МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Из свойства геом. прогрессии: $b=\sqrt{ac}$; $b^2=ac$

Пусть d - четвёртый член прогрессии, тогда d — корень ур-я $ax^2-2bx+c=0$

$$D=4b^2-4ac=4b^2-4b^2=0,$$

след-но $ax^2-2bx+c$ — квадрат:

$$(\sqrt{a}x-\sqrt{c})^2=0$$

$$d=x=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}};$$

Из свойства геом. прогрессии: $c^2=b\cdot d$

$$c^2=b\cdot\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$$

$$c^2=\sqrt{ac}\cdot\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$$

$$c^2=c$$

$$c^2-c=0$$

$$c(c-1)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}c=0\\c=1\end{array}\right.$$

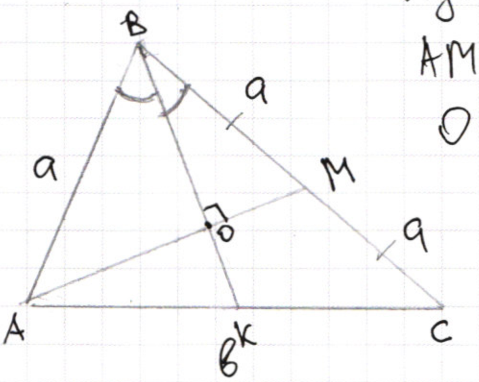
$c\neq0$ по опред-ю геом. прогрессии, след-но $c=1$.

Ответ: 1.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№2

$P = 900$



Пусть вершины треуг-ка — A, B, C;
AM - медиана; BK - биссектриса;
O - т. пересечения AM и BK.

Рассмотрим $\triangle ABO$ и $\triangle MBO$ — прямоугольные (по условию $AM \perp BK$)

~~сторо~~ катет BO - общий, $\angle ABO = \angle MBO$ (BK-биссек.)

след-но $\triangle ABO = \triangle MBO$ по катету и острому углу.

Значит, $AB = MB = MC$. Обозначим $AB = MB = MC = a$; $AC = b$.

Тогда, $3a + b = 900$

$a = \frac{900 - b}{3}$, след-но $b \vdots 3$ (a должно быть целое)

$b_1 = 3$; $a_1 = 299$

$b_2 = 6$; $a_2 = 298$

...

$b_{299} = 897$ $a_{299} = 1$

Но, по нер-ву треуг-ка $b < 3a$

$900 - 3a < 3a$

$6a > 900$

$a > 150$

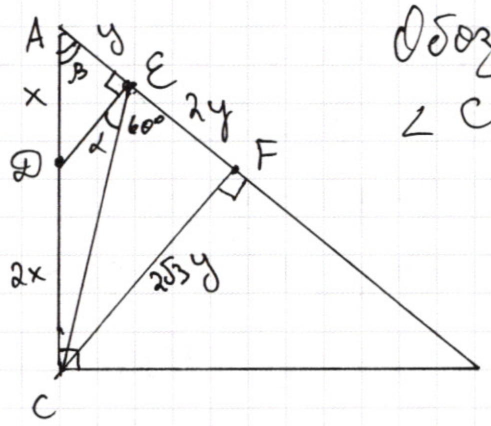
Значит, $a_1 = \cancel{150}\,151$, $a_2 = 152$, ..., $a_n = 299$

$n = 149$

Ответ: 149.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



Обозначим $AD = x$, тогда $DC = 2x$; $\angle CED = \alpha$; $\angle BAC = \beta$.

Проведём прямую $CF \parallel DE$. Тогда, по теореме о пропорциональных отрезках $\frac{EF}{AE} = 2$

Обозначим $AE = y$; $EF = 2y$.

Т.к. $DE \perp AB$, то $\angle DEF$ – прямой. След-но, $\angle CEF = 90^\circ - \alpha = 60^\circ$; $tg\angle CEF = \frac{CF}{EF} = tg 60^\circ$

значит, $\frac{CF}{2y} = \sqrt{3}$; $CF = 2\sqrt{3}y$

Тогда, $tg\,\beta = \frac{CF}{AF} = \frac{2\sqrt{3}y}{3y} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

~~$tg\,\beta = \frac{BC}{AC}$~~ По условию $3x = \sqrt{7}$; $x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

