$4n+1 \nearrow 12n+4 \searrow 6n+2 \searrow 3n+1$

$17 \nearrow 52 \searrow 26 \searrow 13 \nearrow 40 \searrow 20 \searrow 10 \searrow 5$

$\frac{16n}{3}+1 \nearrow 16n+4 \searrow 8n+2 \searrow 4n+1$

$\cancel{1}$, 3, 5, $\cancel{7}$, 9, 11, $\cancel{13}$, 15

3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 21, 23

| | |
|---|---|
| 3 | 8 |
| 9 | 16 |
| 27 | 32 |
| 81 | 64 |

$x_1 = p \cdot 2^k - 1$

$x_{k-1} = p \cdot 2 \cdot 3^{k-1} - 1 = 4n+1$

$n = \frac{p \cdot 3^{k-1} - 1}{2}$

$9n+4$

$p \cdot 2^k - 1 \qquad 9\frac{n}{2}+2$

$p \cdot 3^{k-1} + 1 \qquad p \cdot 2^{k+1}$

$3^{k-1} + \frac{1}{p} \qquad 2^{k+1}$

$3n+1 \equiv 3 \pmod 4$

$3^{k-1} \qquad 2^{k+1}$

$9\frac{n}{2}+2$

$\cancel{n \equiv 2 \pmod 3}$

$n \equiv 0 \pmod 3$

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа $a$, $b$, $c$ являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа $a$, $b$, $c$ не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике $ABC$ на катете $AC$ и гипотенузе $AB$ отмечены точки $D$ и $E$ соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла $BAC$, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника $CED$.

5. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

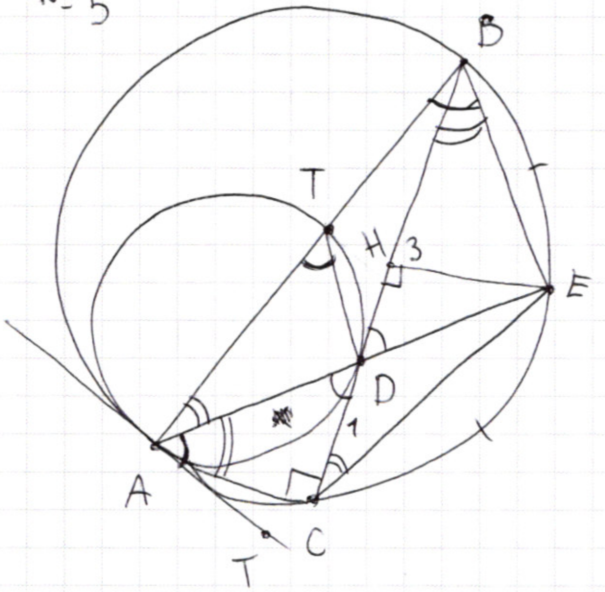
$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5




$R, r$ – радиусы большой и малой окр-тей соотв.

Проведем касательную в точке A. и отметим точку T на ней.

Заметим, что $\angle EAT = \angle DTA = \frac{1}{2}\breve{AD} = \angle ABE = \frac{1}{2}\breve{AE}$. Отсюда $TD \parallel BE$.

Также $\angle ADC = \angle BDE = \angle ATD = \angle ABE \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $\angle BDE = \angle ABE$, а угол $\angle AEB$ общий, $\triangle ABE \sim \triangle BDE \Rightarrow \angle BAE = \angle CBE \Rightarrow$

$\Rightarrow \breve{CE} = \breve{EB} \Rightarrow \angle BAE = \angle EAC \Rightarrow$

$\Rightarrow AD$ - бисса угла $\angle BAC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{3}{1} \Rightarrow AB = 3AC$

$AB$ диаметр $\Rightarrow \angle ACB = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + 16 = 9AC^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AC^2 = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}$, $AB = 2R = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Также заметим, что $\triangle ATD \sim \triangle ADC \Rightarrow$

$\Rightarrow AT \cdot AC = AD^2 = 1 + 2 = 3 =$

$= AT \cdot \sqrt{2} \Rightarrow AT = 2r = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

Осталось найти $S_{ABEC}$

Заметим, что $S_{ABEC} = S_{\triangle ACB} + S_{\triangle BEC}$.

