МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Пусть $b=k\cdot a$, тогда $c=k^2a$, $d=k^3a$ (где d — четвёртый член геометрической прогрессии).

$ax^2+2bx+c=0$ — квадратное уравнение, т.к. $a\neq 0$ как член геометрической прогрессии.

$D=4b^2-4ac=4k^2a^2-4a\cdot k^2a=0 \Rightarrow$ уравнение имеет один корень.

$$x=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}=-\frac{k\cdot a}{a}=-k$$

Тогда $d=x=-k$.

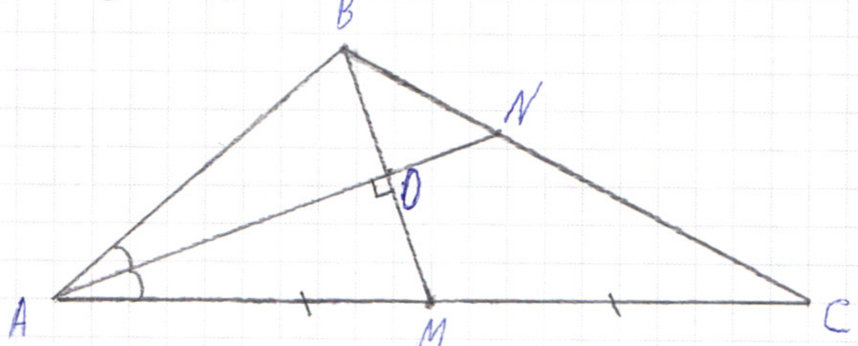
$k^3a=-k$ $\quad |:k$ ($k\neq 0$ как частное геометрической прогрессии).

$k^2a=-1$

$c=k^2a \Rightarrow c=-1$

Ответ: $c=-1$.

2.



Рассмотрим ΔABC, у которого AN — биссектриса, BM — медиана, $AN\perp BM$, $AN\cap BM=O$. В треугольнике, у которого биссектриса перпендикулярна одной из медиан, эти биссектриса и медиана не могут быть проведены из одной вершины, т.к. иначе угол между ними меньше угла между биссектрисой и стороной треугольника, который меньше $90°$, т.к. равен половине

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

угла треугольника с этой вершиной, а он меньше 180°. Поэтому $\triangle ABC$ — любой треугольник, у которого биссектриса перпендикулярна медиане.

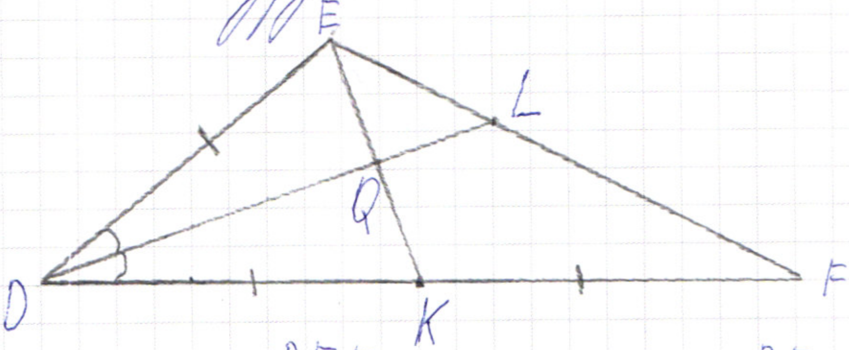
$\triangle AOM = \triangle AOB$, т.к. сторона AO — общая, $\angle BAO = \angle MAO$ (т.к. AN — биссектриса), $\angle AOB = \angle AOM = 90°$ (т.к. $AN \perp BM$).

$AB = AM$ как соответственные стороны равных $\triangle AOB$ и $\triangle AOM$.

$AM = MC$, т.к. BM — медиана.

$AC = AM + MC = 2AM = 2AB$

Значит у любого треугольника, у которого биссектриса перпендикулярна медиане, одна сторона вдвое больше другой.



Рассмотрим $\triangle DEF$, у которого $DF = 2DE$. Пусть DL — его биссектриса, EK — медиана, $DL \cap EK = Q$.

