МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1.

$ax^2 + 2bx + c = 0$ (т.к. $a \neq 0$, это кв. уравнение)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

a, b, c – последовательные члены г.п. $\Rightarrow$

$b^2 = ac$

$\Rightarrow$ корень уравнения равен $\frac{-b}{2a}$.

Числа b, c и $\frac{-b}{2a}$ – посл. члены г.п. $\Rightarrow$

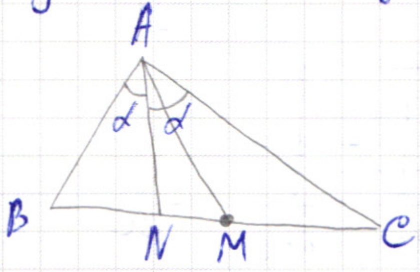
$c^2 = b \cdot \frac{-b}{2a}$; $c^2 = -\frac{ac}{2a}$

$\Rightarrow c = -\frac{1}{2}$

Ответ: $-\frac{1}{2}$

Задача №2.

Предположим, что в одном из таких треугольников биссектриса оказалась перпендикулярной медиане, выходящей из той же вершины.

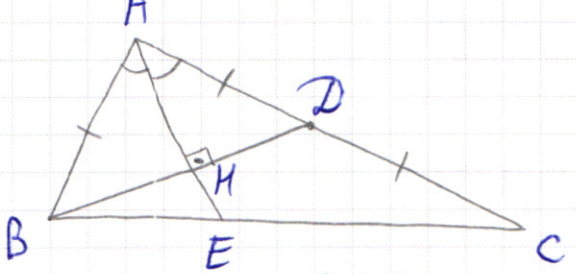


$\angle NAM = 90^\circ$

$\Rightarrow \alpha \geq 90^\circ$, поэтому

$\angle BAC = 2\alpha \geq 180^\circ$, что невозможно. Противоречие.

Значит бисс. может быть перпендикулярна медиане, выходящей из другой вершины:



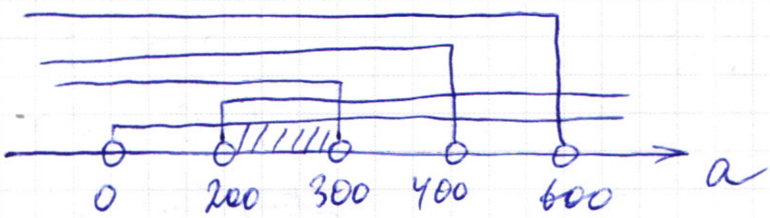
(BD – медиана;
AE – биссектриса).
$AE \perp BD$
$H = AE \cap BD$

Тогда в $\triangle BAD$ AH – биссектриса и высота $\Rightarrow$
$\triangle BAD$ – равнобедренный ($BA = AD$).
D – середина AC, т.е. $BA = AD = DC$.
Пусть $BA = a$, тогда $AC = 2a$
$BC = 1200 - AB - AC = 1200 - 3a$.
Любой треугольник однозначно определяется длинами трех сторон. Подходящие нам треугольники однозначно определяются значением a. Чтобы треугольник с $AB = a$ существовал:

$$\begin{cases} a > 0 \\ 2a > 0 \\ 1200 - 3a > 0 \\ a < 2a + 1200 - 3a \\ 2a < a + 1200 - 3a \\ 1200 - 3a < a + 2a \end{cases}$$

из нер-ва треугольника

$$\begin{cases} a > 0 \\ a < 400 \\ a < 600 \\ a < 300 \\ a > 200 \end{cases}$$

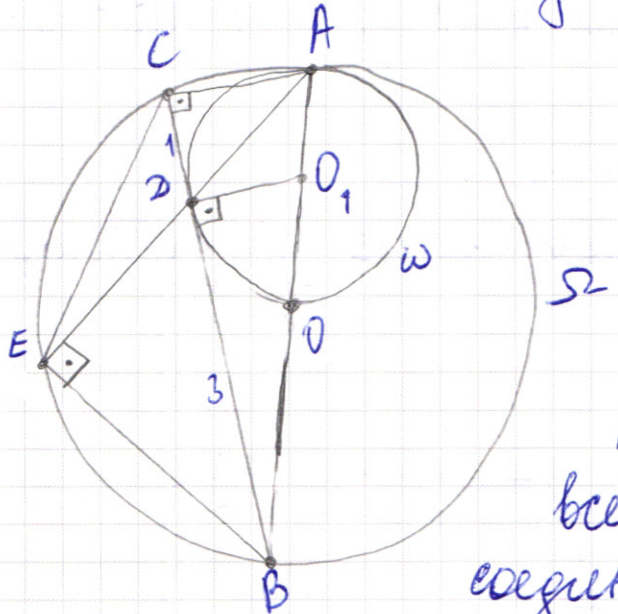


Итого, $200 < a < 300$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Чтобы все стороны были целыми, $a \in \mathbb{Z}$.
Таких чисел a ($200 < a < 300$) ровно 99.
Количество подходящих треугольников – 99.
Ответ: 99.

Задача N5.



Пусть радиус окр. Ω равен R, а окружности Ω – r.
Ω O – центр Ω;
O_1 – центр ω
Точка касания окр. всегда лежит на линии, соединяющей центра.
Т.е. $A \in OO_1$.
Получается, A, O_1, O и B лежат на одной прямой.
По св-ву касательной $\angle BDO_1 = 90°$;
AB – диаметр окр. $\Omega \Rightarrow \angle BCA = 90°$.
$\Delta CAB \sim \Delta DO_1B$ (как прямоугольные по острому углу $\angle B$) $\Rightarrow$

$$\frac{DB}{BO_1} = \frac{BC}{BA}$$

$BO_1 = BA - AO_1 = 2R - r$; $BA = 2R$; $BC = 3+1=4$

$$\frac{3}{2R-r} = \frac{4}{2R}$$

$6R = 8R - 4r$; $R = 2r$

Т.е. $AO = 2r$ и O лежит на окр. ω.

