

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a , b , c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a , b , c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED .
5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{2}; 1]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 22$, $2 \leq y \leq 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $a; b; c; x$
 $b = a^2$
 $c = a^3$
 $x = a^3$

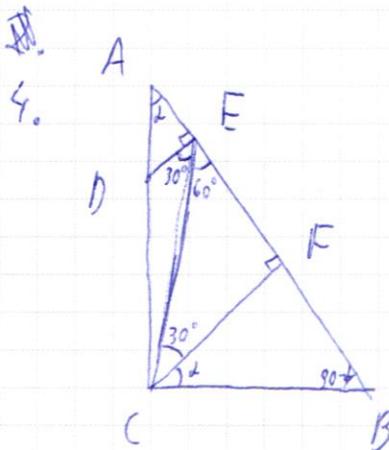
$$ax^2 - 2bx + c = 0$$

$$\Delta = 4b^2 - 4ac = 4(a^4 - a^2a^3) = 0$$

$$x = \frac{2b}{a} = 2a = a^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^3 = 2 = c$$

Ответ $c = 2$



$$DE \perp AB$$

$$CF \perp AB$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$$

$$\angle CED = 30^\circ$$

$$\angle CEB = 60^\circ$$

$$\angle ECF = 30^\circ$$

$$\angle CAB = \alpha$$

$$\triangle AED \sim \triangle ACF$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CF} = \frac{AE}{AF} = \frac{1}{3}$$

$$AE = x \Rightarrow AF = 3x$$

$$EF = AF - AE = 2x$$

$$CE = 4x = 2EF$$

$$\frac{DE}{CF} = \frac{1}{3} = \frac{DE}{2\sqrt{3}x} \Rightarrow DE = \frac{2}{\sqrt{3}}x$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{DE}{AE} = \frac{2x}{\sqrt{3}x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$CF = \tan 60^\circ \cdot EF = 2\sqrt{3}x$$

$$AC^2 = CF^2 + AF^2 = (2\sqrt{3}x)^2 + (3x)^2 = 21x^2 = 7 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$DE = \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

$$CE = 4x = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

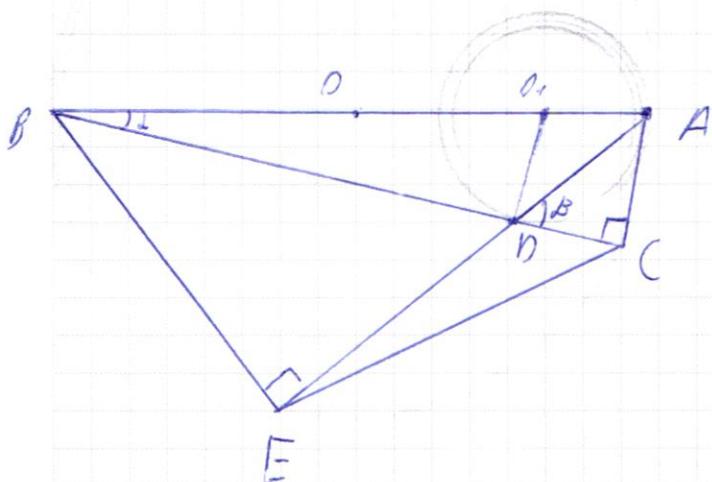
$$S_{\triangle EDC} = \frac{DE \cdot CE \sin 30^\circ}{2} = \frac{8}{2\sqrt{3} \cdot 2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ответ

$$a) \tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$d) S_{\triangle EDC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

5.



$$AB = 2R$$

$$\angle BCA = 90^\circ$$

$$O_1A = r$$

$$\angle BEO_1 = 90^\circ$$

$$CD = 2$$

$$BD = 3$$

$$BO_1 = BA - O_1A = 2R - r$$

$$O_1D \perp BC$$

$$BD^2 + DO_1^2 = BO_1^2$$

$$9 + r^2 = (2R - r)^2 = 4R^2 - 4Rr + r^2$$

$$4R^2 - 4Rr - 9 = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{2R} = \frac{BD}{BO_1} = \frac{3}{2R - r}$$