$DK = KF$, т.к. EK — медиана.

$DF = DK + KF = 2DK$

$DF = 2DE \Rightarrow DK = DE$.

Тогда $\triangle DEK$ — равнобедренный

DQ — биссектриса из вершины $\triangle DEK$, значит DQ — ~~мед~~ высота $\triangle DEK$. Тогда $DQ \perp EK$. Значит $DL \perp EK$. Т.о., у любого треугольника, у которого одна сторона больше другой в 2 раза, биссектриса и медиана

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

будут перпендикулярны.

Значит, для того, чтобы у треугольника биссектриса и медиана были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы одна из его сторон была в 2 раза больше другой.

Если $AB \in \mathbb{N}$, то $AC \in \mathbb{N}$, т.к. $AC = 2AB$.

$P_{\Delta ABC} = 1200$

$AB + BC + AC = 1200$

$3AB + BC = 1200$

$BC = 1200 - 3AB$

Тогда $BC \in \mathbb{N}$ при $AB \in \mathbb{N}$.

Т.е. у любого треугольника с одной целочисленной стороной, у которого одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан, все стороны будут целочисленны.

ΔABC существует, если:

$$\begin{cases} AB < BC + AC \\ BC < AB + AC \\ AC < AB + BC \end{cases} \quad \begin{cases} AB < BC + 2AB \\ BC < AB + 2AB \\ 2AB < AB + BC \end{cases} \quad \begin{cases} BC < 3AB \\ AB < BC \end{cases}$$

верно для любых положительных длин сторон

$$\begin{cases} 1200 - 3AB < 3AB \\ AB < 1200 - 3AB \end{cases} \quad \begin{cases} 1200 < 6AB \\ 4AB < 1200 \end{cases} \quad \begin{cases} AB > 200 \\ AB < 300 \end{cases} \quad 200 < AB < 300$$

$AB \in \mathbb{N}$, значит $201 \le AB \le 299$. Возможных значений AB 99.

~~$AB = 201, 202, 203, \ldots, 299.$~~

~~$AC = 402, 404, 406, \ldots, 598.$~~

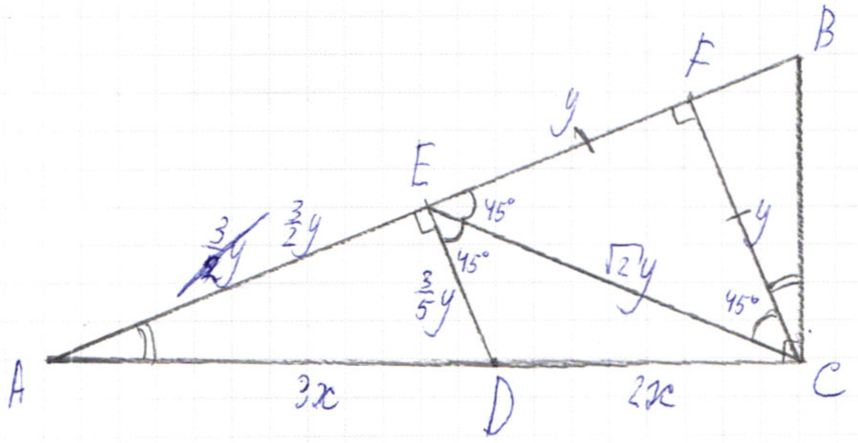
~~$BC = 597, 593, 591, \ldots, 303.$~~

~~Предположим, что некоторые из 99 треугольников (при AB от 201 до 299) равные.~~

Все 99 треугольников разные, т.к. их стороны различны, т.к. $201 \le AB \le 299$, $402 \le AC \le 598$, $303 \le BC \le 597$, т.е. ~~ни одна~~ ни AC, ни BC у некоторого треугольника не могут быть равны AB у другого треугольника.

Ответ: существует 99 треугольников с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

4.



Пусть $AD = 3x$, тогда $AC = 5x$, $DC = AC - AD = 2x$.

Построим $CF \perp AB$, $F \in AB$. Пусть $CF = y$.