По свойству касательной и секущей:

$DB^2 = BO \cdot BA$

$3^2 = R \cdot 2R \Rightarrow R = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$r = \frac{R}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

В прямоуг. $\triangle CAB$: $AC^2 + CB^2 = AB^2$; $AB = 2R = 3\sqrt{2}$

$AC = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 4^2} = \sqrt{2}$

AB - диаметр $\Rightarrow \angle AEB = 90°$

$\triangle DCA \sim \triangle DEB$ (как прямоугольные по острому углу $\angle CDA = \angle EDB$)

$$\frac{DA}{CD} = \frac{DB}{DE}$$

По т. Пиф для $\triangle DCA$: $AD = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$$DE = \frac{CD \cdot DB}{DA} = \frac{1 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

По т. Пиф. для $\triangle DEB$: $EB = \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$

$S_{BACE} = \frac{1}{2} \sin\alpha \, (DE \cdot DB + DB \cdot DA + DA \cdot DC + DC \cdot DE)$,

где α - угол между диагоналями:

$\alpha = \angle CDA$; $\sin\alpha = \frac{CA}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$S_{BACE} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (\sqrt{3} \cdot 3 + 3 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot 1 + 1 \cdot \sqrt{3}) =$

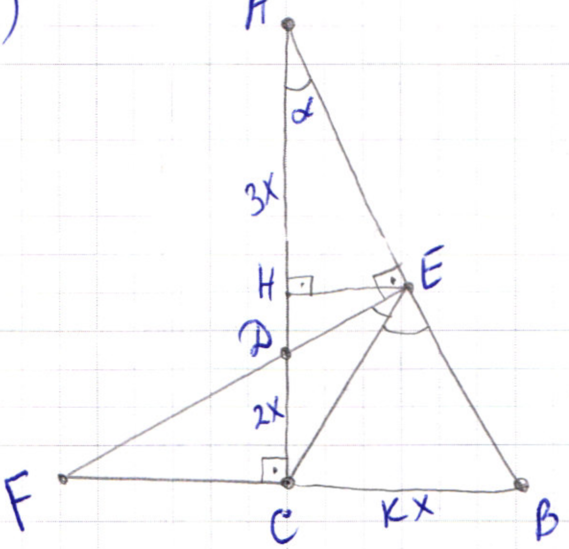
$= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} 8\sqrt{3} = 4\sqrt{2}$ Ответ: радиус ω равен $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; радиус Ω равен $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача N4.

а)



Пусть $AC = 5x$.
Тогда $AD = 3x$; $DC = 2x$.
Пусть $CB = kx$
В $\triangle CBA$ по т. Пифор.:
$AB = \sqrt{(5x)^2 + (kx)^2} = \sqrt{25+k^2}\,x$

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (как прямоуг по острому углу $\angle A$)

$\rightarrow \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AC}{AB}$

$$AE = \frac{AD \cdot AC}{AB} = \frac{3x \cdot 5x}{\sqrt{25+k^2}\,x} = \frac{15}{\sqrt{25+k^2}}\,x$$

$$EB = AB - AE = \frac{(25+k^2)x - 15x}{\sqrt{25+k^2}} = \frac{10+k^2}{\sqrt{25+k^2}}\,x$$

В прямоуг. $\triangle DAE$: $DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} =$

$$= \sqrt{(3x)^2 - \frac{15^2}{25+k^2}x^2} = \sqrt{\frac{9(25+k^2) - 15^2}{25+k^2}}\,x =$$

$$= \frac{3k}{\sqrt{25+k^2}}\,x \quad ; \quad F = DE \cap CB$$

$\triangle DEA \sim \triangle DCF$ (как прямоугольные по острому углу $\angle FDC = \angle ADE$).

$$\frac{FD}{DC} = \frac{AD}{DE}$$

$$FD = \frac{DC \cdot AD}{DE} = \frac{2X \cdot 3X}{\frac{3k}{\sqrt{25+k^2}} x} = \frac{2\sqrt{25+k^2}}{k} X$$

В прямоуг $\triangle FCD$: ~~по т. Пиф~~ $FC^2 + CD^2 = FD^2$

$$FC^2 = \frac{4(25+k^2)}{k^2} X^2 - 4X^2 = \frac{4 \cdot 25 + 4k^2 - 4k^2}{k^2} x^2 =$$

$$= \frac{100}{k^2} x^2 \Rightarrow FC = \frac{10}{k} X$$

$$\angle CEB = \angle DEB - \angle CED = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \Rightarrow$$

EC – биссектриса в $\triangle FEB$. По св-ву бисс:

$$\frac{EF}{EB} = \frac{CF}{CB}$$

$$EF = DF + DE = \frac{2\sqrt{25+k^2}}{k} X + \frac{3k}{\sqrt{25+k^2}} X =$$

$$= X \cdot \frac{2(25+k^2) + 3k^2}{k\sqrt{25+k^2}} = X \cdot \frac{50+5k^2}{k\sqrt{25+k^2}}$$

$$EF \cdot CB = CF \cdot EB$$

$$X \cdot \frac{50+5k^2}{k\sqrt{25+k^2}} \cdot kX = \frac{10}{k} X \cdot \frac{10+k^2}{\sqrt{25+k^2}} X$$

$$k = 2$$

$$tg(\angle BAC) = \frac{CB}{AC} = \frac{kX}{5X} = \frac{2}{5}$$

б) $AC = \sqrt{29}$; $5X = \sqrt{29} \Rightarrow X = \frac{\sqrt{29}}{5}$

Опустим пер-р EH из т. E на AC

$\triangle AHE \sim \triangle ACB$ (как прямоугольные по острому углу $\angle A$).

$$\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{HE}{CB}$$

$$\Rightarrow HE = \frac{AE \cdot CB}{AB} = \frac{15}{\sqrt{25+k^2}} X \cdot kX \frac{1}{\sqrt{25+k^2} X} = \frac{15k}{25+k^2} X$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$S_{DCE} = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot EH = \frac{1}{2} \cdot 2X \cdot \frac{15K}{25+K^2} X =$$

$$= \frac{15 \cdot 2}{25+2^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{29}}{5}\right)^2 = \frac{30}{29} \cdot \frac{29}{25} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$$

Ответ: а) $tg(\angle BAC) = \frac{2}{5}$

б) $S_{DCE} = \frac{6}{5}$

N6.