Из прямоуг. треуг-ка AFC: $3y^2 + 12y^2 = 9x^2$

$21 15 y^2 = 9x^2$

$7y^2 = 3x^2$

$y^2 = \frac{3}{7}x^2 = \frac{3}{7}\cdot\frac{7}{9} = \frac{1}{3}$

$y = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Из $\triangle AED$: $ED = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{\frac{7}{9} - \frac{1^{(3}}{3}} =$

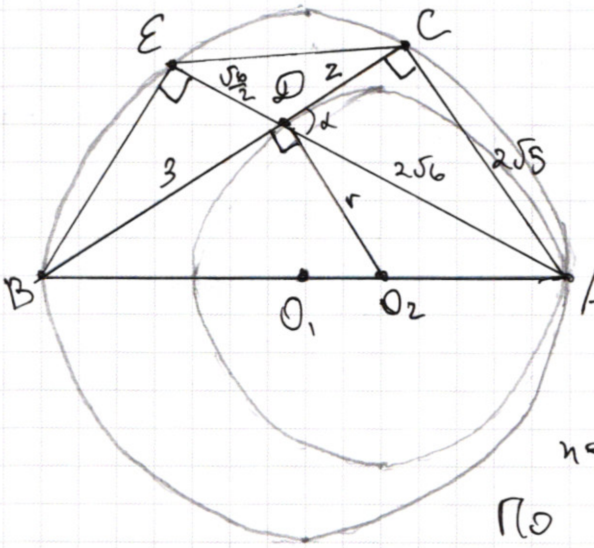
$= \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

Из $\triangle EFC$: $EC=\sqrt{4y^2+12y^2}=4y=\frac{4\sqrt3}{3}$

Тогда, $S_{CED}=\frac{1}{2}ED\cdot EC\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4\sqrt3}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt3}{9}$

Ответ: а) $\frac{2\sqrt3}{3}$; б) $\frac{2\sqrt3}{9}$.

№5.



Обозначим ~~...~~ O_1 – центр Ω; O_2 – центр ω; R – радиус Ω; r – радиус ω.

Тогда, $BO_2=2R-r$, $DO_2=r$, ~~...~~ $DO_2\perp BC$, т.к. радиус в точку касания перпендик. касат-ной.

По теор. Пифагора: $r^2+9=(2R-r)^2$

$r^2+9=4R^2-4R\cdot r+r^2$; $4R^2-4Rr-9=0$. (1)

~~...~~ углы BCA и BEA – прямые, т.к. опираются на диаметр. Тогда, $\angle BDO_2 \sim \triangle BCA$ ($\angle CBA$ - общий, $\angle BDO_2$ и $\angle BCA$ – прямые)

Значит, $\frac{BD}{BC}=\frac{2R-r}{2R}=\frac{3}{5}$; $r=\frac{4}{5}R$

Подставим в (1): $4R^2-4R\cdot\frac{4}{5}R-9=0$;

$R^2=\frac{45}{4}$; $R=\frac{3}{2}\sqrt5$; $r=\frac{6}{5}\sqrt5$.

Из прямоуг. $\triangle BCA$: $AC=\sqrt{4R^2-25}=2\sqrt5$

Из прямоуг. $\triangle ACD$: $AD=\sqrt{4+20}=2\sqrt6$

Обозначим $\angle ADC=\alpha$; ~~...~~ $\cos\alpha=\frac{DC}{AD}=\frac{\sqrt6}{6}$;

$\sin\alpha=\frac{AC}{AD}=\frac{2\sqrt5}{2\sqrt6}=\frac{\sqrt5}{\sqrt6}$

Из $\triangle BED$ – прямоуг:

$\angle EDB=\alpha$ (вертик.); $\cos\alpha=\frac{ED}{3}$; $\frac{\sqrt6}{6}=\frac{ED}{3}$; $ED=\frac{\sqrt6}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда, $S_{BACE} = \frac{1}{2} AE \cdot BC \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} =$
$= \frac{25\sqrt{5}}{4}$