Ясно, что $S_{\triangle ACB} = AC \cdot BC \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{2}$

Опустим на BC высоту EH.

Ясно, что $\triangle ACD \sim \triangle BHE \sim \triangle CHE \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{EH}{BH} = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{EH}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow EH = \sqrt{2}$

$S_{\triangle BEC} = BC \cdot EH \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{2}$

$S_{ABEC} = S_{\triangle ACB} + S_{\triangle BEC} = 4\sqrt{2}$

Ответ: $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$S_{ABEC} = 4\sqrt{2}$

№7 Также заметим, что $f(x) \in \mathbb{N}$ при $x \in \mathbb{N}$, т.к. если $x = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots p_k$, где $p_i$ – простое число,

$f(x) = f(p_1) + f(p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \ldots p_k) =$
$= f(p_1) + f(p_2) + f(p_3 \cdot p_4 \ldots p_k) =$
$= f(p_1) + f(p_2) + \ldots + f(p_{k-1}) + f(p_k)$,
а, как мы знаем, $f(p_i) \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x) \in \mathbb{N}$

Заметим, что $f(x) = f(x) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

Также $f(1) = f(y) + f(\frac{1}{y})$

Отсюда $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) + f(1) - f(y) = f(x) - f(y)$.

То есть ~~...~~ для ~~...~~ любой неупорядоченной пары чисел $(x, y)$, где $x \neq y$ иначе $f(\frac{x}{y}) = f(1) = 0$, ~~...~~ ~~$f(\frac{y}{x}) < 0$~~ ~~...~~ ~~...~~ ровно одно из чисел $f(\frac{x}{y})$ и $f(\frac{y}{x})$ меньше 0.

То есть нам просто нужно посчитать число различных пар ~~...~~ чисел $x$ и $y$, это и будет наш ответ (т.к. каждой паре мы сопоставим 1 функцию). Число таких пар будет $20 + 19 + 18 + 17 \ldots + 1 = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210$ (для числа 1 будет 20 пар, для числа 2 – 19 и т.д.).

Ответ: 210 пар

№3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ ② $y^2 + 4x^2 - 4xy = xy - 2x - y + 2 \Rightarrow y^2 + 4x^2 - 5xy + 2x + y - 2 = 0$

~~вычтем~~

~~$2y^2 + 6x^2 - 4xy - 4x - 4y + 3 = xy - 2x - y + 2$~~

~~$2y^2 + 6x^2 - 5xy - 2x - 3y + 3 - 2 = 0$~~

~~$2y^2 + 6x^2 - 2xy - 2x - 3xy - 3y = -1$~~

~~$3y(y - x - 1) - y^2$~~

① $4x^2 + 2y^2 - 8x - 8y + 6 = 0$

Вычтем ② из ①:

$4x^2 + 2y^2 - 8x - 8y + 6 - y^2 - 4x^2 + 5xy - 2x - y + 2 = y^2 - 10x - 9y + 5xy + 8$

$y =$ ~~...~~ ~~...~~ $\frac{9 - 5x \pm \sqrt{25x^2 + 49 - 50x}}{2} = \frac{9 - 5x \pm \sqrt{(5x-5)^2 - 24}}{2}$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$ax^2+2bx+c=0$

$b=at$

$c=at^2$

подставим

$$x=\frac{-2b\pm\sqrt{4b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}=$$