Построим график функции $y = 2X^2 - X - 1$

$X_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$. График - парабола ветвями вверх (т.к. зав. квадратичная и $2>0$

$X_1 = -\frac{1}{2}$

$X_2 = 1$

$X_0 = \frac{X_1 + X_2}{2} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{1}{4}$

$y_0 = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{2}{8} - \frac{8}{8} = -\frac{9}{8}$

$y(-\frac{1}{4}) = 2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} - \frac{8}{8} = -\frac{5}{8}$

$y(\frac{3}{2}) = 2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Теперь построим график функции $y = X + |2X-1|$

При $2X-1 \geq 0$, т.е. $X \geq \frac{1}{2}$:

$y = X + (2X-1) = 3X - 1$

При $2X - 1 < 0$, т.е. $X < \frac{1}{2}$:

$y = x - (2x - 1) = 1 - x$

$y\left(\frac{1}{2}\right) = 3\frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$y\left(-\frac{1}{4}\right) = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4} = 1{,}25$

$y\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \frac{3}{2} - 1 = \frac{7}{2} = 3{,}5$

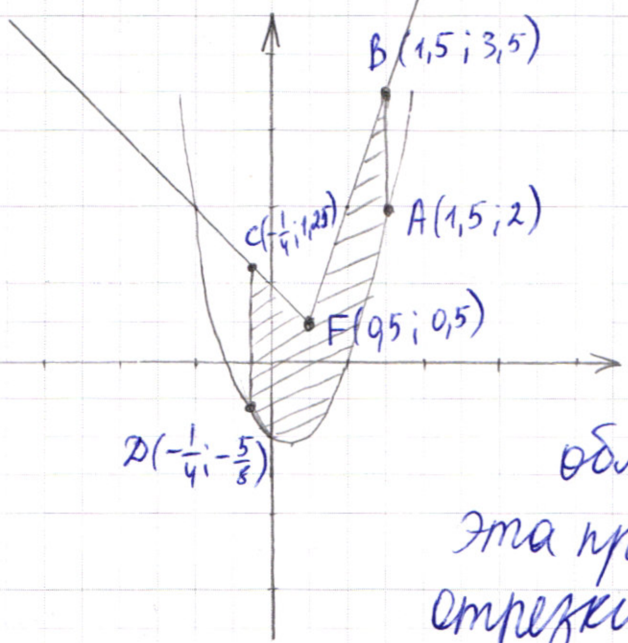


График зависимости $y = ax + b$ – прямая. По условию на отрезке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$ она должна находиться в закрашенной области (как минимум, эта прямая должна пересекать отрезки CD и AB).

Вместе с этим заметим, что точки D, A и F лежат на одной прямой $y = 1{,}5x - 0{,}25$. Из графика видно что это и есть единств. прямая, удовлетворяющая условию (все другие прямые, даже пересекающие отрезки AB и CD при $x = 0{,}5$ будут принимать значение $> 0{,}5$, т.е. выше т. F и не будут удовлетворять неравенствам).

Единственное решение: $a = 1{,}5$; $b = -0{,}25$.

Ответ: $(1{,}5; -0{,}25)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №7.

$$\begin{cases} f(a)+f(b)=f(ab) \\ f(ab)+f\left(\frac{1}{a}\right)=f(b) \end{cases} \Rightarrow f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)=0$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=-f(a)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$$

~~Среди 2 любых положительных чисел (различных)~~

Найдем $f(x)$ для всех $x \in N$, $1 \le x \le 21$

$f(1)=-f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$f(2)=\left[\frac{2}{2}\right]=1$

$f(3)=\left[\frac{3}{2}\right]=1$

$f(5)=\left[\frac{5}{2}\right]=2$

$f(7)=\left[\frac{7}{2}\right]=3$

$f(11)=\left[\frac{11}{2}\right]=5$

$f(13)=\left[\frac{13}{2}\right]=6$

$f(17)=\left[\frac{17}{2}\right]=8$

$f(19)=\left[\frac{19}{2}\right]=9$

$f(4)=f(2)+f(2)=2$

$f(6)=f(2)+f(3)=2$

$f(8)=f(2)+f(4)=3$

$f(9)=f(3)+f(3)=2$

$f(10)=f(2)+f(5)=3$

$f(12)=f(3)+f(4)=3$

$f(14)=f(2)+f(7)=4$

$f(15)=f(3)+f(5)=3$

$f(16)=f(2)+f(8)=4$

$f(18)=f(2)+f(9)=3$

$f(20)=f(2)+f(10)=4$

$f(21)=f(3)+f(7)=4$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Будем искать все подходящие пары чисел $(x;y)$ таких, что $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)<0$
Рассмотрим пару чисел c, d (оба числа натуральные и лежат в промежутке $[1;21]$.
Если $f(c)=f(d)$, то $f\left(\frac{c}{d}\right)=f\left(\frac{d}{c}\right)=0$ и они не образуют пару $(x;y)$
Если же $f(c)\neq f(d)$, то $f\left(\frac{c}{d}\right)=-f\left(\frac{d}{c}\right)\neq 0$, т.е. $f\left(\frac{c}{d}\right)$ и $f\left(\frac{d}{c}\right)$ - разного знака.
А это значит, что такие числа c и d образуют ровно одну пару $(x;y)$.
Среди чисел $n\in\mathbb{N}$ и $1\le n\le 21$:

$f(n)$	кол-во таких n	K
0	1	0
1	2	1
2	4	6
3	6	15
4	4	6
5	1	0
6	1	0
8	1	0
9	1	0

Найдем количество способов N выбрать 2 числа ~~[illegible]~~ (порядок неважен) из разных групп.
Количество способов выбрать 2 различных числа из 21 равно $\frac{21\cdot 20}{2}=210$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница №10
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Теперь вычислим кол-во способов выбрать 2 различных числа из одной группы. Для этого посчитаем это значение k для каждой группы (в группе из m чисел $k = \frac{m(m-1)}{2}$)

Итого, $N = 210 - 1 - 6 - 15 - 6 = 182$.

Значит кол-во пар натуральных чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию равно 182.

Ответ: 182.

Задача № 3.

$y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}$

$$\begin{cases} (y-2x)^2 = xy - 2x - y + 2 \\ y - 2x \geq 0 \end{cases}$$

$y^2 - 5xy + 4x^2 + 2x + y - 2 = 0$

$(4x - y - 2)(x - y + 1) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} 4x - y - 2 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ll} y = 4x - 2 & (\mathrm{I}) \\ y = x + 1 & (\mathrm{II}) \end{array}\right.$$

I) $2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

$2x^2 + (4x-2)^2 - 4x - 4(4x-2) + 3 = 0$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$2x^2+16x^2-16x+4-4x-16x+8+3=0$$

$$18x^2-36x+15=0$$

$$6x^2-12x+5=0$$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{6^2-5\cdot 6}}{6}$$

$$\left[\begin{array}{l} x=1-\frac{\sqrt{6}}{6} \\ x=1+\frac{\sqrt{6}}{6} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=1-\frac{\sqrt{6}}{6};\ y=4\left(1-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)-2=2-\frac{2\sqrt{6}}{3} \\ x=1+\frac{\sqrt{6}}{6};\ y=4\left(1+\frac{\sqrt{6}}{6}\right)-2=2+\frac{2\sqrt{6}}{3} \end{array}\right.$$

II) $2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$$2x^2+(x+1)^2-4x-4(x+1)+3=0$$

$$2x^2+x^2+2x+1-4x-4x-4+3=0$$

$$3x^2-6x=0$$

$$x(x-2)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=0;\ y=1 \\ x=2;\ y=3 \end{array}\right.$$

Итого:

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1-\frac{\sqrt{6}}{6} \\ y=2-\frac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=1+\frac{\sqrt{6}}{6} \\ y=2+\frac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right. \\ y-2x\geq 0 \end{array}\right.$$

$y-2x=2-\frac{2\sqrt{6}}{3}-2+\frac{\sqrt{6}}{3}=-\frac{\sqrt{6}}{3}<0$ $\ominus$

$y-2x=2+\frac{2\sqrt{6}}{3}-2-\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}>0$ $\oplus$

$y-2x=1-2\cdot 0=1>0$ $\oplus$

$y-2x=3-2\cdot 2=-1<0$ $\ominus$

Ответ: $\left\{\left(1+\frac{\sqrt{6}}{6};\ 2+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right),\ (0;1)\right\}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$c^2 - 2a$~~

$c^2 = -\frac{c}{2}$

$c = -\frac{1}{2}$

$1,5 \cdot 0,5 - 0,25 = 0,5$

~~$1,5 \cdot 2 - 0,25$~~

$1,5 \cdot 1,5 - 0,25 = 0,25$

$1,5 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - 0,25 =$

$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = -\frac{5}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(2)=1$
$f(3)=1$
$f(5)=2$
$f(7)=3$
$\cancel{f(10)}=$
$f(\frac{1}{a})=-f(a)$

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$$

$x=y$

$f(1)=$

$$\cancel{f(ab}\begin{cases} f(a)+f(b)=f(ab) \\ f(ab)+f(\frac{1}{a})=f(b) \end{cases}$$

$c, d \quad f(c)\neq f(d)$

$21\cdot 21$

x	y
1	1
...	...
21	21

$\frac{21\cdot 21}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 & \mid\cdot 3 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 & \mid\cdot 2 \end{cases}$$

$f(2)+f(3)=f(6)$

$f(6)+f(\frac{1}{2})=f(3)$

$3y^2-12xy+12x^2=3xy-6x-3y+6$

$f(2)+f(\frac{1}{2})=0$

$1+1=1$

$\cancel{3y^2}-\cancel{12xy}+\cancel{12x^2}+\cancel{4x^2}+\cancel{2y^2}-8x-8y+\cancel{6}=$