$\angle CED = 45°$, $\angle BED = 90° \Rightarrow \angle BEC = \angle BED - \angle CED = 90° - 45° = 45°$.

$\triangle CEF$ — прямоугольный, $\angle CEF = 45° \Rightarrow$ ~~$\angle EFC$~~ $\angle ECF = 90° - \angle CEF = 45°$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle CEF = \angle ECF = 45^\circ \Rightarrow \triangle CEF$ — равнобедренный, $EF = CF = y$.

По теореме Пифагора для $\triangle CEF$:

$$CE = \sqrt{CF^2 + EF^2} = \sqrt{y^2 + y^2} = \sqrt{2}\,y.$$

$\triangle ADE \sim \triangle ACF$, т.к. $\angle BAC$ — общий, $\angle AED = \angle AFC = 90^\circ$.

Тогда:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AF} = \frac{DE}{CF}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{AE}{AE+y} = \frac{DE}{y} \Rightarrow DE = \frac{3}{5}y, \quad AE = \frac{3}{5}AE + \frac{3}{5}y$$

$$\frac{2}{5}AE = \frac{3}{5}y$$

$$AE = \frac{3}{2}y$$

По теореме Пифагора для $\triangle ADE$:

$$AE^2 + DE^2 = AD^2$$

$$\frac{9}{4}y^2 + \frac{9}{25}y^2 = 9x^2 \quad \Big| : 9$$

$$x^2 = \frac{y^2}{4} + \frac{y^2}{25}$$

$$x^2 = \frac{25y^2 + 4y^2}{100}$$

$$x^2 = \frac{29}{100}y^2$$

$x = \frac{\sqrt{29}}{10}y$, т.к. $x > 0$, $y > 0$.

$$\operatorname{tg} BAC = \frac{DE}{AE} = \frac{\frac{3}{5}y}{\frac{3}{2}y} = \frac{2}{5}$$

$$AC = 5x = \frac{\sqrt{29}}{2}y \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{29}}AC$$

При $AC=\sqrt{29}$ $\quad y=\frac{2}{\sqrt{29}}\cdot\sqrt{29}=2$

$S_{\triangle CED}=\frac{1}{2}CE\cdot DE\cdot \sin CED=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}y\cdot\frac{3}{5}y\cdot\sin 45^\circ=\frac{3\sqrt{2}}{10}y^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=$