$$=\frac{-at\pm\sqrt{a^2t^2-a^2t^2}}{a}$$

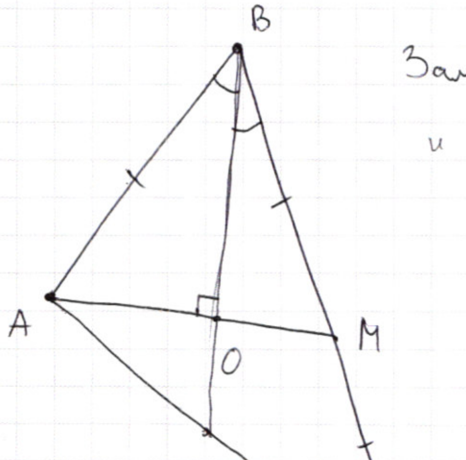
$=-t\Rightarrow$

$\Rightarrow d=at^3=-t\Rightarrow$

$\Rightarrow c=at^2=-1$

Ответ: $c=-1$

№2




Заметим, что $\triangle ABM$ является р/б, т.к. BO и бис-са, и ~~ав~~ высота $\Rightarrow AB=BM=\frac{1}{2}BC$

Пусть $AB=x$, тогда $BC=2x$, $AC=1200-3x$

По н-ву $\triangle$-ка: $\begin{cases}1200-3x<3x\\2x<1200-x\\x<1200-x\end{cases}$

$\Downarrow$

$200<x<300$, $\Leftarrow$ $\begin{cases}x>200\\x<300\\x<600\end{cases}$

то есть x принимает 99 целочисленных значений от 201 до 299 включительно.

Причем никакие 2 Δ-ка с разной стороной $x$ не будут равны.

разберём, почему.

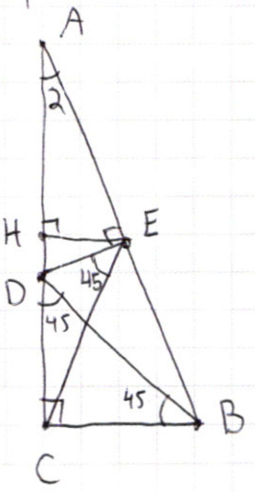
Пусть есть какой-то Δ-ник со сторонами $x_1$, $2x_1$ и $1100-3x_1$, а Δ-к $x_2$, $2x_2$ и $1200-3x_2$.

Пусть $x_1 = 2x_2$. Тогда $2x_1 = 1200-3x_2$, т.к. ясно, что $2x_1 \neq x_2$.

То есть $4x_2 = 1200-3x_2$, $7x_2 = 1200$, $x_2 = \frac{1200}{7}$, однако $x_2 \in \mathbb{Z}$, противоречие. Если же $x_1 = 1200-3x_2$, то $2x_1 = 2x_2$, т.к. $2x_1 > x_1$, а $1200-3x_2 > x_2$, т.к. $x < 300 < 400$. Однако тогда $x_1 = x_2$, то есть ~~это один и тот~~ сторона $x$ у этих треугольников равна, и мы разбираем один и тот же случай.

Отсюда получаем ответ: 29 треугольников.

№ 4




а) заметим, что $BEDC$ вписан $\Rightarrow \angle DEC = \angle CBD = 45°$

Отсюда $\triangle DCB$ – р/б прямоугольный Δ-ник $\Rightarrow$

$= BC = CD = \frac{2}{5}AC \Rightarrow tg\, 2 = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{5}$

б) $AC = \sqrt{29}$

Опустим высоту $EH$

Заметим, что $S(\triangle CDE) = EH \cdot CD \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{\sqrt{29}} \cdot \frac{2\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{5}$

Найдем $EH$: $\frac{EH}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{3 \cdot 5}{29} = \frac{15}{29}$

$\Downarrow$

$EH = BC \cdot \frac{15}{29} = \frac{2\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{15}{29} = \frac{6}{\sqrt{29}}$

Найдём $AB$:

$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{29 + \frac{4 \cdot 29}{25}} = \frac{29}{5}$

Найдем $AE$:

$\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB}$ (из явного подобия $\triangle ADE$ и $\triangle ABC$)

$AE = \frac{AD \cdot AC}{AB} = \frac{\frac{3\sqrt{29}}{5} \cdot \sqrt{29}}{\frac{29}{5}} = 3$

Ответ: $S_{\triangle CDE} = \frac{6}{5}$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2+4x^2-5xy+2x+y-2=0 \\ 2y^2+4x^2-\cancel{8x}-8y+6=0 \end{cases}$$