Ответ: $\frac{3}{2}\sqrt{5}$; $\frac{6}{5}\sqrt{5}$; $\frac{25\sqrt{5}}{4}$

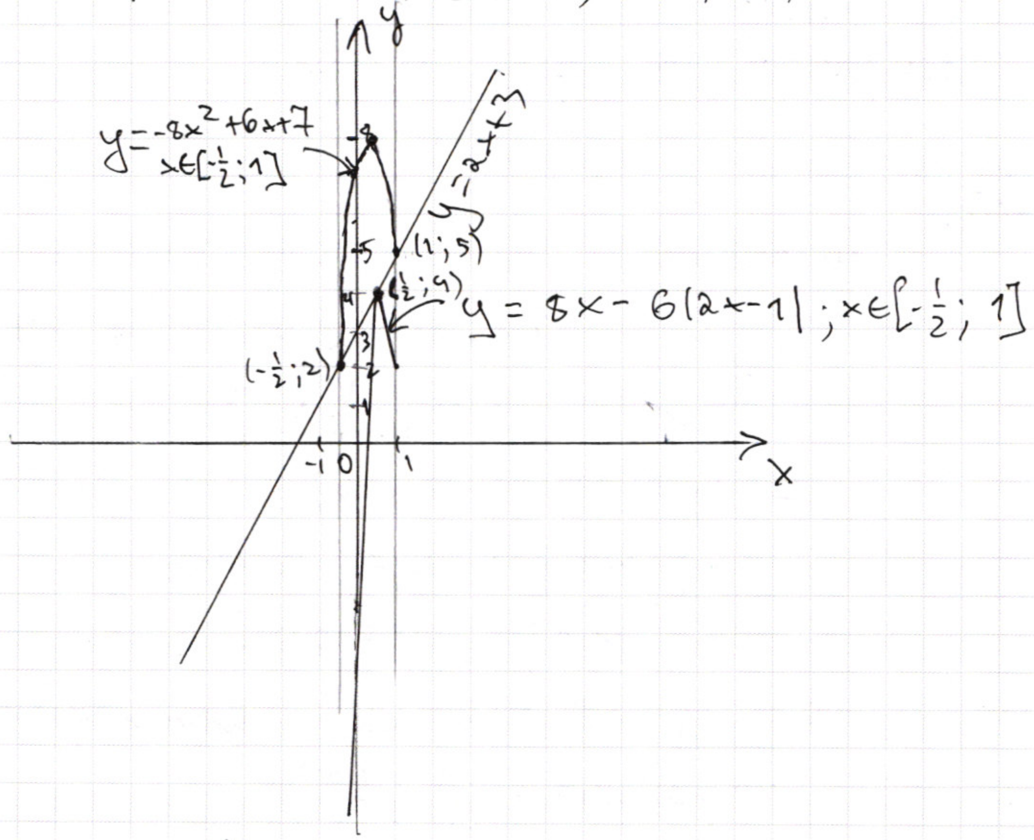
№6.

Перепишем: $\begin{cases} ax+b \geq 8x - 6|2x-1| \\ ax+b \leq -8x^2+6x+7 \\ x \in [-\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$

1. $y = 8x - 6|2x-1|$
   1) $x \geq \frac{1}{2}$: $y = -4x+6$
   2) $x < \frac{1}{2}$: $y = 20x-6$
2. $y = -8x^2+6x+7$ – ~~прям~~ парабола, вершина – $(\frac{3}{8}; \frac{65}{8})$
   при $x = -\frac{1}{2}$, $y = 2$
   при $x = 1$, $y = 5$

чтобы выполнялось неравенство, прямая $y=ax+b$ должна лежать под частью параболы и над кривой.

Единственное знач-е a и b, удовлетвор. — $a=2$ и $b=3$, т.к. прямая $y=2x+3$ проходит через точки $(-\frac{1}{2};2)$, $(\frac{1}{2};4)$, $(1;5)$.



Ответ: $(2;3)$.

№3. $\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$

$xy-6y-x+6=y(x-6)-(x-6)=(y-1)(x-6)$

$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(y-1)(x-6)} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$