$=\cancel{3xy}-6x-3y+\cancel{6}$

$f(6)+f(\frac{1}{2})=f(3)$

$1 \quad 0 \quad 1$

$16x^2+5y^2-15xy-2x-5y=0$

$f(2)=[2:2]=1$

$f(3)=1$

$f(5)=2$

$f(7)=3$

$f(11)=5$

$f(13)=6$

$f(17)=8$

$f(19)=9$

$\cancel{f(6)=2}$

$\cancel{f(4)=2}$

$\cancel{f(8)=2}$

$\cancel{f(10)=2}$

$\cancel{f(12)=2}$

$\cancel{f(14)=3}$

$\cancel{f(15)=2}$

$\cancel{f(16)=2}$

$\cancel{f(18)=1}$

$f(20)=2$

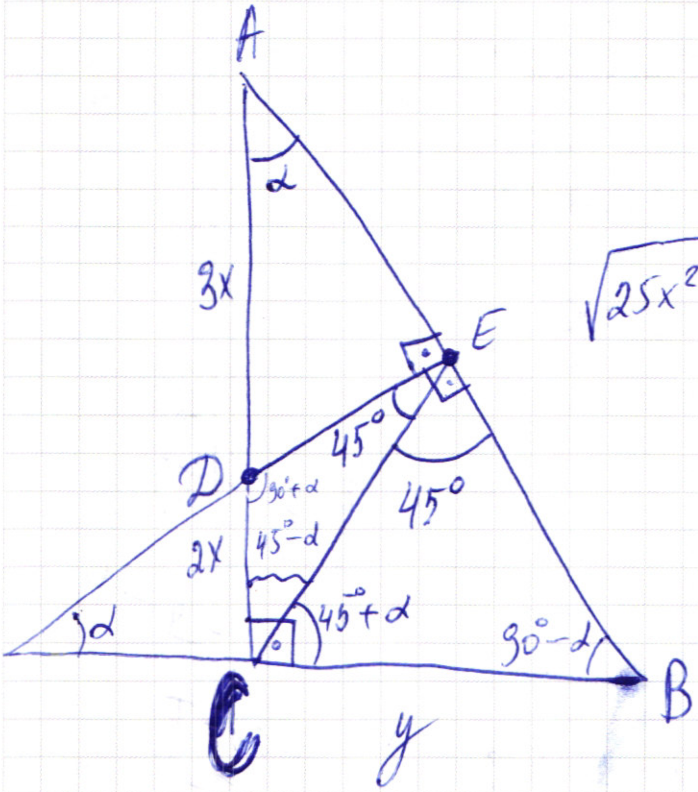
$f(9)=1$

$f(21)=3$

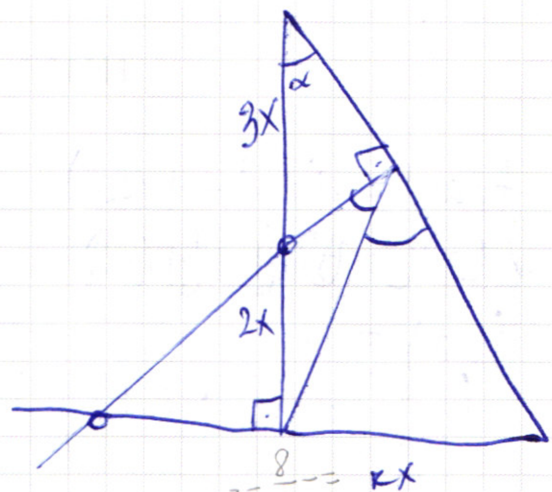
$f(a)+\cancel{f(b)}=\cancel{f(ab)}$

$\cancel{f(ab)}+f(\frac{1}{a})=\cancel{f(b)}$

$f(a)=-f(\frac{1}{a})$



$\sqrt{25x^2+y^2}$



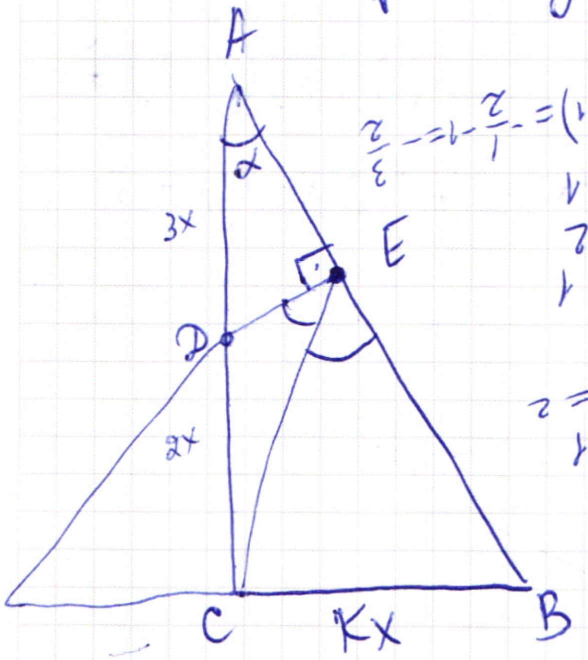
kx

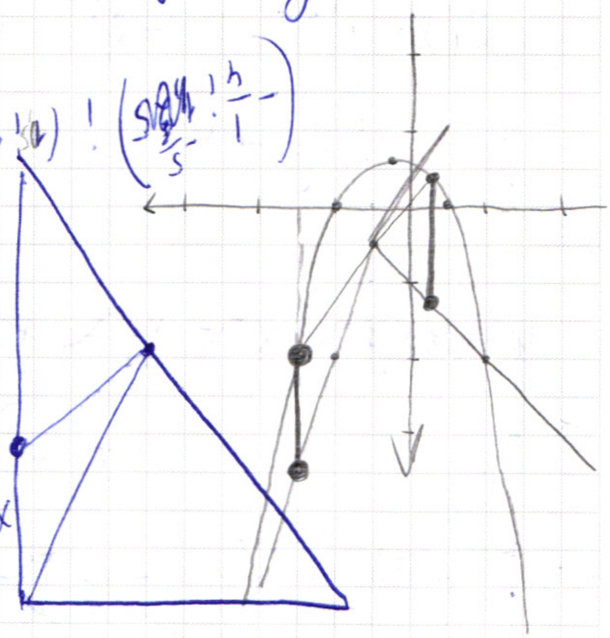
$$\frac{3x}{DE} = \frac{\sqrt{25x^2+y^2}}{y}$$

$$\frac{3x}{AE} = \frac{\sqrt{25x^2+y^2}}{5x}$$

$$AE = \frac{15x^2}{\sqrt{25x^2+y^2}}$$

$$DE = \frac{3xy}{\sqrt{25x^2+y^2}}$$





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(a)=f(1)+f(a) \rightarrow f(1)=0$