$y^2+5xy-10x-9\cancel{y}+8=0$

$x(4x-y+2)$

$y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2$

$y^2-4xy+y=y(y-4x+1)$

$y^2+4x^2-5xy=2-2x-y$

$\cancel{4x}\ 2x^2+4x+4y-3-5xy=2-2x-y$

$2x^2\ \cancel{+4x+y}\ \cancel{4y}-5xy=5-6x-5y$

$2x^2+6x+(5y-5)=0$

$\cancel{x=\dfrac{-6\pm\sqrt{36-8\,40y}}{}}$

$2x^2+\cancel{6x}+x(6-5y)+$

$+(5y-5)$

$x=\dfrac{5y-6\pm\sqrt{36+25y^2-60y-40y+40}}{4}=$

$x^2+y^2-3x-3y-x-y+3+x^2$

$=\sqrt{76+25y^2-100y}-$

$y^2+y(5x-9)+(8-10x)=0$

$=\sqrt{(10-5y)^2-24}$

$\sqrt{2-2-2+2=0}$

$y=\dfrac{9-5x\pm\sqrt{25x^2+81-90x-32+40x}}{2}=$

$2+4-4-8+3$

$5y-6=9-5x$

$=\dfrac{9-5x\pm\sqrt{25x^2+49-50x}}{2}=$

$x+y=3$

$=\dfrac{9-5x\pm\sqrt{(5x-5)^2-24}}{2}$

$x=1\quad y=2$

$2x=y\quad \sqrt{\cancel{2}}$

$2x^2-2x-2x+2$

$x^2-2x+1\quad \sqrt{\phantom{x}}=x-1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$ax^2+2bx+c=0$

корни $-\ \dfrac{-2b\pm\sqrt{4b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$

$a=a,\ b=at,\ c=at^2,$ $\dfrac{-at\pm\sqrt{a^2t^2-a^2t^2}}{a}=-t$

~~120~~ 240

$2<\ <4$ 240 480

$at^3=-t$

299 598 303 480

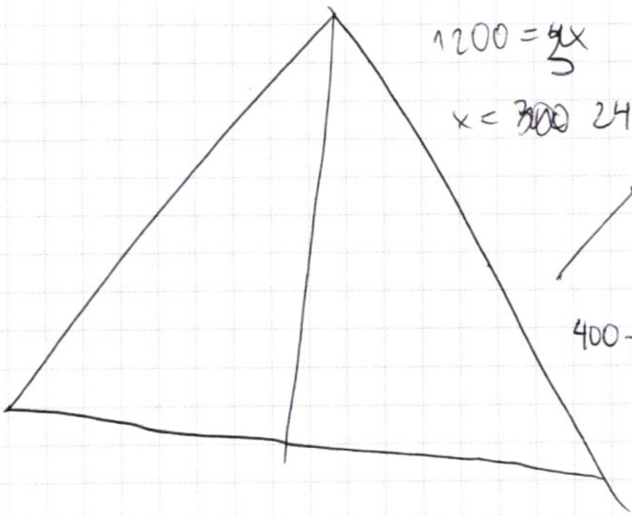
$c=at^2=-1$

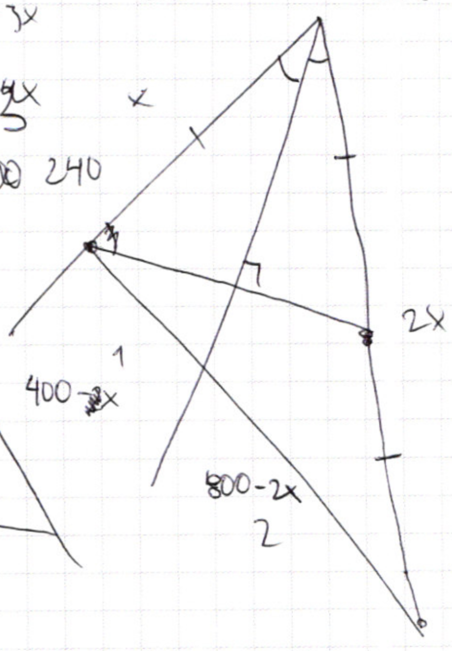
298 596 306

$2x=1200-3x$

$1200=5x$

$x=\cancel{300}\ 240$






$200<x<300$

ответ: 99

$1200-x>x$

$600>x$

$x$ $2x$ $1200-3x$

$3x>1200-3x$

401 201 402

$6x>1200$

$600-x>x$

$x>200$

$1200-2x>2x$ $300>x$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$y^2+4x^2-4xy = xy-2x-y+2$