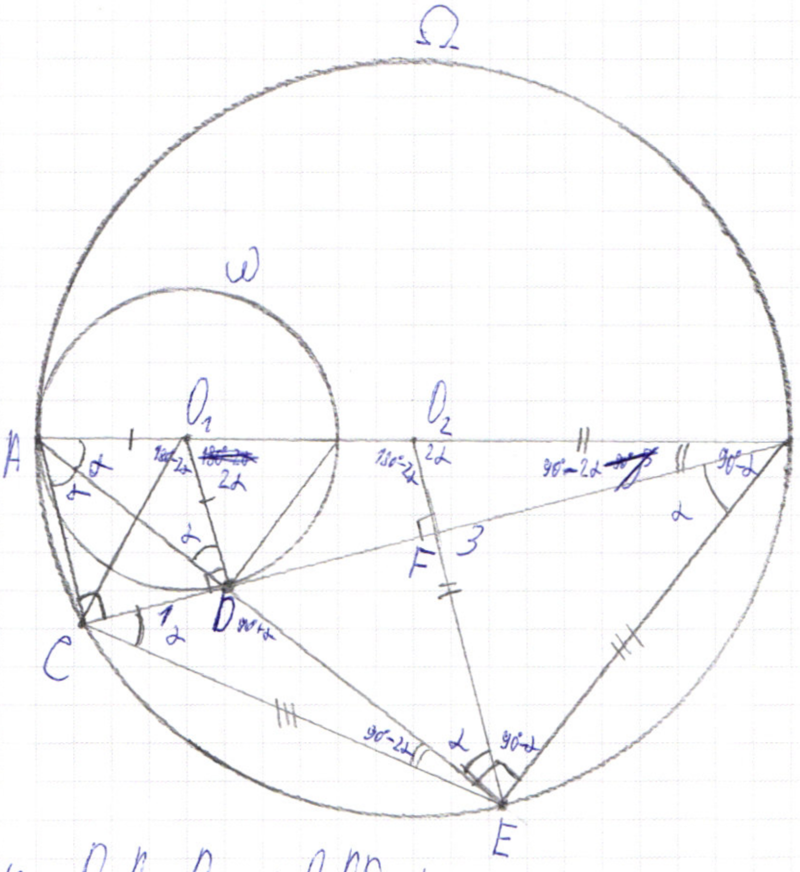
$=\frac{3}{10}y^2$

$S_{\triangle CED}=\frac{3}{10}\cdot 2^2=\frac{12}{10}=1,2$

Ответ: а) $tg\,BAC=\frac{2}{5}$.

б) $S_{\triangle CED}=1,2$.

5.



Пусть $O_1A=r$, $O_2A=R$, $\angle O_1AD=\alpha$.

$O_1B=AB-O_1A=2R-r$

$O_1D=r$

$O_1D\perp BD$, т.к. BC касается ω в точке D.

По теореме Пифагора для $\triangle BO_1D$:

$BO_1^2=BD^2+O_1D^2$

$(2R-r)^2=3^2+r^2$

$\square$ черновик $\quad$ ☑ чистовик $\quad$ Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4R^2 - 4Rr + r^2 = 9 + r^2$

$4R^2 - 9 = 4Rr$

$r = \frac{4R^2 - 9}{4R}$

$\angle O_1DA = \alpha$, т.к. $\triangle AO_1D$ — равнобедренный $(O_1A = O_1D)$

$\angle BCE = \angle O_1AD = \alpha$, т.к. $\angle OCE$ и $\angle O_1AD$ опираются на $\smile BE$.

$\angle BO_1D = 2\alpha$ как внешний для $\triangle AO_1D$.

$\angle ABC = 90° - 2\alpha$, т.к. $\triangle BO_1D$ — прямоугольный.

$\angle AEC = \angle ABC = 90° - 2\alpha$.

$\cancel{\angle ACE = \angle A}$

$\angle AEB = 90°$, т.к. AB — диаметр, $\Rightarrow \triangle AEB$ — прямоугольный.

$\angle ABE = 90° - \angle BAE = 90° - \alpha$

$\angle CBE = \angle ABE - \angle ABC = (90° - \alpha) - (90° - 2\alpha) = \alpha$

$\cancel{\angle ACE = \angle CBE = \alpha}$ $\angle CAE = \frac{\smile CE}{2} = \angle CBE = \alpha$

$\triangle AO_2E$ — равнобедренный, т.к. $O_2A = O_2E = R \Rightarrow \angle AEO_2 = \angle EAO_2 = \alpha$.

$\triangle ABC \sim \triangle O_2BF$, где $BC \cap O_2E = F$, т.к. $\angle ABC$ — общий, $\angle BAC = \angle BO_2F = 2\alpha$.

$\frac{BO_2}{AB} = \frac{BF}{BC}$

$\frac{R}{2R} = \frac{BF}{4}$, т.к. $BC = BF + CD = 3 + 1 = 4$

$BF = 2$

$\triangle BO_2F \sim \triangle BO_1D$, т.к. $\angle BO_2F = \angle BO_1D = 2\alpha$, $\angle ABC$ - общий.

$$\frac{BO_2}{BO_1} = \frac{BF}{BD}$$

$$\frac{R}{2R-r} = \frac{2}{3}$$

$$3R = 4R - 2r$$

$$2r = R$$

$$2 \cdot \frac{4R^2 - 9}{4R} = R \qquad | \cdot 2R$$

$$4R^2 - 9 = 2R^2$$

$$2R^2 = 9$$

$$R = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$r = \frac{R}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$S_{BACE} = S_{\triangle ABC} + \cancel{S_{\triangle BFE}} + S_{\triangle CFE} = \frac{1}{2} AC \cdot BC + \frac{1}{2} BC \cdot FE = \frac{1}{2} BC^2 tg(ABC) +$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CF \cdot tg\alpha = \frac{1}{4} BC^2 tg\alpha + \frac{1}{2} BC^2 tg(ABC) =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot 4^2 tg\alpha + \frac{1}{2} 16 \cdot tg(ABC) = 4 tg\alpha + 8 tg(ABC)$$