$2y^2-4y+2=2(y-1)^2$

$x^2-12x-36=\cancel{(x-6)(x+6)=x^2-36}\ (x-6)^2$

$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2-18=0 \end{cases}$

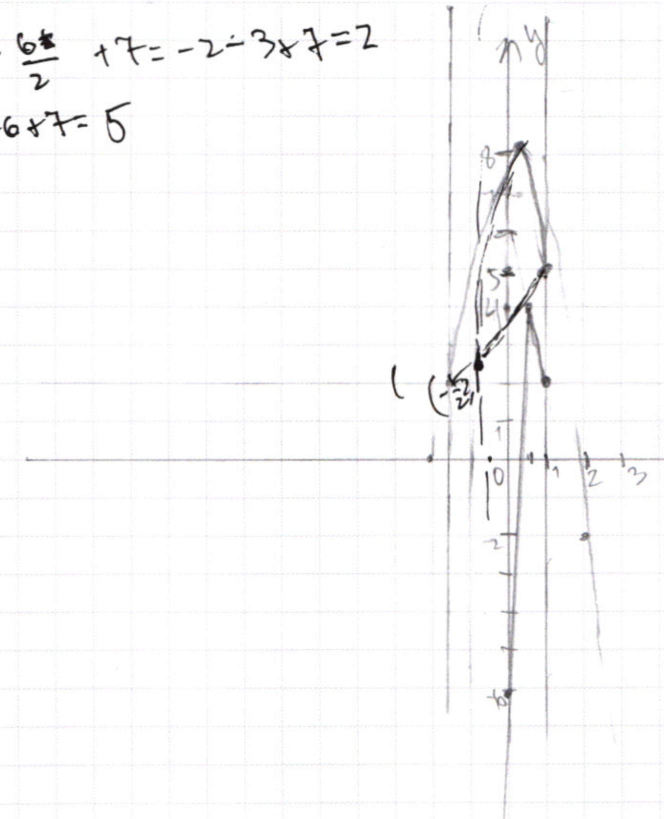
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-8\frac{1}{4}-\frac{6}{2}+7=-2-3+7=2$

$-8+6+7=5$



$y=ax+b$ $(-\frac{1}{2};2)$

$2=-\frac{a}{2}+b$ $(1;5)$

$5=a+b$; $a=5-b$

$4=-a+2b$

$4=b-5+2b$

$3b=9$; $b=3$

$a=2$

$y=2x+3$

$4=2\cdot\frac{1}{2}+3$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} & ; x\geq 6y \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$xy-6y-x+6=y(x-6)-(x-6)=(y-1)(x-6)$

$x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6$

$x^2+x+36y^2+6y-13xy-6$

$x^2-12x+36=(x-6)^2$

$2(x-6)(4y-4)$

$\sqrt{2}$.

$\frac{x-6+y-1}{2}\geq\sqrt{(x-6)(y-1)}$

$\frac{x+y-7}{2}\geq\sqrt{(x-6)(y-1)}$

$x+y-7\geq 2\sqrt{(x-6)(y-1)}$

$\frac{x+y-7}{2}\geq x-6y$

$x+y-7\geq 2x-12y$

$2x-12y-x-y+7\leq 0$

$x-13y+7\leq 0$

$x\leq 13y-7$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___
(Нумеровать только чистовики)

$x^2 + 2y^2 - 11x - 10y + 20 = \sqrt{(x-6)(y-1)}$ $-11\cancel{x} = 2 \cdot \frac{11}{2}$

$$\begin{array}{r|l} 2y^2 - 4y & y-1 \\ -\,2y^2 - 2y & \overline{2y} \\ \hline -2y & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2y^2 - 4y + 2 & y-1 \\ -\,2y^2 - 2y & \overline{2y-2} \\ \hline -2y + 2 & \\ -\,-2y + 2 & \end{array}$$

$2y^2 - 4y + 2 = 2(y-1)^2$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 12x + 36 & x-6 \\ -\,x^2 - 6x & \overline{x+6} \\ \hline -6x - 36 & - \end{array}$$

$b^2 + 2a^2 - 18 = 0$ $x - 6y = \sqrt{ab}$

$a = 18 - b^2$

$x = 6$ $y = \cancel{3}\cancel{10}\ 4$

$x = 9$

$x = 10$ $y = 2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1 $b^2=ac$; $b=\sqrt{ac}$

$ax^2-2bx+c=0$

$D=4b^2-4ac=4b^2-4b^2=0$

$b=\sqrt{ac}$

$(\sqrt{a}x-\sqrt{c})^2=0$

$\sqrt{a}x=\sqrt{c}$

$x=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}=$

$b=\sqrt{ac}$

$c^2=b\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$

$c^2=\frac{\sqrt{ac}\cdot\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$

$c^2=c$

$c^2-c=0$

$c(c-1)=0$

$\left[\begin{array}{l}c=0\\ c=1\end{array}\right.$

$2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$

N3.