$2y^2+6x^2-4xy-4x-4y+3 = xy-2x-y+2$

$2y^2+6x^2-4xy+3 = xy+2x+3y+2$

$3y^2-3y-3xy+3 = \cancel{6x^2}\ 2xy+2x+2-6x^2$

$3y(y-1-x) \overset{+3}{=} 2x(y+1-\cancel{3x})-4x^2-1$

$(3y-2x)(y-x-1)$ A

$3x-y-1$

$2x(2y-3$

$(2x-3y)(y-x-1) = 4x^2+1$

$3y(y-x-1)$

$y(2y-x-3)$

$y>2x$

$y^2+4x^2-5xy+2x+y-2=0$

$6x^2+3y^2-12x-12y+9=0$

6 3

~~$2x^2+2y^2+8xy-14x-13y+11=0$~~

$\cancel{4x}$ $8x^2+2y^2-10xy+4x+2y-4=0$

$3y^2+12x^2-15xy+6x+3y-6=0$

$y$ $4x$

$\cancel{3y}$ $\cancel{12x}$

$\cancel{4x}$ $2y^2+4x^2-8x-8y+6=0$

$y$ $2x$

$4y$ $\cancel{8x}$

$5y^2+16x^2-15xy-2x-5y=0$

$\cancel{y}$ $\cancel{3x}$

$5y(5y-5x-1)+2x(5y-x-1)$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(1) =$

$f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ $f\left(\frac{x}{y}\right) = -f\left(\frac{y}{x}\right)$

$x = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_K$

$f(x) = f(p_1) + f(p_2 \cdot p_3 \dots p_k) = f(p_1) +$

$f(4)$

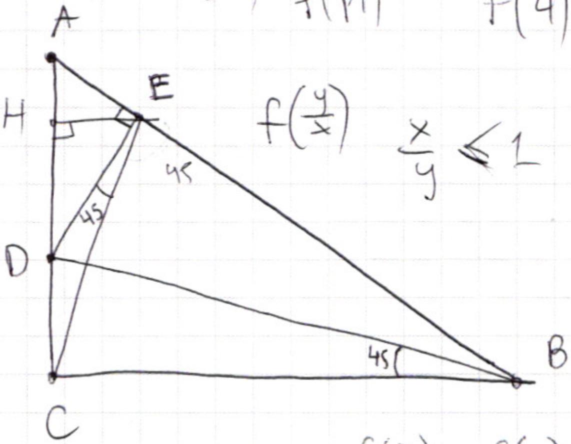
$f(x) = f(p_1) + f(p_2) + f(p_3) \dots + f(p_k)$

$f(2) = 2$

$f(2x) = f(x) + 1$

$f(1) = 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$



$f\left(\frac{y}{x}\right)$ $\frac{x}{y} \leqslant 1$

$\frac{BC}{AC} = ? = \frac{ED}{AE} =$

$BC = CD = \frac{2}{5} AC$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) + f(1) - f(y) = f(x) - f(y)$

$\frac{BC}{AC} = \frac{2}{5}$

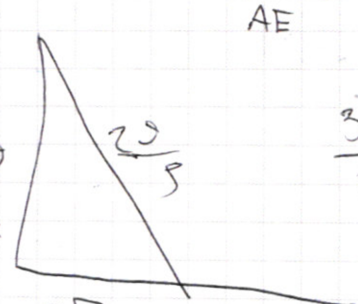
$EH = \frac{15}{29} \cdot \frac{2\sqrt{29}}{5} = \frac{6}{\sqrt{29}}$

