



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

- ↓ + 1. [2 балла] Числа  $a, b, c$  являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа  $a, b, c$  не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения  $ax^2 - 2bx + c = 0$ . Найдите третий член прогрессии.
- + 2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
- ↓ + 3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

- + + 4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $AD : AC = 1 : 3$  и  $DE \perp AB$ . Найдите тангенс угла  $BAC$ , если известно, что  $\angle CED = 30^\circ$ .
- б) Пусть дополнительно известно, что  $AC = \sqrt{7}$ . Найдите площадь треугольника  $CED$ .
- ↓ + 5. [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника  $BACE$ , если известно, что  $CD = 2, BD = 3$ .
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[-\frac{1}{2}; 1]$ .

- + + 7. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/2]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$  и  $f(x/y) < 0$ .



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

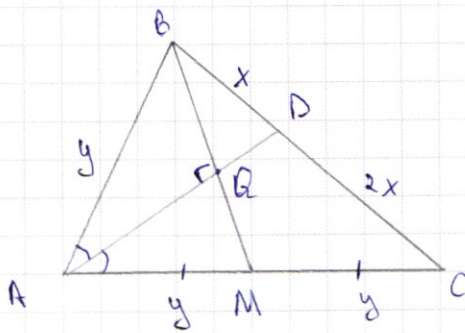
~ 1

Пусть  $b = aq$ ,  $c = aq^2$ ,  $d = aq^3$  - корни  $ax^2 - 2bx + c = 0$ .

$$\Rightarrow a^3q^6 - 2a^2q^4 + aq^2 = 0$$

$$aq^2(aq^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ или } c = 1$$

Ответ: 0 или 1



~ 2

Пусть  $AM = y$ ,  $BD = x$ .

$AG$  - бис и высота  $\triangle ABM \Leftrightarrow AM = AB$

$AD$  - бис  $\triangle ABC \Leftrightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$

$AB = y$ ,  $BC = 3x$ ,  $AC = 2y$ .

$$P = 3(x+y) = 900$$

$$\begin{cases} x+y = 300 \\ y < 2y+3x \\ 3x < 3y \\ 2y < y+3x \end{cases} \quad \begin{cases} x+y = 300 \\ 0 < y+3x \\ x < y \\ y < 3x \end{cases} \quad (1) \begin{cases} x+y = 300 \\ x < y < 3x \end{cases}$$

$$2x < x+y < 4x$$

$$2x < 300 < 4x$$

$$(2) \begin{cases} x < 150 \\ x > 75 \end{cases}$$

Кол-во решений в натуральных числах системы (1) и (2) равно.

$75 < x < 150$  имеет 74 решения.

Ответ: 74



№ 3

$$\begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)-6(y-1) = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=20 \end{cases}$$

Положим  $a = x-6$ ,  $b = y-1$ .

$$\begin{cases} a-6b = \sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=20 \end{cases}$$

1)  $a-6b = \sqrt{ab}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a-6b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a-6b \geq 0 \end{cases} \quad D=25b^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 6b \\ a=9b \\ a \geq 6b \\ a=4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9b \geq 0 \\ a=4b \leq 0 \end{cases}$$

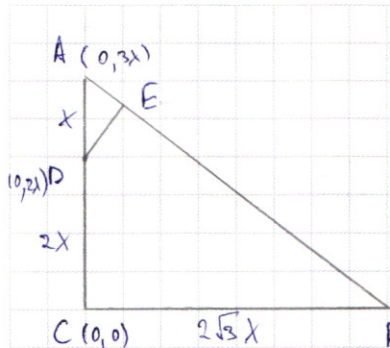
Тогда  $\begin{cases} a-6b = \sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9b \geq 0 \\ a^2+2b^2=20 \\ a=4b \leq 0 \\ a^2+2b^2=20 \end{cases} \begin{cases} a=9b \geq 0 \\ b^2 = \frac{20}{83} \\ a=4b \leq 0 \\ b^2 = \frac{10}{9} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 18\sqrt{\frac{5}{83}} \text{ и } b = 2\sqrt{\frac{5}{83}} \\ a = \frac{4\sqrt{10}}{3} \text{ и } b = -\frac{\sqrt{10}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + 18\sqrt{\frac{5}{83}} \text{ и } y = 1 + 2\sqrt{\frac{5}{83}} \\ x = 6 - \frac{4\sqrt{10}}{3} \text{ и } y = 1 - \frac{\sqrt{10}}{3} \end{cases}$$

