МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

пусть d - четвёртый член арифм. прогрессии
тогда первые четыре члена - a, b, c, d
и по признаку геом прогрессии

$b^2 = ac$ и также $ad^2 - 2bd + c = 0$
$c^2 = bd$

$$\begin{cases} b^2 = ac \Rightarrow a = \frac{b^2}{c} \\ c^2 = bd \\ ad^2 - 2bd + c = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{b^2 d^2}{c} - 2c^2 + c = 0$$

$$\frac{c^4}{c} - 2c^2 + c = 0$$

$$c^3 - 2c^2 + c = 0$$

$$c(c-1)^2 = 0 \Rightarrow c = \left[\begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array}\right.$$

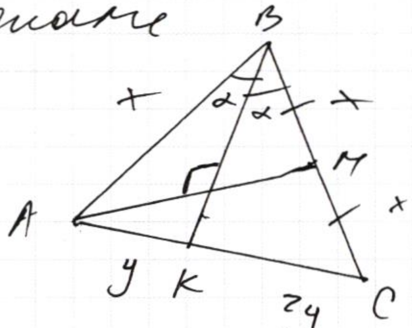
$c \neq 0$
т.к. $a, b \neq 0$

$c = 1$

$\boxed{\text{Ответ: } 1}$

№2

Рассмотрим треугольник ABC, у которого одна из биссектрис ⊥ медиане



пусть M, K пересечение медианы и биссектрисы со сторонами BC и AC

пусть AB = x

тогда △ABM р/б т.к BK биссектриса и высота в нем т.е

$BM = AB = x \Rightarrow BC = 2x$; Пусть $AK = y$, тогда по св-ву биссектрисы $KC = 2y$

тогда

$3x + 3y = 900 \Rightarrow x + y = 300$, заметим, что все возможные пары $(x; y)$ задают искомые нам треугольники

запишем неравенство треугольника:

$AB + BC > AC$ т.е $3x > 3y$, $x > y$

$AC + AB > BC$ т.е $3y + x > 2x$, $3y > x$

тогда

$$\begin{cases} x + y = 300 & (1) \\ x > y & (2) \\ 3y > x & (3) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Rightarrow x > 150$

$(1) + (3) \Rightarrow y > 75$

т.к $x + y = 300$ то

$150 < x < 225$

$75 < y < 150$

$$\begin{cases} 151 \le x \le 224 \\ 76 \le y \le 144 \end{cases}$$

каждому „x" соотв. ровно 1 „y"

всего 74 ~~пары~~ числа в промежутках $[151; 224]$ и $[76; 144]$

значит всего 74 пары => т.е 74 треугольника

$\boxed{\text{Ответ: } 74}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№3}$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x-6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y^2-2y+1)-18=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$

пусть $x-6=a$
$y-1=b$

тогда

$x-6y=a-6b$

получаем систему:

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \quad \begin{cases} (a-6b)^2=ab \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$$

выйдем из системы и решим

$(a-6b)^2=ab$ относ $\frac{a}{b}$

$a^2-12ab+36b^2=ab$; $a^2-13ab+36b^2=0 \,\Big|\, :b^2$, $b\neq 0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\frac{a}{b}+36=0$; пусть $\frac{a}{b}=t$

тогда

$t^2-13t+36=0$

$D=169-36\cdot 4=25$

$t_{1,2}=\frac{13\pm 5}{2}=9;4$

т.е. $\left[\begin{array}{l} a=9b \\ a=4b \end{array}\right.$

вернёмся в систему:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 9b \\ a = 4b \end{array}\right. \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$$

I) $a = 9b$

$81b^2 + 2b^2 = 18 \Rightarrow 83b^2 = 18$

$b^2 = \frac{18}{83}$

$\Downarrow$

$a = \pm\sqrt{\frac{18}{83}} \cdot 9$; $b = \pm\sqrt{\frac{18}{83}}$

если $(a; b) = \left(-9\sqrt{\frac{18}{83}}; -\sqrt{\frac{18}{83}}\right)$ то

$x - 6y = a - 6b < 0$, что невозможно

т.к $\sqrt{(x-6)(y-1)} \geq 0$

если $(a; b) = \left(9\sqrt{\frac{18}{83}}; \sqrt{\frac{18}{83}}\right)$ то система выполняется