$CD \cdot EH \cdot \frac{1}{2}$

$BC = \frac{2\sqrt{29}}{5}$

$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$

$\frac{EH}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{3 \cdot 5}{29} = \frac{15}{29}$



$\frac{3\sqrt{29}}{5x} = \frac{\frac{29}{5}}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{29}}{5}$

$EH \cdot CD \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{\sqrt{29}} \cdot \frac{2\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{5} =$

$\sqrt{29 + \frac{4 \cdot 29}{25}} = \frac{29}{5}$

$1\frac{1}{5}$

$\frac{2\sqrt{29}}{5}$

$x = 3$

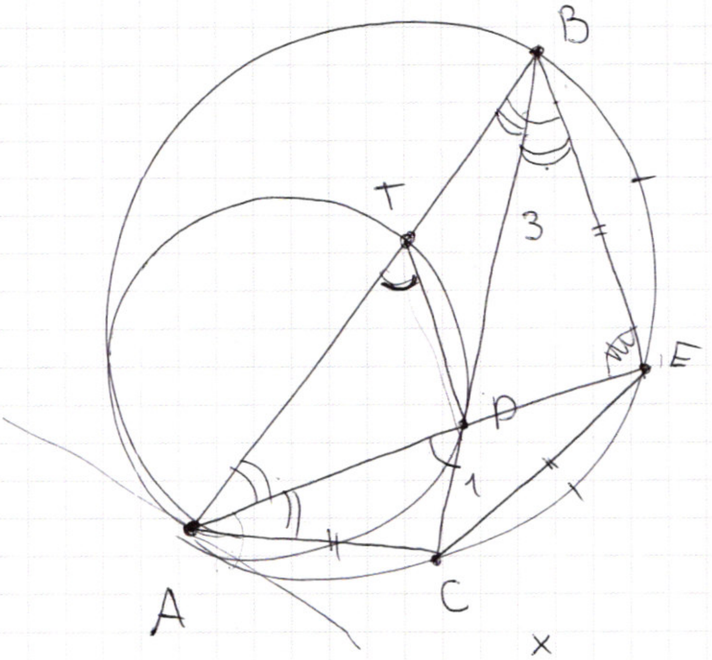
$AD = \frac{3\sqrt{29}}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)




$BT \cdot (BT + 2r) = 9$

$\parallel$

$2R$

$AC = 3x$

$3x^2 + x \cdot 2R = 4AE$

$\frac{AE}{x} = \cancel{\frac{3x+2R}{4}} = \cancel{\frac{AD}{\ }} = \frac{AP}{DT}$

$\frac{x}{x+y} =$

$BE = \frac{TD \cdot (x+y)}{x}$

$xy = 3$

$TD = \frac{BE \cdot x}{(x+y)}$

$x^2 + 9 =$

$9x^2$

$x(x+y) = BE$ $\quad x^2 = \frac{BE \cdot x}{(x+y)}$

$AB = 3AC$

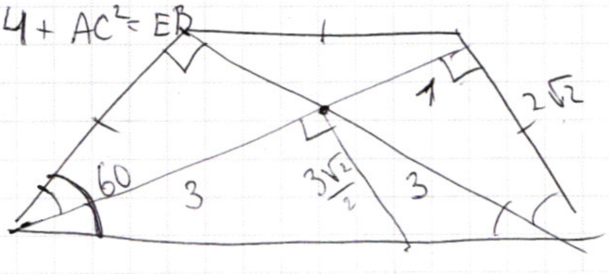
$x^2 + 3 = BE$

$4(x+y) = 4AC + AC^3 +$

$+ 12AC + 3AC^3$

$4 + AC^2 = EB$

$\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$




$R = \sqrt{6}$

1 2
1 3
1 4
2 3
2 4 1 2 3 4
3 4

$\sqrt{8+16} = \sqrt{24} =$

$b \cdot x(2a+b) \cdot \frac{1}{2}$

$a^2x$

$(a+b)^2x - a^2x$

$a(b^2 - 2ab)x \cdot \frac{1}{2}$