Ответ:  $(6 + 18\sqrt{\frac{5}{83}}; 1 + 2\sqrt{\frac{5}{83}})$ ,  $(6 - \frac{4\sqrt{10}}{3}; 1 - \frac{\sqrt{10}}{3})$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



н 4

Пусть  $AD = x$ ,  $CD = 2x$

$\angle BED = \angle BCD = 90^\circ \Rightarrow BCDE$  - вписанный

$\angle CBD = \angle CED = 30^\circ$ . Тогда  $BC = 2\sqrt{3}x$

$$\tan \angle BAD = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Введём ПСК, т.е.  $C(0,0)$ ,  $A(0, 3x)$ ,  $B(2\sqrt{3}x, 0)$

$$DE \perp AB \Rightarrow \vec{DE} \cdot \vec{AB} = 0$$

$E \in AB$ , тогда  $E(2\sqrt{3}xt, 3x - 3xt)$  при некотором  $t$

$\vec{DE} \left\{ 2\sqrt{3}xt, x - 3xt \right\}$ ,  $\vec{AB} \left\{ 2\sqrt{3}x, -3x \right\}$ .

$$\vec{DE} \cdot \vec{AB} = (2\sqrt{3}xt)(2\sqrt{3}x) + (x - 3xt)(-3x) = 0$$

$$12t - 3(1 - 3t) = 0$$

$$u \quad t = \frac{1}{7}$$

$$E \left( \frac{2\sqrt{3}x}{7}, \frac{18x}{7} \right)$$

$$\vec{ED} \left\{ -\frac{2\sqrt{3}x}{7}, -\frac{4x}{7} \right\}, \quad \vec{EC} \left\{ -\frac{2\sqrt{3}x}{7}, -\frac{18x}{7} \right\}, \quad x = \frac{AC}{3} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$S_{DEEC} = \frac{1}{2} |\vec{ED} \times \vec{EC}| = \frac{1}{2} \left| \left(-\frac{2\sqrt{3}x}{7}\right) \left(-\frac{18x}{7}\right) - \left(-\frac{4x}{7}\right) \left(-\frac{2\sqrt{3}x}{7}\right) \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{49} x^2 |36\sqrt{3} - 8\sqrt{3}| = \frac{28\sqrt{3}x^2}{2 \cdot 49} = \frac{2\sqrt{3}x^2}{7} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Ответ: а)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$       б)  $\frac{2\sqrt{3}}{9}$



$$f(ab) = f(a) + f(b) \quad \text{и } f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = f(1) = 0$$

$$f(a) = f(1) + f(a) \quad \text{т.е. } f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$$

$$\text{Тогда } f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$$

кол-во  $(x, y)$ , т.ч.  $2 \leq x, y \leq 22$  и  $f(x) < f(y)$   
 равно кол-во  $(x, y)$ , т.ч.  $2 \leq x, y \leq 22$  и  $f(x) = f(y)$   
 кол-во  $(x, y)$ , т.ч.  $2 \leq x, y \leq 22$  и  $f(x) = f(y)$ .

- 1) 2
- 2) 4
- 3) 6
- 4) 4
- 5) 1
- 6) 2
- 7) 0
- 8) 1
- 9) 1

$$2^2 - 2^2 - 4^2 - 6^2 - 4^2 - 1^2 - 2^2 - 1^2 - 1^2 =$$

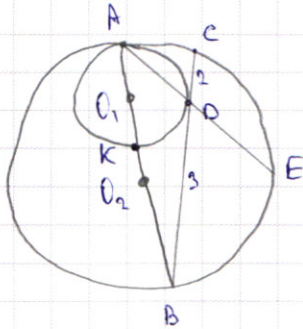
$$= 441 - 4 - 16 - 36 - 16 - 1 - 4 - 1 - 1 = 362$$

Ответ: 362

$f(n)$	$n$
1	2
1	3
2	4
2	5
2	6
3	7
3	8
2	9
3	10
5	11
3	12
6	13
4	14
3	15
4	16
8	17
3	18
9	19
4	20
4	21
6	22