II) $a = 4b \Rightarrow a^2 = 16b^2$

$18b^2 = 18 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$; $a = \pm 4$

если $a = 4$ $b = 1$ то $x - 6y = a - 6b < 0$

если $a = -4$; $b = -1$ система выполняется

т.е $(x; y) = \left(9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6; \sqrt{\frac{18}{83}} + 1\right)$

$(x; y) = (2; 0)$

$\begin{cases} x = a + 6 \\ y = b + 1 \end{cases}$

подставим a и b получим.

Ответ: $(x; y) = \left(9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6; \sqrt{\frac{18}{83}} + 1\right)$

$(x; y) = (2; 0)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\triangle DCK \sim \triangle DEA$

$\frac{DC}{DE} = \frac{CK}{EA} = \frac{DK}{DA}$

$\frac{a\cancel{x}}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot DK = 3x^{\cancel{2}}$

$DK = \frac{\sqrt{x^2+a^2} \cdot 3\cancel{x}}{a}$

$\frac{3x}{DE} = \frac{CK}{AE} = \frac{DK}{x}$

$\frac{BE}{EA} = 3 \cdot \frac{KB}{KC}$

$3x^2 = DK \cdot DE$ $\quad DK^2 = \frac{9x^2(x^2+a^2)}{a^2}$

$\frac{BA}{AE} = 3\frac{KB}{KC} + 1$

$\frac{BE}{EA} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{KC}{KB} = 1$

$\frac{4x^2}{AE^2} = \frac{3KB}{KC} + 1$

$\frac{BE}{EA} = \frac{KB}{KC} \cdot 3 = \frac{KC+CB}{KC} \cdot 3$

$3 \quad KC + 3CB + KC$

$\frac{BE}{EA} = 3 + 3\frac{CB}{KC}$ $\quad \frac{4x^2}{AE^2} = \frac{4KC+3CB}{KC}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{1}{2}\cdot 4x\cdot 4a = \frac{1}{2}\,3x\cdot 4a + \frac{1}{2}\,DE\cdot 4\sqrt{x^2+a^2}$$

$$16ax = 12ax + DE\cdot 4\sqrt{x^2+a^2}$$

$6\cdot 27 = 6\cdot 3\cdot 9 \quad 43+21 =$

$$4ax = \quad \frac{64}{43} \quad \frac{ax}{\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$$

$$ax = DE\sqrt{x^2+a^2} \qquad x = a+6$$

$$DE = \frac{ax}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad y = 6+1 \qquad \frac{a}{x}$$

$$(x^2+a^2)x^2 +$$

$$\frac{27+43\cdot 9+27\cdot 6}{43}$$

$$x = 9\sqrt{\frac{13}{83}}+6$$

$$x^2 = AE^2 + \frac{a^2x^2}{x^2+a^2} \qquad \frac{a}{x}$$

$$\frac{27\cdot 7+43\cdot 9}{43} = \qquad y = \frac{13}{83} \qquad A:$$

$$x^4 + \cancel{x^2a^2} = AE^2(x^2+a^2) + \cancel{a^2x^2}$$

$$3^2\,\frac{(21+43)}{43}$$

$$AE = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\cancel{(x^2+a^2)x^2 = AE}$$

$$\frac{43^2}{34\ 4}$$

$$x^4 = AE^2(x^2+a^2)$$

$$(AE+EB)AE = 4x^2 \qquad AE^2 + EB\cdot AE = 4x^2 \qquad AE^2 = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

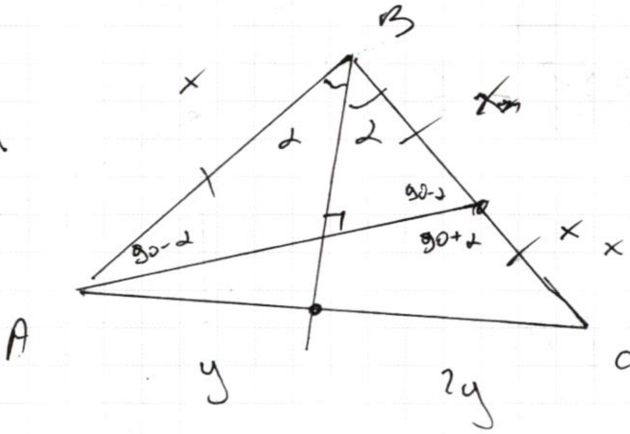
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: 74