$$10R - 5r = 6R$$

$$4R = 5r \quad r = 0,8R$$

$$4R^2 - 4Rr - 9 = 4R^2 - \frac{4R \cdot 4R}{5} - 9 = 4R^2 - 3,2R^2 - 9 =$$

$$= 0,8R^2 - 9 = 0 \Rightarrow R^2 = \frac{9}{0,8} = \frac{9 \cdot 5}{4}$$

$$R = \frac{3\sqrt{5}}{2} \quad r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 25} = \sqrt{20}$$

$$AD = \sqrt{AC^2 + DC^2} = \sqrt{20 + 4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\triangle ADC \sim \triangle BDE \Rightarrow \frac{DE}{DC} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow DE = \frac{DC \cdot BD}{DA} =$$

$$= \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{24}} = \frac{6}{\sqrt{24}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

$$\angle CDA = B$$

$$\sin B = \frac{AC}{DA} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$S_{ACEO} = \frac{BC \cdot AE \cdot \sin B}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{2} \cdot \left(2\sqrt{6} + \frac{3}{\sqrt{6}} \right) =$$

$$= \frac{5\sqrt{5}}{2} \left(2 + \frac{3}{6} \right) = \frac{25\sqrt{5}}{4}$$

Ответ

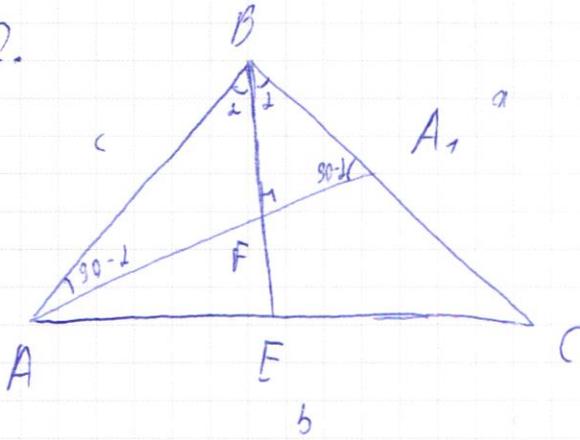
$$R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$S_{ACEO} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2.



$$a + b + c = 900$$

$BE \rightarrow$ биссектриса

$$BA_1 = A_1C$$

$$BF \perp AP_1 \quad \checkmark$$

$$AB = BA_1$$

$$c = \frac{a}{2}$$

$$\begin{cases} a + c > b \\ c + b > a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3c > b \\ b > c \end{cases}$$

$$6c > a + b + c = 3c + b > 4c$$

$$a + b + c = 900 = 3c + b$$

$$b = 3(300 - c)$$

$$6c > 900 > 4c$$

$$225 > c > 150$$

$$\Rightarrow a = 2c$$

$$b = 3(300 - c)$$

$$224 \geq c \geq 151 \Rightarrow c = 151; 152; \dots; 224$$

$$224 - 151 + 1 = 74 \Rightarrow 74 \text{ вариантов } b$$

Предположим $c \geq 225 \Rightarrow a \geq 450$

Ответ 74

$$\begin{cases} b = 900 - 3c \leq 225 \leq c \\ b > c \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

Если $c \leq 150$ $a = 2c \leq 300$

$$\begin{cases} b = 900 - 3c \geq 450 \geq 3c \\ b < 3c \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

Ответ 74

$$3. \quad x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} = \sqrt{x(y-1) - 6(y-1)} = \sqrt{(x-6)(y-1)}$$

$$x^2 + y^2 - 12x - 4y + 20 = (x-6)^2 - 36 + 2(y-1)^2 - 2 + 20 = \\ = (x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0$$

$$x - 6 = a$$

$$y - 1 = b$$

$$x - 6y = a - 6b$$

$$a^2 - 12ab + 36b^2 = ab$$

$$a^2 - 11ab + 36b^2 = 0 = a^2 + 2b^2 - 18$$

$$34b^2 - 11ab + 18 = 0$$

$$b = 0 \Rightarrow 18 = 0 \Rightarrow \emptyset$$

$$a = \frac{34b^2 + 18}{11b}$$

$$a - 6b = \frac{34b^2 + 18 - 66b^2}{11b} = \frac{18 - 32b^2}{11b} = \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{34b^2 + 18}{11}}$$