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{aligned} & \text{н 5} \quad O_1A = r, \quad O_2A = R \\ & \angle O_1DB = 90^\circ, \quad O_1B = 2R - r, \quad O_1D = r. \end{aligned}$$

$$(2R - r)^2 = r^2 + 3^2$$

$$\angle ACB = 90^\circ, \quad \triangle ACB \sim \triangle O_1DB.$$

$$\frac{AB}{O_1B} = \frac{CB}{DB}, \quad \frac{2R}{2R - r} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow 5r = 4R$$

$$\begin{cases} (2R - r)^2 = r^2 + 3^2 \\ 5r = 4R \end{cases} \Leftrightarrow r = \frac{6\sqrt{5}}{5} \quad \text{и} \quad R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$BK = 2R - 2r = \frac{3\sqrt{5}}{5}, \quad \cos \angle ABC = \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \sin \angle ABC = \frac{2}{3}.$$

$$KD^2 = BK^2 + BD^2 - 2BK \cdot BD \cos \angle ABC = \frac{9}{5} + 9 - 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{24}{5}$$

$$KD = \frac{2\sqrt{30}}{5}, \quad BE = KD \cdot \frac{2R}{2r} = \frac{2\sqrt{30}}{5} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{5}{6\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

$$\angle BEA = 90^\circ, \quad AE^2 = AB^2 - BE^2 = 45 - \frac{15}{2} = \frac{75}{2}, \quad AE = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

$$\sin \angle ADC = \sin \angle AKD = \cos \angle KAD = \frac{AD^2 + AE^2 - BE^2}{2AD \cdot AE} = \frac{45 + \frac{75}{2} - \frac{15}{2}}{2 \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{2}} =$$

$$= \frac{75}{15\sqrt{30}} = \frac{5}{\sqrt{30}}$$

$$S_{ABEE} = \frac{1}{2} AE \cdot BE \cdot \sin \angle ADC = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{\sqrt{30}} = \frac{125}{4\sqrt{5}} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$$

Ответ:  $\frac{6\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}}{2}, \frac{25\sqrt{5}}{4}$



№ 6

$$8x - 6 \mid 2x - 1 \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7 \quad \text{на } \left[-\frac{1}{2}; 1\right].$$

$$ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7.$$

$$8x^2 + (a-6)x + b-7 \leq 0 \quad \text{на } \left[-\frac{1}{2}; 1\right].$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (a-6)\left(-\frac{1}{2}\right) + b-7 \leq 0 \\ 8(1)^2 + (a-6)(1) + b-7 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b - a \leq 4 \\ a + b \leq 5 \end{cases}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$I) x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]: \quad 8x + 12x - 6 \leq -8x^2 + 6x + 7$$

$$8x^2 + 14x - 13 \leq 0.$$

$$49 + 104 \quad 153$$

$$\frac{-7 - \sqrt{153}}{8}, \quad \frac{-7 + \sqrt{153}}{8}$$

$$II) x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

$$8x - 12x + 6 \leq -8x^2 + 6x + 7.$$

$$8x^2 - 18x - 1 \leq 0.$$

$$8x^2 + (a-6)x + b - 7 \leq 0 \quad \text{на } \left[-\frac{1}{2}; 1\right].$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 \cdot \frac{1}{4} + (a-6) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + b - 7 \leq 0. \\ 8 \cdot 1 + (a-6) \cdot 1 + b - 7 \leq 0. \end{cases}$$

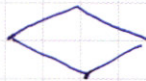
$$\begin{cases} 4 - a + 6 + 2b - 14 \leq 0. \\ 8 + a - 6 + b - 7 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b - a \leq 4 \\ a + b \leq 5 \end{cases}$$