$P = a + b + c = 900$

$224 \geq x \geq 151$

$149 \geq y \geq 76$



$x \in [151; 224]$

$y \in [76; 149]$

$225 > x > 150$

$75 < y < 150$

$x + y = 300$ 1

$x > y$ 2

$3y > x$ 3

$x + 3y > 0$ 4

$2x + y > 300 + y$

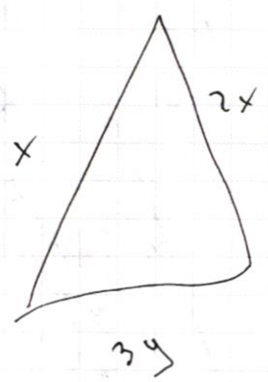
$x + y = 300$

$3x + 3y = 900$

$\boxed{x > 150}$

$x + y = 300$

$4y + \cancel{x} > 300 + \cancel{x}$



$y < 150$

$x > y$

$3y > x$

$x + 3y > 0$

$3x > 3y$

$3y + x > 2x$

$2x + 3y > x$

$x + y = 300$

$x + y$

$x > 150$

$y > 75$

$y > 75$

$$\begin{array}{r} - \; 224 \\ 150 \\ \hline 74 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - \; 149 \\ 75 \\ \hline 74 \end{array}$$

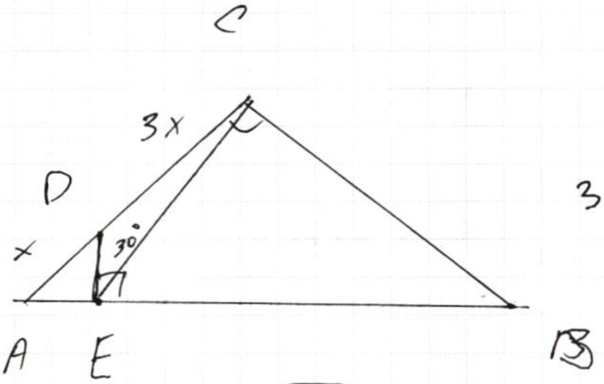
☑ черновик ☐ чистовик

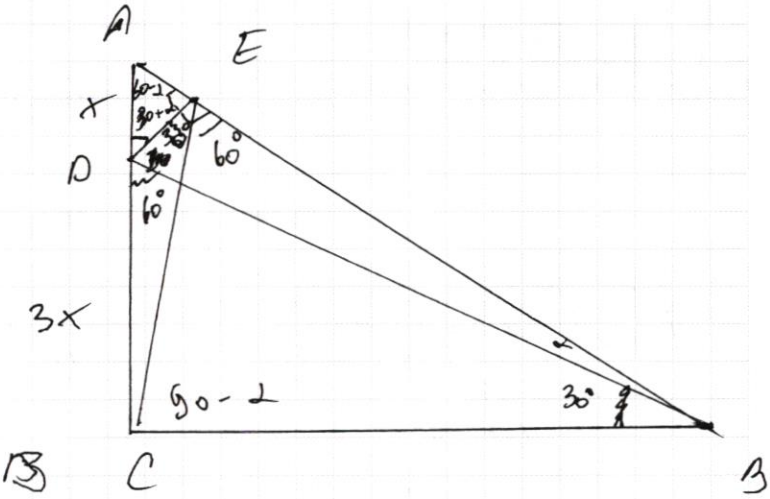
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

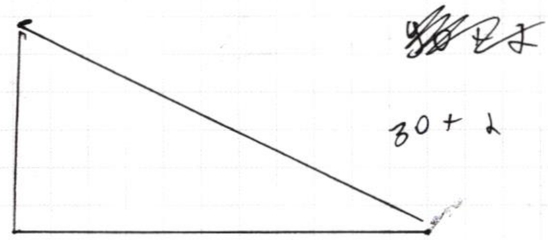
(Нумеровать только чистовики)