$$\frac{(18 - 32b^2)^2}{121b^2} = \frac{4(9 - 16b^2)^2}{121b^2} = \frac{34b^2 + 18}{11}$$

$$\frac{2(9 - 16b^2)^2}{11b^2} = 17b^2 + 9$$

$$2(256b^4 - 288b^2 + 81) = 187b^4 + 99b^2$$

$$512b^4 - 576b^2 + 162 - 187b^4 - 99b^2 = 325b^4 - 675b^2 + 162 = 0$$

$$D = 675^2 - 162 \cdot 4 \cdot 325$$

$$b^2 = \frac{675 \pm \sqrt{675^2 - 162 \cdot 4 \cdot 325}}{650} = (y-1)^2$$

$$y = \sqrt{\frac{675 \pm \sqrt{675^2 - 162 \cdot 4 \cdot 325}}{650}} + 1$$

$$a = \frac{34b^2 + 18}{11b} = \frac{34b}{11} + \frac{18}{11b} = x - 6 = \frac{34}{11} \sqrt{\frac{675 \pm \sqrt{675^2 - 162 \cdot 4 \cdot 325}}{650}} +$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$+ \frac{18}{11} \sqrt{\frac{650}{675 \pm \sqrt{675^2 - 162 \cdot 4 \cdot 325}}} \Rightarrow x = \frac{34}{11} \sqrt{\frac{675 \pm \sqrt{675^2 - 162 \cdot 4 \cdot 325}}{650}} +$$

$$+ \frac{18}{11} \sqrt{\frac{650}{675 \pm \sqrt{675^2 - 162 \cdot 4 \cdot 325}}} + 6$$

$$x = \frac{34}{11} \sqrt{\frac{675 \pm \sqrt{675^2 - 162 \cdot 4 \cdot 325}}{650}} + 6 + \frac{18}{11} \sqrt{\frac{650}{675 \pm \sqrt{675^2 - 162 \cdot 4 \cdot 325}}}$$

Ответ

$$y = \frac{34}{11} \sqrt{\frac{675 \pm \sqrt{675^2 - 162 \cdot 4 \cdot 325}}{650}}$$

6. $8x - 6 | 2x - 1 | \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$

$$x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$$

$$f(x) = 8x^2 + ax - 6x + b - 7 = 8x^2 + (a-6)x + b - 7 \leq 0$$

$$D = a^2 - 12a + 36 - 32b + 224 = a^2 - 12a - 32b + 260 > 0$$

$$\begin{cases} f(-\frac{1}{2}) = 2 - \frac{a-6}{2} + b - 7 = b - \frac{a}{2} - 2 \leq 0 \\ f(1) = 8 + a - 6 + b - 7 = a + b - 5 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b \leq 5 \\ 2b - a \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b) + (2b-a) = 3b \leq 9 \\ b \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b \leq 5 \\ 2b - a \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b) + (2b-a) = 3b \leq 9 \\ b \leq 3 \end{cases}$$

если $x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ $D = a^2 - 12a - 32b + 260 \geq a^2 - 12a - 96 + 260 =$

$$= (a-6)^2 + 128 > 0 \Rightarrow \checkmark$$

если $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow |2x-1| = -2x+1$
 $12x-11 = -2x+1$

$$8x + 12x - 6 = 20x - 6 \leq ax + b$$

$$g(x) = x(a - 20) + b + 6 \geq 0$$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a-20}{2} + b + 6 = b - \frac{a}{2} + 16 \geq 0$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a-20}{2} + b + 6 = b + \frac{a}{2} - 4 \geq 0$$

$$2b + 12 \geq 0 \Rightarrow b \geq -6$$

$$\text{если } x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \Rightarrow 12x - 11 = 2x - 1$$