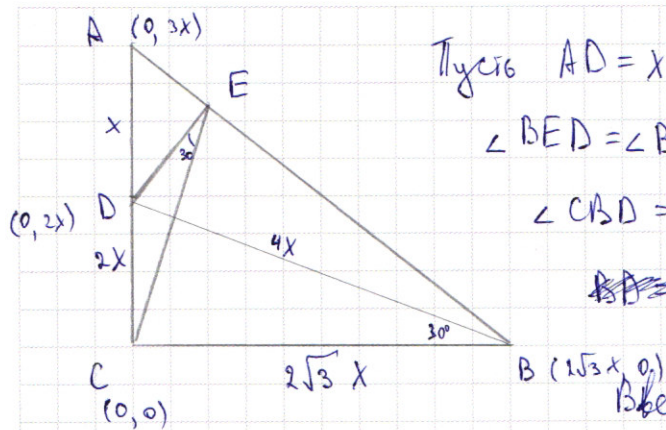
$$\begin{cases} a + b \leq 5 \\ b \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b \leq 5 \\ b \leq 3 \end{cases}$$

$$\frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$







Пусть  $AD = x$ ,  $CD = 2x$

$\angle BED = \angle BCD = 90^\circ \Rightarrow BCDE$  - вписанный.

$\angle CBD = \angle CED = 30^\circ$

~~$AB = 4x$~~  и  ~~$BC = 2\sqrt{3}x$~~   
 $BC = 2\sqrt{3}x$ .

Введем систему координат, т.т.  $C(0,0)$   
 $A(0, 3x)$   
 $B(2\sqrt{3}x, 0)$

~~$E \in AB$~~ :  $E(2\sqrt{3}xt, 3x - 3xt)$  при каком-то  $t$ .

$DE \perp AB \Rightarrow \vec{DE} \cdot \vec{AB} = 0$ .

$$(2\sqrt{3}xt) \cdot (2\sqrt{3}x) + (x - 3xt)(-3x) = 0.$$

$$12t - 3(1 - 3t) = 0. \quad 12t - 3 + 9t = 0. \quad t = \frac{1}{7}.$$

$$E\left(\frac{2\sqrt{3}x}{7}, \frac{18x}{7}\right) \quad \vec{ED} \left\{ -\frac{2\sqrt{3}x}{7}, -\frac{4x}{7} \right\}, \quad \vec{EC} \left\{ -\frac{2\sqrt{3}x}{7}, -\frac{18x}{7} \right\}$$

$$S_{DEC} = \frac{1}{2} |\vec{ED} \times \vec{EC}| = \left| \left(-\frac{2\sqrt{3}x}{7}\right) \left(-\frac{18x}{7}\right) - \left(-\frac{4x}{7}\right) \left(-\frac{2\sqrt{3}x}{7}\right) \right| \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{49} |36\sqrt{3} - 8\sqrt{3}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{49} \cdot 28\sqrt{3} \cdot x^2 = \frac{14\sqrt{3}x^2}{49} = \frac{2\sqrt{3}x^2}{7}$$

$$x = \frac{\sqrt{7}}{3}, \quad S_{DEC} = \frac{2\sqrt{3}x^2}{7} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{tg} \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$   
 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Leftrightarrow AE \cdot AB = AD \cdot AC \Rightarrow \angle DEB - \text{вписанный}$   
 $\angle CBD = \angle CED = 30^\circ$   
 $BC = CD \cdot \operatorname{ctg} \angle CBD = \frac{2}{3} AC \cdot \sqrt{3}$   
 $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{2}{3} AC \sqrt{3}}{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$   
 $AB = \sqrt{AC^2 + \frac{4}{9} AC^2} = AC \cdot \frac{\sqrt{13}}{3}$   
 $DE = BC \cdot \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{1}{3} AC}{\frac{\sqrt{13}}{3} AC} \cdot \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3 \sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3 \sqrt{13}}$

$$x = \frac{1}{3} AC$$

$$AD = x, \quad CD = 2x, \quad BC = 2\sqrt{3}x, \quad \text{DE} \quad AB =$$

просто посчитать.



№ 6

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right].$$

$$8x - 6 \mid 2x - 1 \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7.$$

$$1) 8x - 6 \mid 2x - 1 \leq ax + b$$

$$\text{I) } x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]: 8x + 12x - 6 \leq ax + b$$

