$ $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$

$(2R - 2r) \cdot 2R$



$2x^2 - 2x - 1 \le 2x - 1$

$2x^2 - 4x - 2 \le 0$

$x^2 - 2x - 1 \le 0$

$(x-1)^2 \le 2$

$-2x + 1 + x$

$2x^2 - x - 1 \le x + |2x - 1|$

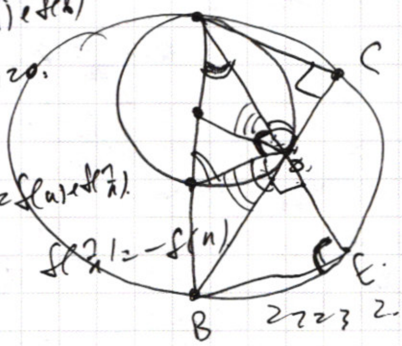
$f(b) = f(1) + f(b)$

$f(1) = 0$

$f(2b) =$

$f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = f(n) + f\left(\frac{1}{n}\right)$

$f\left(\frac{1}{n}\right) = -f(n)$



$\frac{2R - r}{2R} = \frac{3}{4}$ $2x^2 - x - 1 \le |2x - 1|$

1. $2x^2 - x - 1 \le 0$

$2(x-1)\left(2x + \frac{1}{2}\right)$

$x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

$2 \cdot 2 \cdot 3$ $2 \cdot 3 \cdot 4$

2. $2x^2 - 1 \le 2x - 1$

$2x^2 - x - 1 = x + |2x - 1|$

$2x^2 - 3x \le 0$

$\frac{19}{2}$

$2x^2 - 2x - 1 = 2x - 1$

$b \le \frac{1}{2}$

$4 - 2 - 1$

$2x^2 - 4x = 0$

$x^2 - 2x = 0$ $x = 0$ $\sqrt{2}$

$\frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1 \le b \le 1$

$2x^2 - 1 = 1 - x$

$b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{3a}{2} \le \frac{27}{4} + 6b$

$2x^2$

$-(a+1)x - 1 - b \le 0$

$b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{9}{4} \le \frac{9}{8} + 6b$

$2 \le \frac{3}{2}a + b$

$a\frac{1}{8} - \frac{a+1}{4} - 1 - b \le 0$

$\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 \le -\frac{a}{4} + b$

$2 \le \frac{27}{4} + 2b$

$\frac{9}{2}$ $-\frac{9}{8}$ $6 \cdot 3$ $9 \cdot 2$ 3

1. $x \ge \frac{1}{2}$

$ax + b \le 3x - 1$

$x < \frac{1}{2}$

$ax + b \le 1 - x$

$f(1) = 0$

$f(2) = 1$

$f(3) = 1$

$f(4) = 2$

$f(5) = 2$

$f(6) = 2$

$f(7) = 3$

$f(8) = 3$

$f(9) = 2$

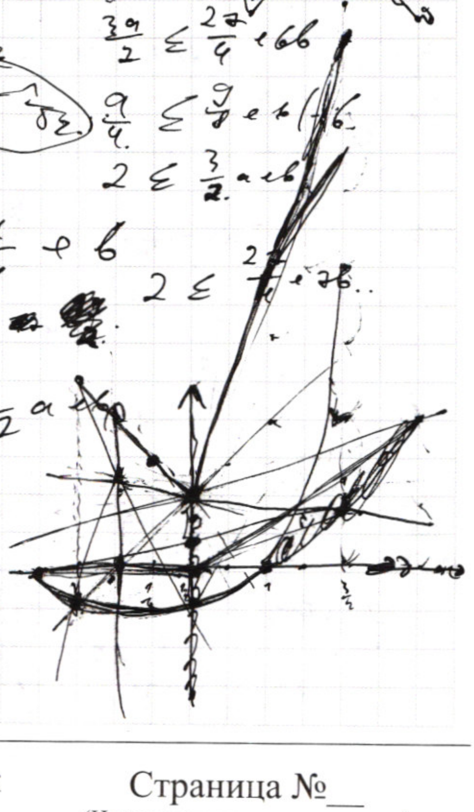
$f(10) = 3$

$2 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1 \le \frac{3}{2}a$

$\frac{3}{2}a + b \le \frac{7}{2}$

$\frac{a}{2} + b \le \frac{1}{2}$

$-\frac{a}{4} + b \le \frac{5}{4}$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)