$$8x - 6(2x - 1) = -4x + 6 \leq ax + b$$

$$j(x) = x(a + 4) + b - 6 \geq 0$$

$$j(1) = a + b - 2 \geq 0$$

$$a + b \geq 2$$

$$j\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{2} + b - 4 \geq 0$$

$$a + 2b \geq 8$$

~~$$a \geq 2$$~~

$$f(x) = 8x^2 + x(a - 6) + b - 7 \leq 0$$

$$\Delta = a^2 - 12a - 32b + 260$$

$$x = \frac{6 - a \pm \sqrt{a^2 - 12a - 32b + 260}}{16}$$

$$\begin{cases} \frac{6 - a - \sqrt{a^2 - 12a - 32b + 260}}{16} \leq -\frac{1}{2} \\ \frac{6 - a + \sqrt{a^2 - 12a - 32b + 260}}{16} \geq 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{a^2 - 12a - 32b + 260} \geq 14 - a \rightarrow \text{если } a \geq 14 \quad \textcircled{1}$$

$$\sqrt{a^2 - 12a - 32b + 260} \geq a + 10 \rightarrow \text{если } a \leq -10 \quad \textcircled{2}$$

~~$$4(a^2 - 12a - 32b + 260) \geq 24^2$$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a^2 - 12a - 32b + 260 - 144 = a^2 - 12a - 144 - 32b + 116$$

если $a \leq 14$

$$a^2 - 12a - 32b + 260 \geq 196 - 28a + a^2$$

$$-12a - 32b + 28a + 64 = 16a - 32b + 64 \geq 0$$

$$a - 2b + 4 \geq 0 \quad 0 \leq a - 2b + 4 \leq 14 - 2b + 4 = 18 - 2b$$

$$b \leq 9$$

если $a \geq -10$

$$a^2 - 12a - 32b + 260 \geq a^2 + 20a + 100$$

$$-32a - 32b + 160 \geq 0 \Rightarrow -a - b + 5 \geq 0$$

$$b - 10 \leq a + b \leq 5 \quad b \leq 15$$



$$7. \quad F(ab) = F(a) + F(b)$$

$$F(p) = [p/2] = F(p/2) = F(p) + F(1) \Rightarrow F(1) = 0$$

$$F(x/y) = F(x) + F(1/y) < 0$$

$$x = 2; 3 \Rightarrow F(x) = [x/2] = 1 \quad F(1/y) < -1$$

$$x = 4; 5 \quad F(x) = 2 \quad F(4) = F(2) + F(2) = 2$$

$$F(5) = 2 \quad F(6) = F(2) + F(3) = 2 \quad F(7) = 3 \quad F(8) = 3$$

$$F(9) = F(3) + F(3) = 2 \quad F(10) = F(2) + F(5) = 1 + 2 = 3 \quad F(11) = 5$$

$$\text{если } \frac{x}{y} \in \mathbb{N} \Rightarrow F\left(\frac{x}{y}\right) > 0 \Rightarrow \text{ } \square$$

$$2 \leq x \leq 22 \quad \text{если } x \text{ простое число то } F(x) = [x/2] > 0$$

$$2 \leq y \leq 22 \quad \text{если } x=y \Rightarrow F\left(\frac{x}{y}\right) = F(1) = 0 < 0 \Rightarrow \text{ } \square$$

$$F\left(\frac{p^2}{p}\right) = F(p^2) + F\left(\frac{1}{p}\right) = [p/2] = 2F(p) + F\left(\frac{1}{p}\right) = 2[p/2] + F\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n} \quad p_1, p_2, \dots, p_n \rightarrow \text{простые числа}$$

$$F(x) = \alpha_1 \cdot F(p_1) + \alpha_2 \cdot F(p_2) + \dots + \alpha_n \cdot F(p_n)$$

$$F\left(\frac{1}{p}\right) < -F(p)$$

~~$$F(p^3) = F(p \cdot p^2) = F(p) + F(p^2) = 3F(p)$$~~

~~$$F\left(\frac{p^3}{p}\right) = F(p^2) = 3F(p) + F\left(\frac{1}{p}\right)$$~~

~~$$F\left(\frac{p^2}{p}\right) = F(p^2) + F\left(\frac{1}{p}\right) = 3F(p) + 2F\left(\frac{1}{p}\right) = 2F(p) + F\left(\frac{1}{p}\right)$$~~