$$(20 - a)x \leq 6 + b$$

$$\text{A) } 20 - a > 0 \text{ или } 20 > a$$

$$-\frac{1}{2}(20 - a) \leq 6 + b$$

$$a - 20 \leq 12 + 2b$$

$$\begin{cases} a < 20 \\ a - 2b \leq 32 \end{cases}$$

$$\text{B) } a = 20 \quad 0 \leq 6 + b$$

$$\begin{cases} a = 20 \\ -6 \leq b \end{cases}$$

$$\text{B) } 20 - a < 0 \text{ или } 20 < a$$

$$\frac{1}{2}(20 - a) \leq 6 + b$$

$$20 - a \leq 12 + 2b, \quad a + 2b \geq 8$$

$$\begin{cases} 20 < a \\ b \leq a + 2b \end{cases} \quad \begin{cases} 20 < a \\ 14 \leq a + b \end{cases}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$b = aq$$

$$c = aq^2$$

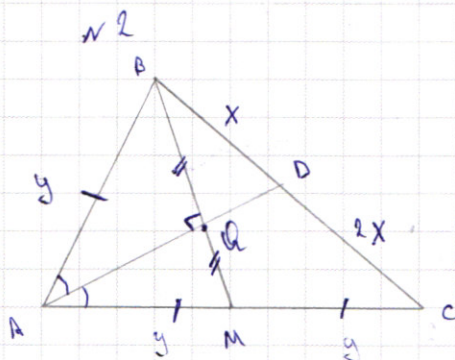
$$d = aq^3 \text{ — корень } ax^2 - 2bx + c = 0. \Rightarrow a^3 q^6 - 2a^2 q^4 + aq^2 = 0.$$

$$aq^2(a^2 q^4 - 2aq^2 + 1) = 0.$$

$$aq^2(aq^2 - 1)^2 = 0$$

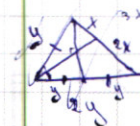
$$\begin{cases} aq^2 = 0 \\ aq^2 = 1 \end{cases}$$

Ответ: 0 или 1



AQ — бисс и высота  $\triangle ABM$

$\triangle ABM$  — равнобедренный



$$1 = \frac{BQ}{QM} = \frac{BD}{DC} \cdot \left( \frac{CM}{MA} + 1 \right) = 2 \frac{BD}{DC}; \quad CD = 2BD$$

76 и 149

$$P = 3x + y + 2y = 3(x + y) = 900$$

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ 3x \leq y + 2y \\ y < 2y + 3x \\ 2y < y + 3x \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y = 300 \\ x < y < 3x \\ y < 5x \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 2x < x + y < 4x \\ 2x < 300 < 4x \\ x < 150 \\ x > 75 \end{cases}$$

от 76 до 149 включительно

$$149 - 76 + 1 = 74$$



~ 3

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 12x + 2y^2 - 4y + 20 = 0$$

$$D_1 = 36 - 2y^2 + 4y - 20 = -2y^2 + 4y + 16 = 2(-y^2 + 2y + 8) \geq 0$$

$$y^2 - 2y - 8 \leq 0$$

$$y \in [-2; 4]$$

$$(x-6)^2 - 36 + 2(y-1)^2 - 4 + 20 = 0$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 20$$

~~$$\begin{aligned} x + 6y &= a \\ x + 6y &= b \\ a &= \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{24}} - b + 6 \end{aligned}$$

$$x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{b-a}{12}$$~~

$$2y^2 - 4y + x^2 - 12x + 20 = 0$$

$$D_1 = 4 - 2x^2 + 24x - 40 = -2(x^2 - 12x + 18) \leq 0$$

$$\begin{aligned} xy - 6y - (x-6) \\ y(x-6) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 20 \end{cases}$$

$$BA \cdot BK = BD^2$$

$$BK = \frac{BD^2}{BA} = \frac{9}{3\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x^2 + 36y^2 - 12xy = xy - 6y - x + 6 \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = x - 6 \\ b = y - 1 \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 = 20 \end{cases}$$

$$a - \sqrt{a} \sqrt{b} - 6b = 0$$

$$D = b + 24b = 25b$$

$$\sqrt{a} = \frac{\sqrt{b} \pm 5\sqrt{b}}{2} \neq 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{a} = 3\sqrt{b} \\ \sqrt{a} = -2\sqrt{b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 9b \\ a = 4b \end{cases}$$

$$I) 9b - 6b = 3\sqrt{b}$$

$$II) 4b - 6b = 2\sqrt{b}$$

$$a - 6b = \sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 6b \geq 0 \\ a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \end{cases} \begin{cases} a \geq 6b \\ a^2 - 13b \cdot a + 36b^2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$(2) D = 169b^2 - 144b^2 = 25b^2$$