$$tg(ABC) = \frac{O_1D}{BD} = \frac{r}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$tg\alpha = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AC = BC\, tg(ABC) = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$$

$$S_{BACE} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Ответ: $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$, радиус ω равен $\frac{3\sqrt{2}}{4}$, Ω — $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $a,\ b=ka,\ c=k^2a,\ d=k^3a$

$ax^2+2bx+c=0$

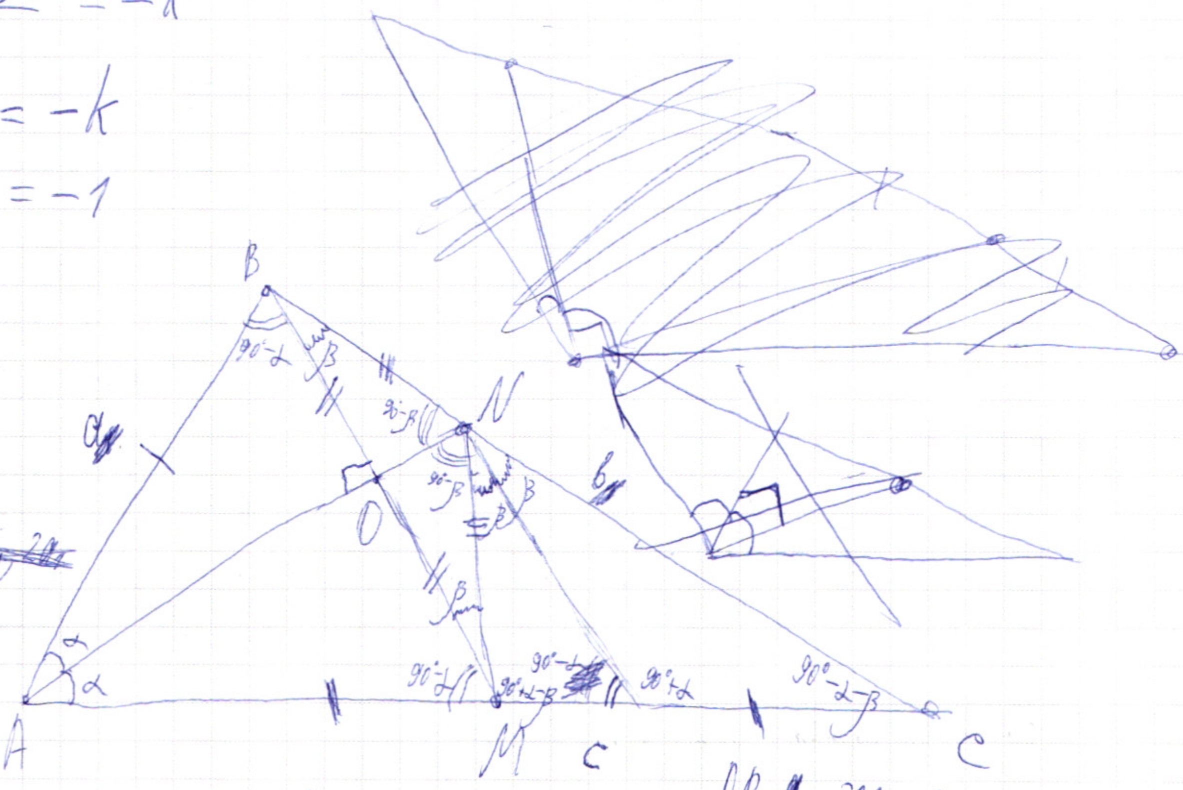
$$x_{1,2}=\frac{-2b\pm\sqrt{4b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}=\frac{-ka\pm\sqrt{k^2a^2-a\cdot k^2a}}{a}=$$

$$=\frac{-ka\pm\sqrt{0}}{a}=-k$$

$k^3a=-k$

$c=k^2a=-1$

2.