$$F\left(\frac{p^2}{p}\right) = F(p^2) + F\left(\frac{1}{p}\right) = F\left(\frac{p^3}{p}\right) + F\left(\frac{1}{p}\right) = F(p^3) + 2F\left(\frac{1}{p}\right) =$$

$$= 3F(p) + 2F\left(\frac{1}{p}\right) = 2F(p) + F\left(\frac{1}{p}\right) \Rightarrow F(p) + F\left(\frac{1}{p}\right) = 0$$

$$F\left(\frac{1}{p}\right) = -F(p)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1. ax^2 - 2bx + c = 0$$

$$b = aq \quad c = aq^2$$

$$D = 4b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2aq \pm \sqrt{4a^2q^2 - a^2q^2}}{2a} = \frac{aq}{a} = q$$

$$aq^2 = a \Rightarrow aq^2 = c = 1$$

$$3. x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} = \sqrt{x(y-1) - 6(y-1)} = \sqrt{(x-6)(y-1)}$$

$$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = (x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0$$

$$x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$$

$$x^2 - 13xy - 6y - x + 36y^2 - 6 = (6y)^2 - y(13x+6) + \frac{(13x+6)^2}{144} - \frac{(13x+6)^2}{144} + x^2 - 6 - x = \left(6y - \frac{13x+6}{12}\right)^2 -$$

$$-\frac{1}{144} (169x^2 + 156x + 36 - x^2 + 6 + x) = \left(6y - \frac{13x+6}{12}\right)^2 -$$

$$-\frac{1}{144} (168x^2 + 157x + 42)$$

$$x - 6 = a$$

$$y - 1 = b$$

$$x - 6y = a - 6b$$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$$

$$a^2 + 12ab + 36b^2 = ab$$

$$a^2 + 2b^2 = 18$$

$$a^2 + 11ab + 36b^2 = 0$$

$$a^2 + 2b^2 + 11ab + 34b^2 = 34b^2 + 11ab + 18 = 0$$

$$34b^2 + 11ab + 18 = 0$$

$$a = \frac{-18 - 34b^2}{11b}$$

$$a^2 = \frac{34^2 b^4 + 36 \cdot 34b^2 + 18^2}{121b^2}$$

$$\begin{array}{r} 276 \overline{) 2} \\ 138 \overline{) 2} \\ 69 \overline{) 3} \\ 23 \end{array}$$

$$a^2 + 2b^2 = \frac{34^2 b^4 + 36 \cdot 34b^2 + 18^2}{121b^2} + 2b^2 = \frac{276b^4 + 36 \cdot 34b^2 + 18^2}{121b^2} = 18$$

$$\frac{276b^4 + 36 \cdot 34b^2 + 18^2 - 18b^2 \cdot 121}{121b^2} = \frac{276b^4 + 18(68b^2 - 121b^2) + 18^2}{121b^2}$$

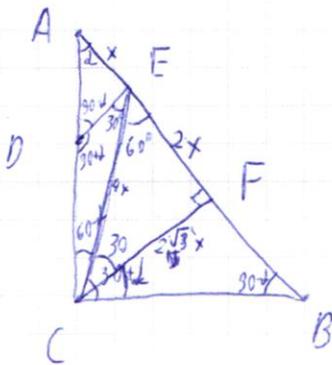
$$+ 18^2 = \frac{276b^4 - 53 \cdot 18b^2 + 18^2}{121b^2} = 0$$

$$\begin{array}{r} \times 53 \\ 53 \\ + 159 \\ \hline 265 \\ \hline 2809 \end{array}$$

$$D = 53^2 \cdot 18^2 - 4 \cdot 18^2 \cdot 276 = 18^2 (53^2 - 4 \cdot 276) = 18^2 (2809 - 1104) = 18^2 \cdot 1705$$

$$b^2 = \frac{53 \cdot 18 \pm 18 \sqrt{1705}}{2 \cdot 276}$$

4.