$\begin{cases}x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}\\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0\end{cases}$

$x^2-12x+36+2y^2-4y+2-18=0$

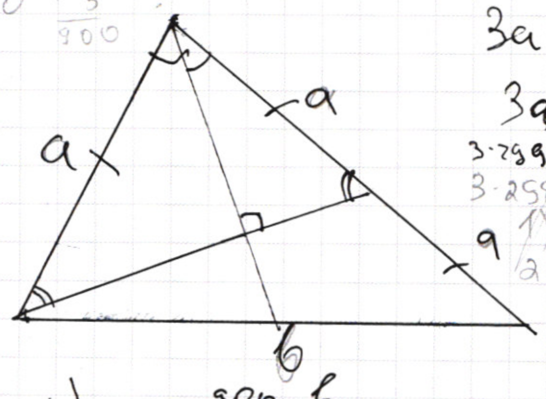
$2y(y-2)$

$\cancel{x^2-12xy}$ $xy-6y-x+6=x(y-1)-6(y-1)=$
$=(x-6)(y-1)$
$x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}$
$\cancel{x^2-12x=x^2-6x-6x=x(x-6)-6x}$
$\cancel{2y^2-4y=2y^2-2y-2y=2y(y-1)-2y}$
$\cancel{x(x-6)-6x+2y(y-1)-2y+20=0}$
$x^2-12xy+36y^2=(x-6)(y-1)$
$(x-6)^2=\underbrace{x^2-12x+36}$
$(y-1)^2=\underbrace{y^2-2y+1}$
$x^2-12y(\cancel{x}-3y)$ $x^2-12x+36+y^2-2y+1\ \cancel{20}+y^2-2y-17=0$
$(x-6)^2+(y-1)^2+y^2-2y-17=0$
$(x-6)^2+(y-1)^2+(y-1)^2-18=0$
$(x-6)^2+2(y-1)^2-18=0$

$900:6=150$

N2 $P=900$

$900:5=180$ $180\cdot5=900$



$3a+b=900$
$3a=900-b$
$877:3=299$
$\cancel{3\cdot299=877}$
$\cancel{3\cdot258=874}$
$874:3$
$\cancel{1)\ b=1\quad a=259}$
$\cancel{2)\ b=2\quad a=298}$

$897:3=299$

$\cancel{1)\ b=1\quad a=299}$
$\cancel{2)\ b=2\quad a=298}$
$\cancel{299)\ b=297\quad a=1}$

1) $a=\dfrac{900-b}{3}$

$3=900-b$
$b=297$

$b_1=3,\ b_2=6,\ \ldots,\ b_n=3n$ $\cancel{b_n}$ $n=897$
$b_{299}=3\cdot299$

1) $b=3;\ a=299$
2) $b=6;\ a=298$
...
299) $b=897;\ a=1$

1) $b=2a$
$a=\dfrac{900-b}{3};\ a=\dfrac{900-2a}{3}$
$3a=900-2a$
$5a=900$
$a=180$

$b<3a$

$299-150=149$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

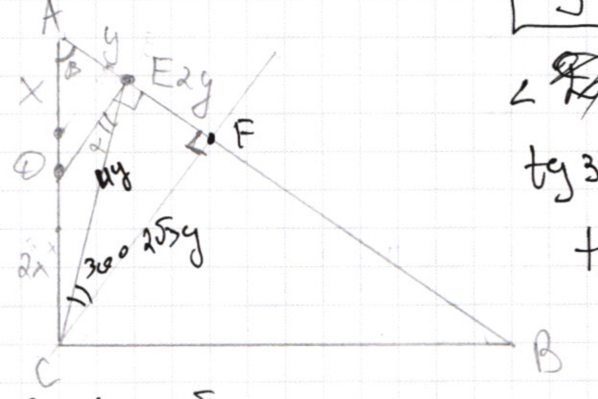
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{900-b_n}{3}$; b_n

Ответ: 299

$\frac{900-b_m}{3}$;

№4.



$\alpha = 30^\circ$

$\boxed{\operatorname{tg}\beta - ?}$

$\frac{\frac{\sqrt3}{2}}{\frac12} = \sqrt3$

$\angle CEF = 60^\circ \Rightarrow \angle ECF = 30^\circ$

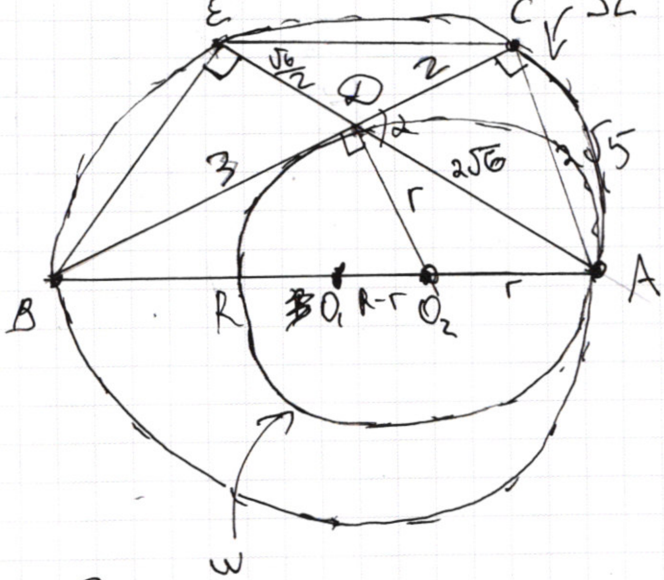
$\operatorname{tg}30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac12}{\frac{\sqrt3}{2}} = \frac{\sqrt3}{3}$