$\cancel{\frac{AM}{AB}=\frac{AO}{}}$

$AC=2AB$

$AB\in\mathbb{N},\quad P_{ABC}=1200$

AB: 201, 202, 203, ..., 299

AC: 402, 404, 406, ..., 598

BC: 597, 594, 591, ..., 303

$3AB+BC=1200$

$\begin{cases}BC<3AB\\2AB<AB+BC\end{cases}$ $\begin{cases}BC<3AB\\AB<BC\end{cases}$ $AB<BC<3AB$

$99\ \triangle ABC$

$4AB<3AB+BC<6AB$

$4AB<1200<6AB$

$\begin{cases}AB>200\\AB<300\end{cases}$

$200<AB<300$

$AB=201, 202, 203, \ldots, 298, 299.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

3. $\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2 = xy-2x-y+2 \\ y \geq 2x \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x^2+y^2-5xy+2x+y-2=0 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \\ y \geq 2x \end{cases}$

$\cancel{2x^2-5xy+6x+5y-5=0}$

$\cancel{2x^2+8x-5y(x-1)-5=0}$

$\cancel{2x(x+3)-5y(x-1)-5=0}$

$\begin{cases} \cancel{2x(2x+1)+y(y+1)-5xy-2=0} \\ \cancel{2x(x-2)+y(y-4)+3=0} \\ y \geq 2x \end{cases}$

$\cancel{6x^2+2y^2-5xy-2x-3y+1=0}$

$\cancel{6x^2+2y^2-2x(y+1)-3y(x+1)=0}$

$\cancel{4x(x-y)+y(y-x)+2x+y-2=0}$

$\cancel{(4x-y)(x-y)+2x+y-2=0}$

$y=-4x^2-y^2+5xy-2x+2$

$\cancel{2x^2+y^2-4x-4(-4x^2-y^2+5xy-2x+2)+3=0}$

$\cancel{y^2-5xy=-4x^2-2x-y+2}$

$\cancel{y^2+5xy=10x+9y-8}$

$\cancel{2y^2=-4x^2+8x+8y-6}$

$\cancel{2x^2+y^2-4x-4y+3=0}$

$\cancel{4(x+y)=2x^2+y^2+3}$

$\cancel{4x^2+y^2-5xy-2+x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{3}{2}-y=0}$

$\cancel{5x^2+\frac{3}{2}y^2-5xy-y-\frac{1}{2}=0}$

$\cancel{4x^2+y^2-5xy-2+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{3}{4}+x=0}$

$\cancel{\frac{9}{2}x^2+\frac{5}{4}y^2-5xy-\frac{5}{4}+x=0}$

$\cancel{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}y^2-y-x+\frac{3}{4}=0}$

$\cancel{2x^2+y^2-4x-4y+3=0}$

$$-\begin{array}{l} 4x^2+2y^2-8x-8y+6=0 \\ 4x^2+y^2-5xy+2x+y-2=0 \end{array}$$

$y^2+5xy-10x-9y+8=0$

$\cancel{2x^2+y^2-4x+16x^2+4y^2-20xy}+8x-8+3=0$

$18x^2+5y^2-20xy+4x-5=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

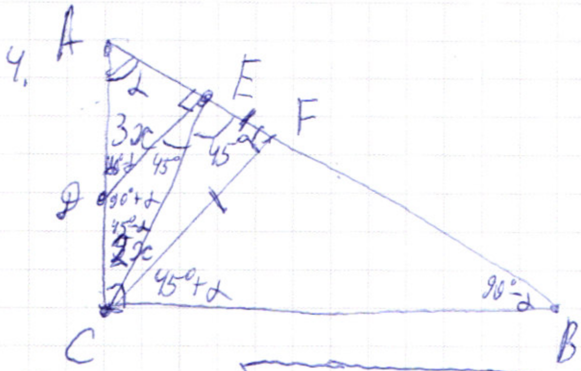
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.