$x - 6y = 3\sqrt{\frac{18}{83}}$





$x = \frac{9\sqrt{18}}{\sqrt{83}} - 6$



$30 + \alpha$

$\triangle CAB \sim \triangle EAD$

$\frac{CA}{EA} = \frac{AB}{AD} = \frac{CB}{ED}$

Найти:

$tg\angle BAC =$

$\frac{4x}{AE} = \frac{AB}{x} = \frac{CB}{ED}$

$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{a}{x}$

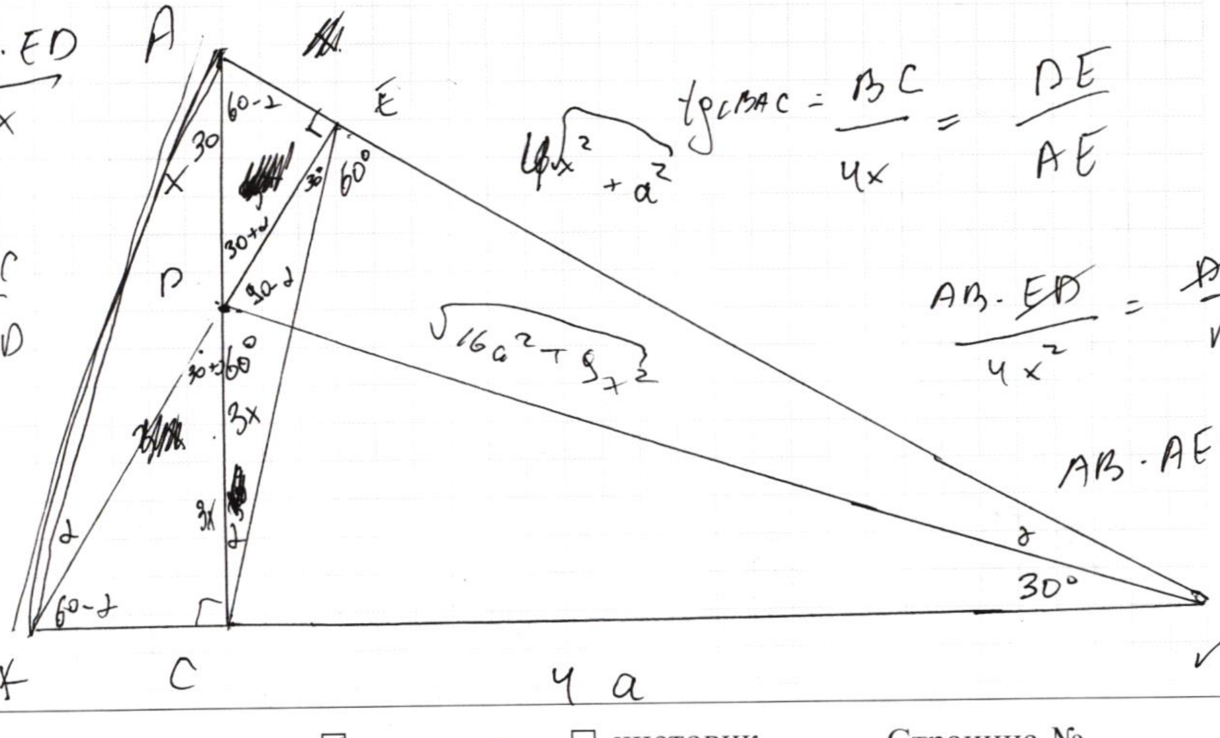
$BC = \frac{AB \cdot ED}{x}$

$\frac{4x}{AE} = \frac{BC}{ED}$

$tg\angle BAC = \frac{BC}{4x} = \frac{DE}{AE}$

$\frac{AB \cdot ED}{4x^2} = \frac{DE}{AE}$

$AB \cdot AE = 4x^2$



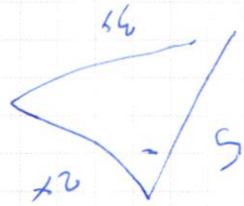
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