$\cancel{f(2)=f(1)+f(2)}$

$f(2)=1$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\cancel{y+2x}$

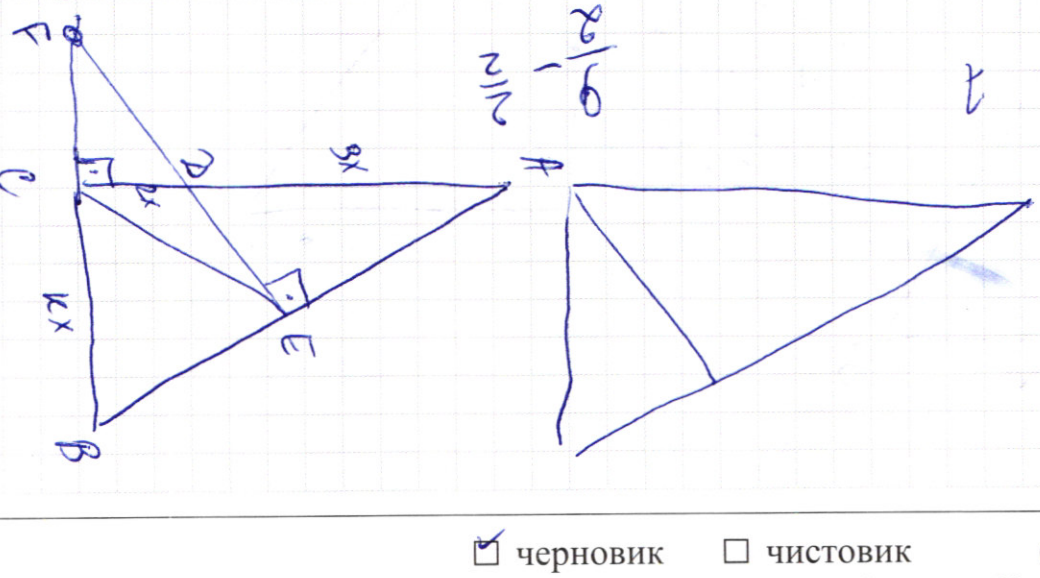
$$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$2(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)=3$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

$y^2-5xy+4x^2+2x+y=2$

$\cancel{y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2+2x^2+y^2-4x-4y+3}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

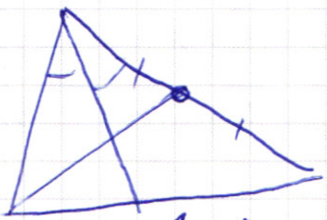
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

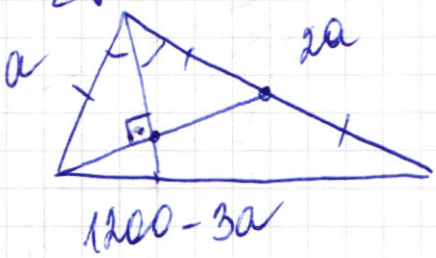
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2



$ax^2 + 2bx + c = 0$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{2a}$



$12000 - 3a > 0$

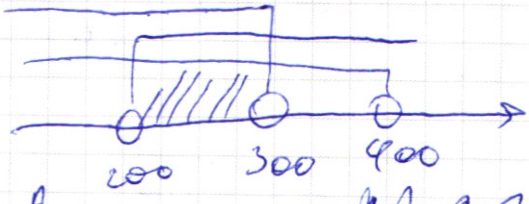
$\boxed{a < 400}$

$$\begin{cases} (1200-3a) < a + 2a \\ 2a < a + 1200 - 3a \\ 4a < 1200 \end{cases}$$

$1200 < 6a$

$\boxed{a > 200}$

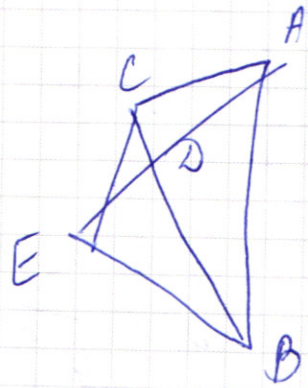
$a < 300$



$299 - 201 = 99$ шт.

N1.

a, b, c,



☑ черновик ☐ чистовик

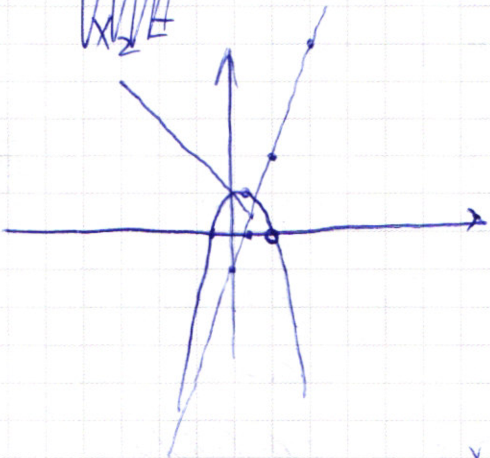
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y = 2x^2 - x - 1 = 2x^2 - 2x + 2x - x - 1 =$

$= 2x(x-1) + (x-1) = (2x+1)(x-1)$



1

$-\frac{1}{2}$

$x + |2x - 1|$

$x > \frac{1}{2}$

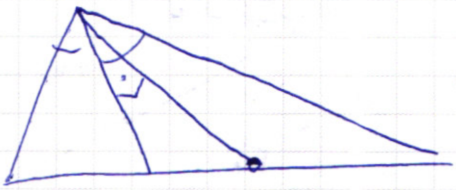
$x + 2x - 1 = 3x - 1$

$x - 2x + 1 = 1 - x$

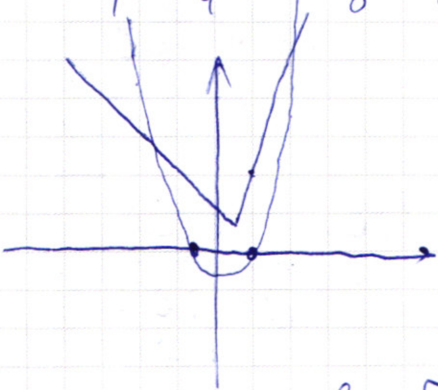
$1 + 12 + 15 = 13 + 15 = 28$

$x_0 = \frac{1}{4}$

N6.