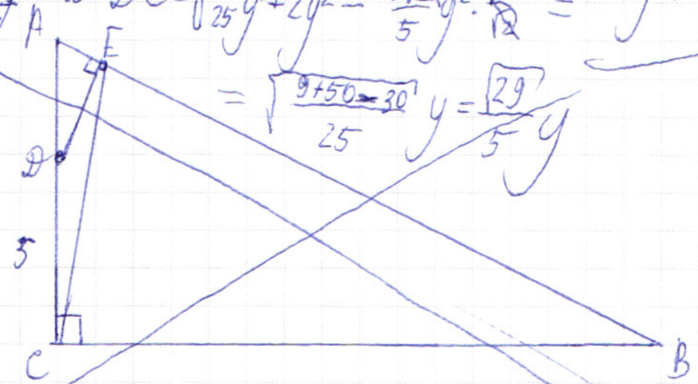


$$tg\alpha = \frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{DE}{\sqrt{9x^2-DE^2}} = \frac{BC}{5x}$$

$$\cancel{y^2AE^2 = 9x^2AE^2 + 9x^2y^2 + 18x^2yAE}$$

$$\frac{\sqrt{29}}{5}y = 2x = DC = \sqrt{\frac{9}{25}y^2+2y^2-\frac{6\sqrt{2}}{5}y^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{9+50-30}{25}}y = \frac{\sqrt{29}}{5}y$$



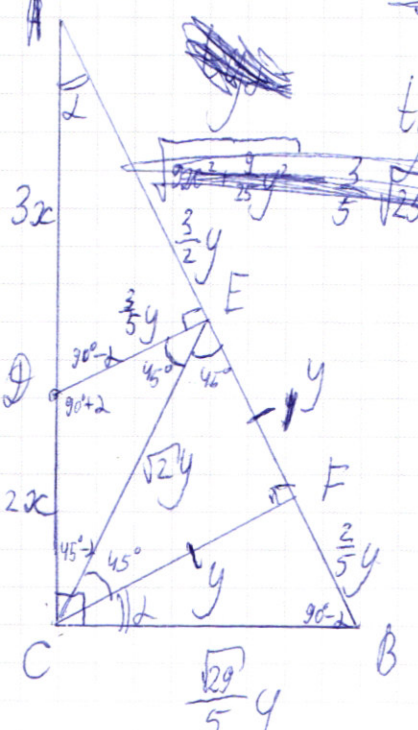
$$\frac{9}{4}y^2 + \frac{9}{25}y^2 = 9x^2$$

$$25y^2 + 4y^2 = 100x^2$$

$$x = \frac{\sqrt{29}}{10}y$$

$$tg\alpha = \frac{\sqrt{29}y\cdot 10}{5\cdot 5\cdot\sqrt{29}y} = \frac{2}{5}$$

$$\cancel{DE = \sqrt{4x^2+2y^2-4\sqrt{2}xy\cos 45°} = \sqrt{4x^2+2y^2-4xy}}$$



$$tg\alpha = \frac{BC}{5x} = \frac{y}{AE+y} = \frac{\sqrt{9x^2-AE^2}}{AE} = \frac{\sqrt{BC^2-y^2}}{y}$$