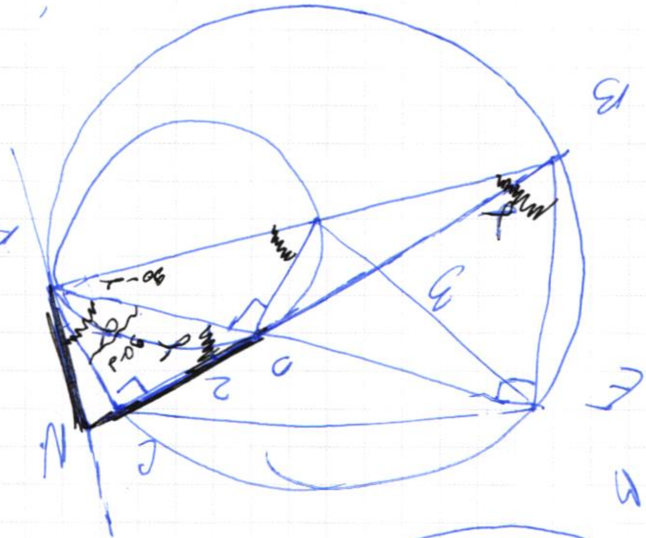
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

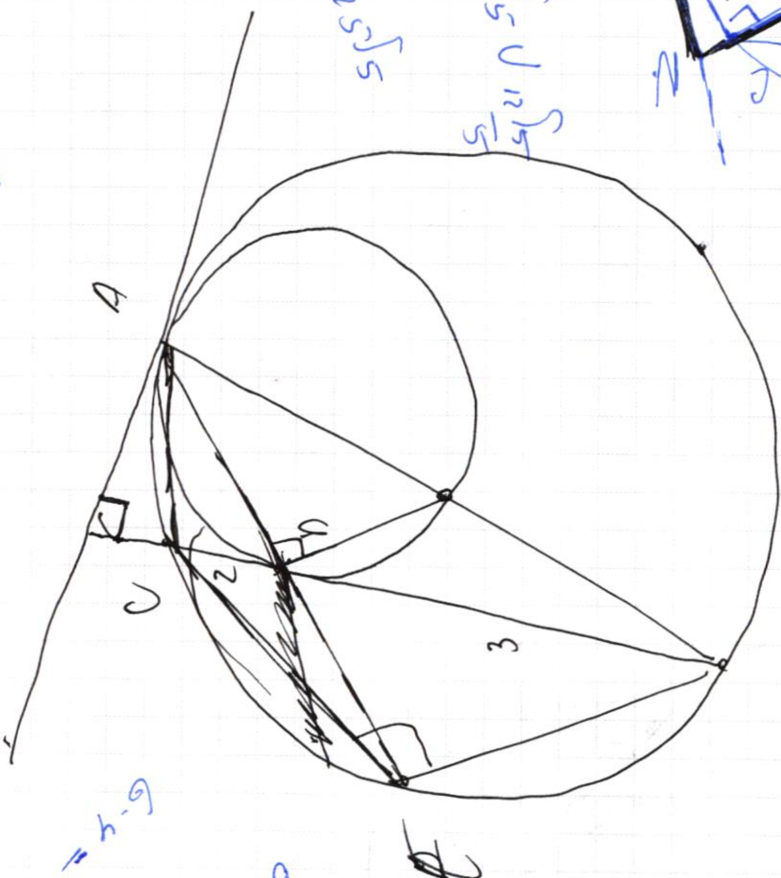
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