$DE \perp AB$

$\triangle ADE \sim \triangle ACF$

$$\frac{DE}{CF} = \frac{AE}{AF} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$$

$$CE = 2EF$$

$$CF = 2\sqrt{3}x \Rightarrow DE = \frac{2}{\sqrt{3}}x$$

$$AE = x$$

$$\tan^2 = \frac{DE}{AE} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}x}{x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$AC = \sqrt{7} = \sqrt{CF^2 + AF^2} =$$

$$* = \sqrt{4 \cdot 3x^2 + 9x^2} = \sqrt{21x^2}$$

$$x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

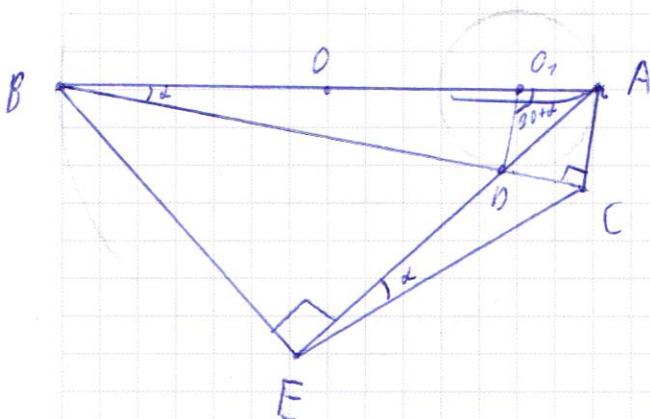
$$CE = 4x = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$DE = \frac{2}{\sqrt{3}}x = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow S_{Ecd} = \frac{CE \cdot ED \sin 30^\circ}{2} = \frac{4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{3} \cdot 3 \cdot 2} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.



$$CD = 2$$

$$OA = R$$

$$BD = 3$$

$$O_1A = r$$

$$\angle BCA = 90^\circ$$

$$\triangle BED \sim \triangle DAC$$

$$\frac{CD}{ED} = \frac{AD}{DB} \Rightarrow AD \cdot ED = CD \cdot BD = 6$$

$$O_1D \perp BC$$

$$\triangle BAC \sim \triangle BO_1D$$

$$\frac{BO_1}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{5} = \frac{2R-r}{2R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r}{2R} = \frac{2}{5}$$

$$BO^2 = OB^2 + OD^2 - 2 \cos(180-2\alpha) \cdot BO \cdot OD = 2R^2 + 2R^2 \cos 2\alpha =$$

$$= 2R^2 (1 + \cos 2\alpha) = 2R^2 (1 + 2\cos^2 \alpha - 1) = 4R^2 \cos^2 \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{BO_1}{BO} = \frac{2R-r}{3} = 1; \frac{BC}{AB} = \frac{2R}{5}$$

$$10R - 5r = 6R$$

$$4R = 5r$$

$$r = 0,8R$$

$$BD^2 = (2R-r)^2 + r^2 = (1,2R)^2 + 0,64R^2 =$$

$$= 1,44R^2 + 0,64R^2 = 2,08R^2 = 9 \Rightarrow R^2 = \frac{900}{208}$$

6. $8x - 6|2x-1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$

если $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 8x - 6|2x-1| = 8x + 12x - 6 = 20x - 6$

$$20x - 6 \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

$$8x^2 + 14x - 13 \leq 0$$

$$D = 196 + 32 \cdot 13 = 196 + 320 + 96 =$$

$$= 300 + 312 = 612 \Rightarrow x = \frac{-14 \pm \sqrt{612}}{16}$$

$$\begin{array}{r|l} 612 & 2 \\ 306 & 2 \\ 153 & 3 \\ 51 & 3 \\ 17 & 3 \end{array}$$

$$612 = 6^2 \cdot 17$$

$$x = \frac{-14 \pm 6\sqrt{17}}{16} = \frac{-7 \pm 3\sqrt{17}}{8}$$

$$\left[x \in \left[\frac{-7-3\sqrt{17}}{8}; \frac{-7+3\sqrt{17}}{8} \right] \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right] \right] \textcircled{0}$$