$\operatorname{tg}30^\circ = \frac{2y}{FC}$; $FC = \frac{2y}{\frac{\sqrt3}{3}} = \frac{6y}{\sqrt3} =$

$= \frac{6\sqrt3 y}{3} = 2\sqrt3 y$

$\frac12 \cdot \frac23 \cdot \frac{2\sqrt3}{3} \cdot \frac12 = \frac{2\sqrt3}{9}$

$\operatorname{tg}\beta = \frac{2\sqrt3 y}{3y} = \frac{2\sqrt3}{3}$



$\cancel{(2R-r)^2 - r^2 = 9}$

$r^2 + 9 = (2R-r)^2$

$r^2 + 9 = 4R^2 - 4Rr + r^2$

$4R^2 - 4Rr - 9 = 0,$

$\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA \quad k = \frac35$

$\cancel{\frac{BO_2}{BD} = \frac{D}{AC} \cdot \frac53 = 0}$

$\frac{2R-r}{2R} = \frac35$; $6R = 10R - 5r$

$5r = 4R$

$r = \frac45 R$

$4R^2 - 4R\cdot\frac45 R - 9 = 0$

$4R^2 - \frac{16}{5}R^2 - 9 = 0$

$\frac{20R^2 - 16R^2}{5} = 9$

$\frac{4R^2}{5} = 9$; $4R^2 = 45$; $R^2 = \frac{45}{4}$; $R = \sqrt{\frac{5\cdot9}{4}} = \frac32\sqrt5$; $r = \frac45 \cdot \frac32\sqrt5 = \frac65\sqrt5$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$AC=\sqrt{4R^2-5^2}=\sqrt{4\cdot\frac{9\cdot5}{4}-25}=\sqrt{45-25}=\sqrt{20}=2\sqrt5$

$AD=\sqrt{4+20}=\sqrt{24}=2\sqrt6$

$tg\alpha=\sqrt5$; $\cancel{tg\alpha=}$ $\cos\alpha=\cancel{\frac{5}{5}}\frac{\sqrt6}{6}$; $\sin\alpha=\frac{\sqrt5}{\sqrt6}$

$\cos\alpha=\frac{ED}{3}$; $\frac{\sqrt6}{6}=\frac{ED}{3}$; $ED=\frac{3\sqrt6}{6}=\frac{\sqrt6}{2}$

$S_{BACE}=\frac12\left(2\sqrt6+\frac{\sqrt6}{2}\right)\cdot5\frac{\sqrt5}{\sqrt6}=\frac12\cdot\frac{5\sqrt6}{2}\cdot5\cdot\frac{\sqrt5}{\sqrt6}=$

$=\frac{25\sqrt5}{4}$

№6. $\begin{cases}ax+b\geq 8x-6|2x-1|\\ ax+b\leq -8x^2+6x+7\\ x\in[-\frac12;1]\end{cases}$

1. $y=8x-6|2x-1|$

1) $2x-1\geq0$; $x\geq\frac12$

$y=8x-6(2x-1)=8x-12x+6=-4x+6$ $=-4\cdot\frac12+6=-2+6=4$

2) $2x-1<0$; $x<\frac12$

$y=8x-6(1-2x)=8x-6+12x=20x-6$ $20\cdot\frac12-6=4$

2. $y=-8x^2+6x+7$

$x_0=\frac{-6}{-8\cdot2}=\frac{6}{16}=\frac38$; $y_0=-\frac{36+4\cdot8\cdot7}{-32}=\frac{224+36}{32}=\frac{260}{32}=\frac{65}{8}$

$\left(\frac38;\frac{65}{8}\right)$

$D=36+7\cdot8\cdot4=260=\frac{65}{8}$

$x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{260}}{-16}$

$32\cdot7=224$; $224+36=260$

$260:32=8$, 256

$\frac{260}{32}=\frac{65}{8}$

$260:4=65$; $65:8=8$, 64

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)