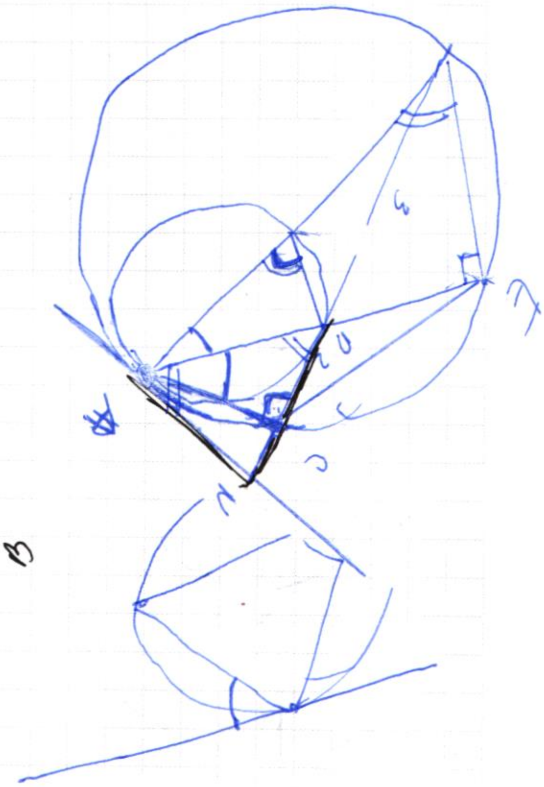
№3

Ответ: 74 треугольника

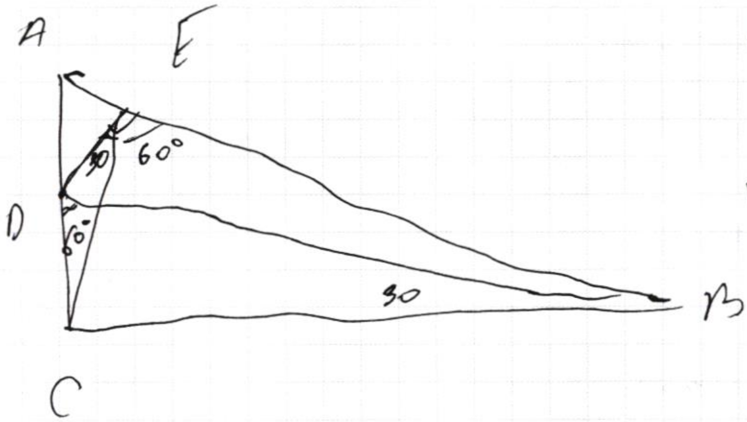


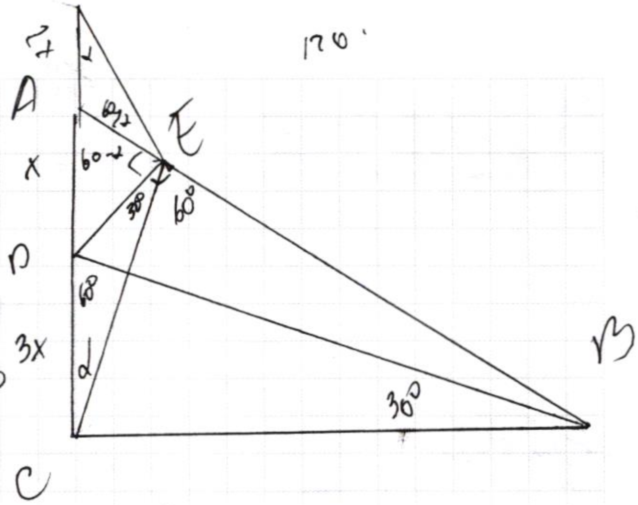


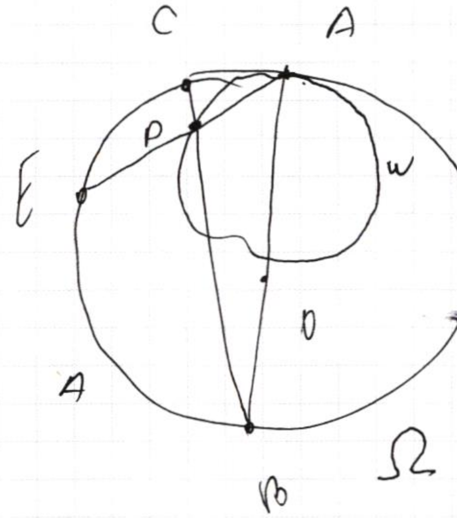


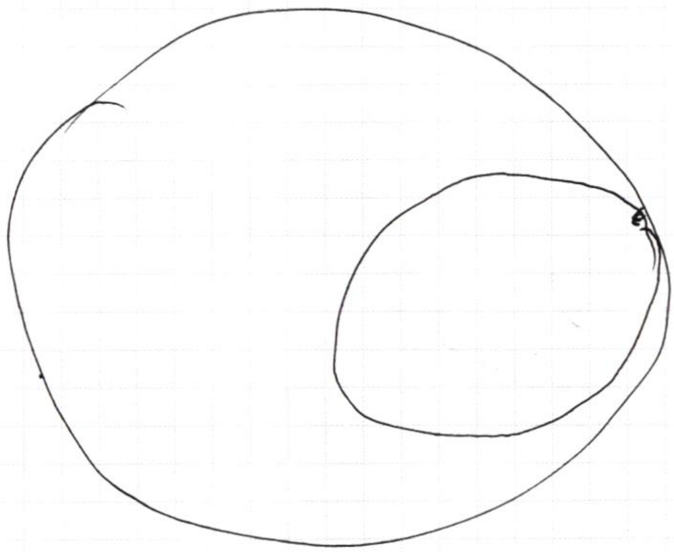


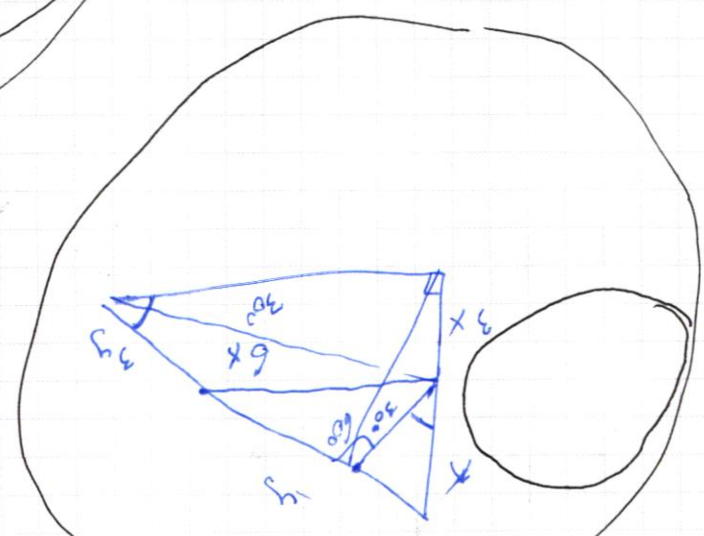