$2 \cdot \frac{1}{4^2} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 =$



$210 - 28 = 182$

$210 - 28 =$

$ac = b^2$

$a, b, c \quad \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{2a}$

$3a - 2a + a$

$2a < 1200$

$a < 100 - a$

$2a < 120$

$a, b, c, \quad \frac{-b}{2a}$

N1

$c^2 = b \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right) = -\frac{b^2}{2a} = -\frac{ac}{2a} = -\frac{c}{2}$

$\frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{2}{4 \cdot 3}$

$\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

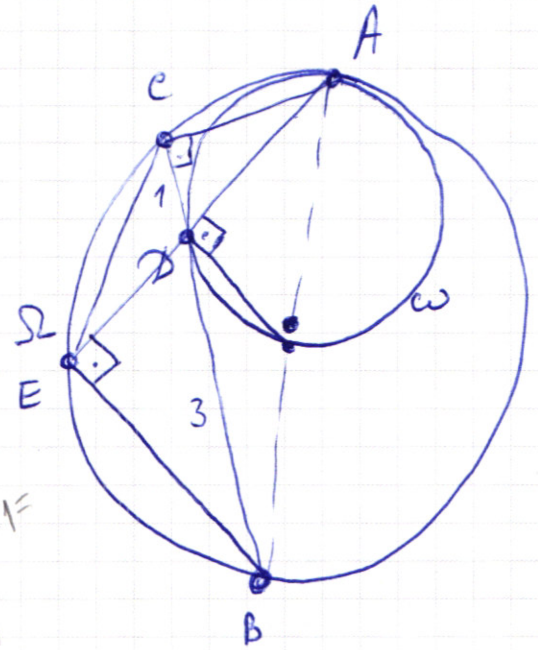
☑ черновик ☐ чистовик

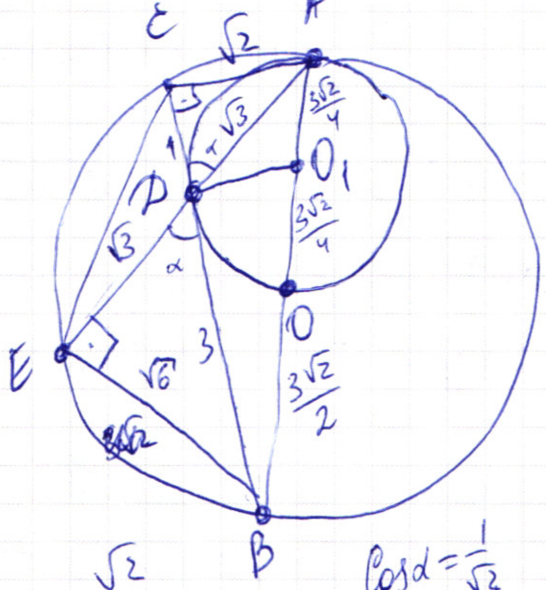
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$



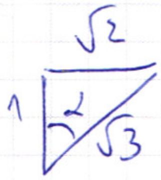


$2\cdot 2^{2}-2-1=$

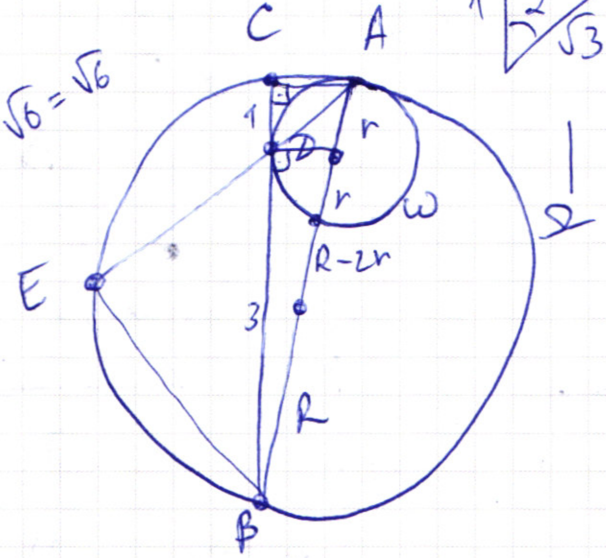
$=8-2-1$

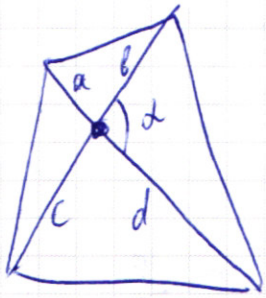
$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt3}$ $R-2r$

Ω



$\sqrt{9-3} = \sqrt6 = \sqrt6$





$\cancel{\frac{1}{2}bd\sin\alpha}$

$\frac{1}{2}\sin\alpha(ab+bd+cd+ac)$

$25\cdot 9=$

$25\cdot10-25=$

$=250-25=225$

$15^2=225$

$\frac{9(25+k^2)}{k^2}-9$

$$3^2 = (2R-2r)\cdot 2R$$

$$CA = \sqrt{(3\sqrt2)^2-4^2} =$$

$$\frac{3}{2R-2r} = \frac{4}{}$$

$$=\sqrt{9\cdot2-16} = \sqrt2$$

$$FC = \sqrt{}$$

$\sqrt{3^2}$

$$\frac{9(25+k^2)-15^2}{25+k^2} =$$

9

$3+5+1+1=8\sqrt3$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt2}{\cancel{\sqrt3}}\cdot\cancel{2}\cdot4\cdot\cancel{\sqrt3} = 4\sqrt2 \qquad =$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{2(x^2-2x+1)+y^2-4y+4=}$