$$a = \frac{13b \pm 5b}{2}$$

$$\begin{cases} a = 9b \\ a = 4b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 6b \\ a = 9b \\ a \geq 6b \\ a = 4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9b \geq 0 \\ a = 4b \leq 0 \end{cases}$$

$$* 1) \begin{cases} a^2 + 2b^2 = 20 \\ a = 4b \leq 0 \end{cases} \begin{cases} 16b^2 + 2b^2 = 20 \\ a = 4b \leq 0 \end{cases} \quad b^2 = \frac{10}{9} \quad \begin{cases} b = -\frac{\sqrt{10}}{3} \\ a = -\frac{4\sqrt{10}}{3} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} a^2 + 2b^2 = 20 \\ a = 9b \geq 0 \end{cases} \begin{cases} 83b^2 = 20 \\ b = 2\sqrt{\frac{20}{83}} \\ a = 18\sqrt{\frac{20}{83}} \end{cases}$$



$$f(ab) = f(a) + f(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = f(a \cdot \frac{1}{a}) = f(a) + f(\frac{1}{a}), \text{ т.е. } f(a) = -f(\frac{1}{a}) \\ \text{Тогда } f(a:b) = f(a) - f(b) \end{array} \right.$$

$$f(1 \cdot b) = f(1) + f(b)$$

$$f(1) = 0 \quad f(2) = 1 \quad f(3) = 1$$

~~$$f\left(\prod_{k=1}^n p_k^{\alpha_k}\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f(p_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k [f]$$~~

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
f(n)	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	9	6

Кол-во пар  $(x, y)$ ,  $2 \leq x, y \leq 22$ , т.ч.  $f(x) < f(y)$  равно кол-ву пар  $(x, y)$ ,  $2 \leq x, y \leq 22$  минус кол-во пар  $(x, y)$ , т.ч.  $2 \leq x, y \leq 22$  и  $f(x) = f(y)$

~~$$21 \cdot 21 =$$~~

$$21^2 - 2^2 - 4^2 - 6^2 - 8^2 - 10^2 - 12^2 - 14^2 - 16^2 - 18^2 - 20^2 =$$

$$= 441 - 4 - 16 - 36 - 64 - 100 - 144 - 196 - 256 - 324 - 400 =$$

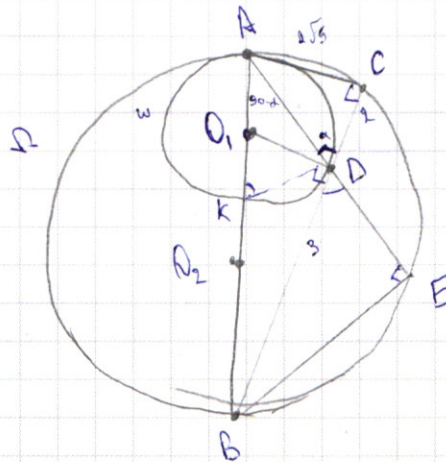
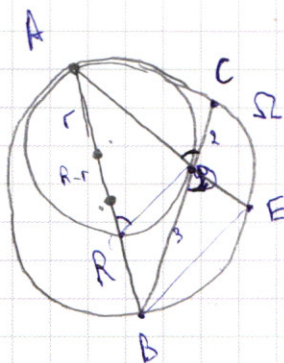
$$= 442 - 80 = 362$$

- 1) 2
- 2) 4
- 3) 6
- 4) 4
- 5) 1
- 6) 2
- 8) 1
- 9) 1

~~$$\frac{25}{4} - 5r +$$~~

$$\frac{9}{4} r^2 - r^2 = 9$$

$$5r^2 = 36$$



$$\frac{2R - r}{2R} = \frac{3}{5}$$

$$10R - 5r = 6R$$

$$4R = 5r$$

$$(2R - r)^2 = 3^2 + r^2$$

$$4R^2 - 4Rr + r^2 = 9 + r^2$$

$$\frac{25r^2}{4} - 5r^2 - 9 = 0$$

$$25r^2 - 20r^2 - 36 = 0$$

$$r^2 = \frac{36}{5}$$

$$r = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ и } R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$