$$\cancel{\sqrt{9x^2+\frac{9}{25}y^2} = \frac{3}{5}\sqrt{25x^2+y^2}}$$

$$\frac{BC^2}{25x^2} = \frac{BC^2-y^2}{y^2}$$

$$tg\alpha = \frac{3y\,2}{5\cdot 3y} = \frac{2}{5}$$

$$tg\alpha = \frac{y}{\frac{5}{2}y} = \frac{2}{5}$$

$$BC^2y^2 = 25BC^2x^2 - 25x^2y^2$$

$$25x^2y^2 = BC^2(25x^2-y^2)$$

$$\frac{y^2}{AE^2+2yAE+y^2} = \frac{9x^2-AE^2}{AE^2}$$

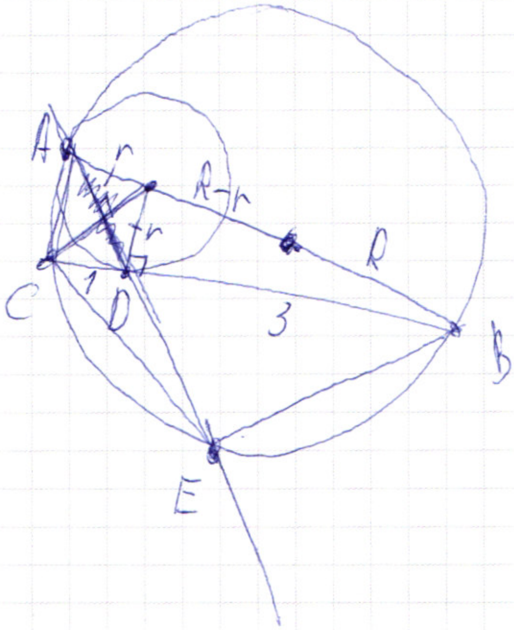
$$tg\alpha = \frac{\sqrt{29}y}{5\cdot 5\sqrt{29}y} = \frac{1}{25}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

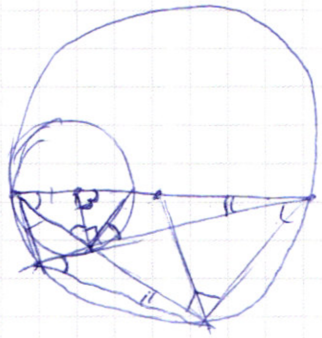
(Нумеровать только чистовики)



$$\frac{R}{2} = \cancel{\ } = \frac{2R-r}{3}$$

$$3R = 4R - 2r$$

$$2r = R$$

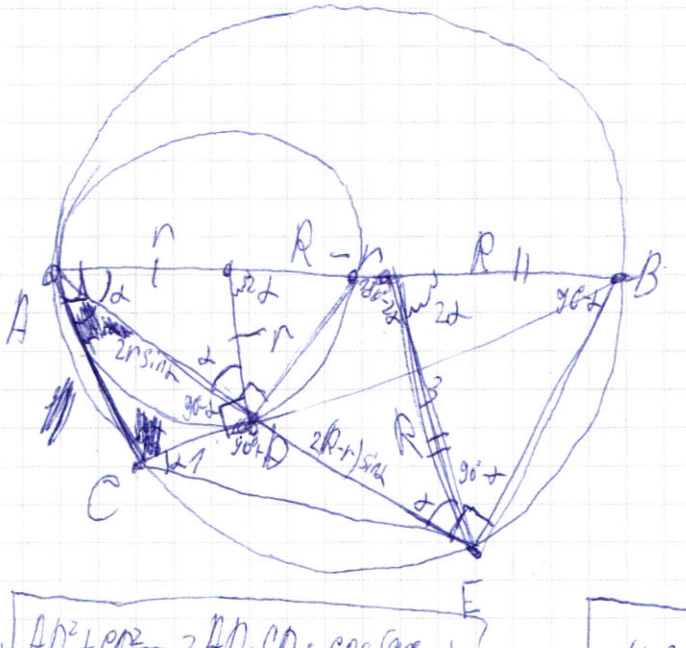


$$9 + \cancel{r^2} = 4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2}$$

$$r = \frac{4R^2-9}{4R}$$

$$CE = \sqrt{CD^2 + DE^2 - 2CD\cdot DE\cdot \cos}$$

$$AC = \sqrt{4r^2\sin^2\alpha - 1}$$



$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2 - 2AD\cdot CD\cdot \underset{\sin\alpha}{\cos(90-\alpha)}} = \sqrt{4r^2\sin^2\alpha + 1 - 4r\sin^2\alpha} \quad \cancel{AM} =$$

$$\cancel{= \sqrt{(2r\sin\alpha)^2 - 2\cdot 2r\sin\alpha\cdot 1 + 1^2} = \sqrt{(2r\sin\alpha - 1)^2} = 2r\sin\alpha - 1}$$

$$= \sqrt{4r\sin^2\alpha\,(r-1) + 1}$$