$$x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$$

$$ax + b \geq 20x - 6$$

$$x(a-20) + b + 6 \geq 0$$

~~xxxx~~

$$8x^2 + x(a-6) + b - 7 \leq 0$$

$$\Delta = (a-6)^2 - 32(b-7) =$$

$$= a^2 - 12a - 32b + 224 + 36 =$$

$$= a^2 - 12a - 32b + 260 > 0$$

$$x \in \left[\frac{6-a - \sqrt{a^2 - 12a - 32b + 260}}{16}; \right.$$

$$\left. \frac{6-a + \sqrt{a^2 - 12a - 32b + 260}}{16} \right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{6-a - \sqrt{a^2 - 12a - 32b + 260}}{16} \leq -\frac{1}{2} \\ \frac{6-a + \sqrt{a^2 - 12a - 32b + 260}}{16} \geq 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{a^2 - 12a - 32b + 260} \geq 14 - a \quad \text{если } a \geq 14 \Rightarrow \textcircled{1}$$

$$\text{если } a \leq 14 \quad a^2 - 12a - 32b + 260 \geq a^2 - 28a + 136$$

$$16a - 32b + 64 \geq 0 \Rightarrow a - 2b + 4 \geq 0$$

$$0 \leq a - 2b + 4 \leq 14 - 2b + 4 = 18 - 2b \Rightarrow b \leq 9$$

$$\sqrt{a^2 - 12a - 32b + 260} \geq +10 + a \quad \text{если } a \leq -10 \Rightarrow \textcircled{2}$$

$$\text{если } a \geq -10 \quad a^2 - 12a - 32b + 260 \geq a^2 + 20a + 100$$

$$-32a - 32b + 160 \geq 0 \Rightarrow a + b \leq 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \geq a + b \geq 6 - 10 \Rightarrow b \leq 15$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. $F(p) = \lfloor p/2 \rfloor$

$F(ab) = F(a) + F(b)$

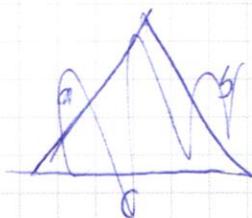
$F(p \cdot 1) = F(p) + F(1) \Rightarrow F(1) = 0$

$2 \leq x \leq 22$

$F(x/y) = F(x) + F(y^{-1}) < 0$

$2 \leq y \leq 22$

2.



$a + b + c = 900$

$\angle ABE = \angle ECB$

$\angle AFB = 90^\circ$

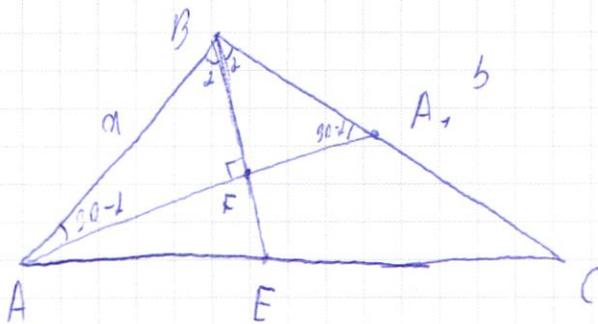
$BA_1 = A_1C$

$AF = FA_1$

$AB = BA_1 = \frac{BC}{2}$

$\angle = 45^\circ$

$\angle ABC = 90^\circ$



$a^2 + b^2 = c^2 = 5a^2$

$c + a + b = \sqrt{5}a + a + 2a = a(3 + \sqrt{5}) = 900$

$b = 2a$

$c \leq a + b = 3a$

$a + b + c = 3a + c = 900$

$c = 3(300 - a)$

$a + c > b = 2a$

$3a > c > a$

$6a > a + b + c = 3a + c > 4a$

$6a > 900 > 4a$

$150 < a < 225$

$675 > 3a > c > a > 150$

$675 > 3(300 - a) > 150$

$225 > 300 - a > 50$

$a \geq 450 \Rightarrow b \leq 900 - 675 = 225$
 $b \leq c \Rightarrow a \geq 225 \Rightarrow c > 225 \Rightarrow a > 225 \Rightarrow c > 225 \Rightarrow a > 225$

6. если $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

$$ax + b \geq 20x - 6$$

$$f(x) = x(a - 20) + b + 6 \geq 0$$

$$\text{при } x = -\frac{1}{2} \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{20-a}{2} + b + 6 = -\frac{a}{2} + b + 16 \geq 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{2} + b - 4 \geq 0$$

$$2b + 12 \geq 0$$

$$b \geq -6$$

~~при $x = \frac{1}{2}$~~