$(y-2x)^2 = xy-2x-y+2$

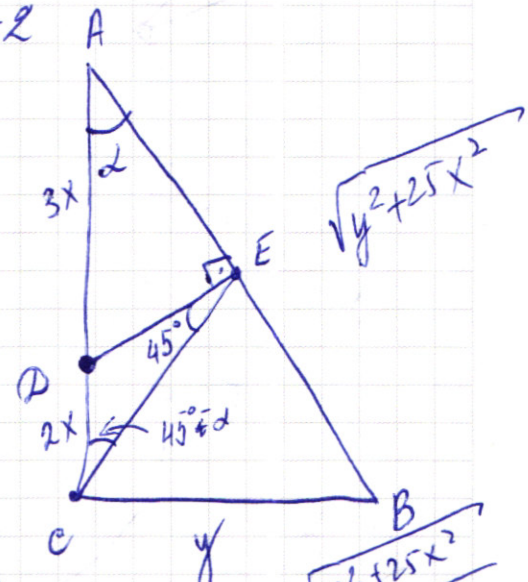
$y^2-4xy+4x^2 = xy-2x-y+2$

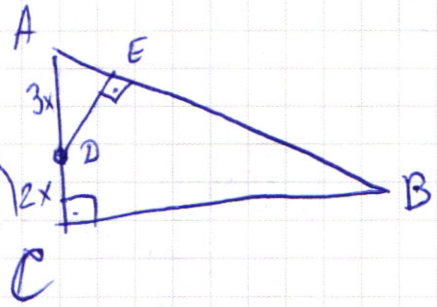
$\cancel{4(x^2-2x+1)}$

$(y^2+4xy+4x^2) = 9xy-2x-y+2$

$(y+2x)^2+(y+2x) = 9xy+2$

$(y+$



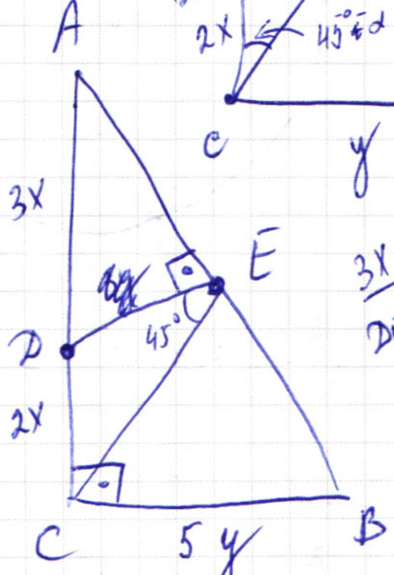


O

$f(\frac{1}{7})=f(1)+f(\frac{1}{7})$

$\frac{x}{y}$ – не простое

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$



$\frac{3x}{DE}=\frac{\sqrt{y^2+25x^2}}{y}$

$6R=8R-4r$

$4r=2R$

$R=2r$

$DE=\frac{3xy}{\sqrt{y^2+25x^2}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0$

~~$4x^2-5xy+y$~~

$(y-x)(y-4x)+y-x+3x-2=0$

$=(y-x)(y-4x)+(y-x)+3x-2$

$=(y-x)(y-4x+1)$

$2(x^2-2x+1)+(y^2-2\cdot2\cdot y+4)=3$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

$(y+2x)^2+(2x+y)=2+9xy$

$(y+2x)(y+2x+1)=9xy+2$

~~$y^2-5xy+4x^2=2$~~

$y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0$

$(-x^2+2x-1)-\left(\frac{y^2}{4}-y+1\right)$

$\frac{5}{4}(4x^2-4xy+y^2)$

$\frac{5}{4}(2x-y)^2-(x-1)^2-\frac{1}{4}(y-2)^2=0$

$\left(5x^2+\frac{5}{4}y^2-5xy\right)-(x-1)^2-\left(\frac{y}{2}-1\right)^2=0$

$5(2x-y)^2-4(x-1)^2-(y-2)^2=0$

$(2\sqrt5 x-\sqrt5 y)^2-(2x-2)^2-(y-2)^2=$

$=(2(\sqrt5-1)x-\sqrt5 y+2)(2(\sqrt5+1)x-\sqrt5 y-2)-(y-2)^2=0$

$y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0$

$\cancel{(ax+by+c)(ax+by+c)=0}$

$(ax+by+c)(dx+ey+f)=0$

$$\begin{cases} cf=-2 \\ ad=4 \\ be=1 \\ ce+bf=1 \\ dc+af=2 \\ ae+bd=-5 \end{cases}$$

$c=\frac{-2}{f}$

$a=\frac{4}{d}$

$b=\frac{1}{e}$

$e=-f$

$d=f$

$f=d=-e=$

$=-b$ $\frac{e}{f}=t$; $\frac{d}{f}=z$

$$\begin{cases} -\frac{2}{f}e+\frac{1}{e}f=1 \\ d\cdot\frac{-2}{f}+\frac{4}{d}\cdot f=2 \\ \frac{4}{d}\cdot e+\frac{1}{b}\cdot d=-5 \end{cases}$$

$-2t+\frac{1}{t}=1$

$-2z+\frac{4}{z}=2$

$(4x-y-2)(x-y+1)$

$f=d=-e=-b=$

$=-1$

$+\frac{1}{b}\cdot f=-1$

$b=-f$

$c=2$

$a=-4$

$(-4x+y+2)(-x+y-1)=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)