120.


A
E
D
C
B
60°
60°
30
30

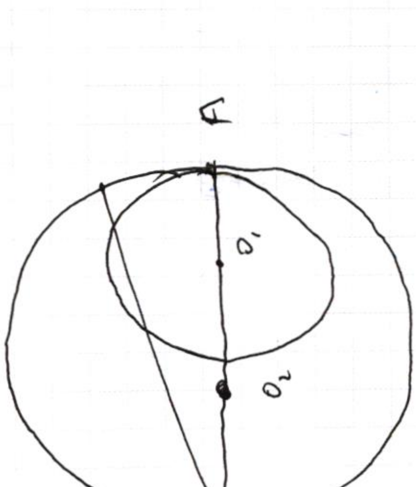

A
E
D
C
B
x
3x
60°
30°
30°

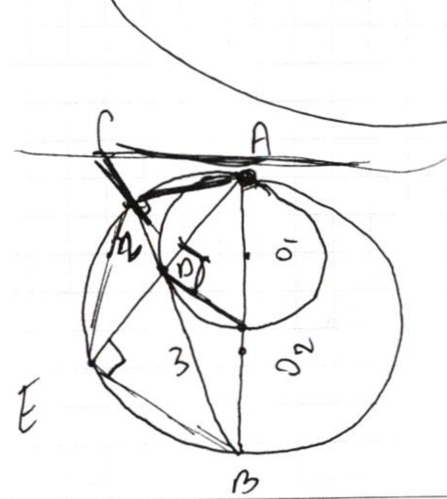

C
A
P
E
w
O
A
B
Ω




6x
3x
30°
60°
30°

$36x^2$


A
O_1
O_2
B


C
A
N
D
O_1
O_2
3
E
B

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

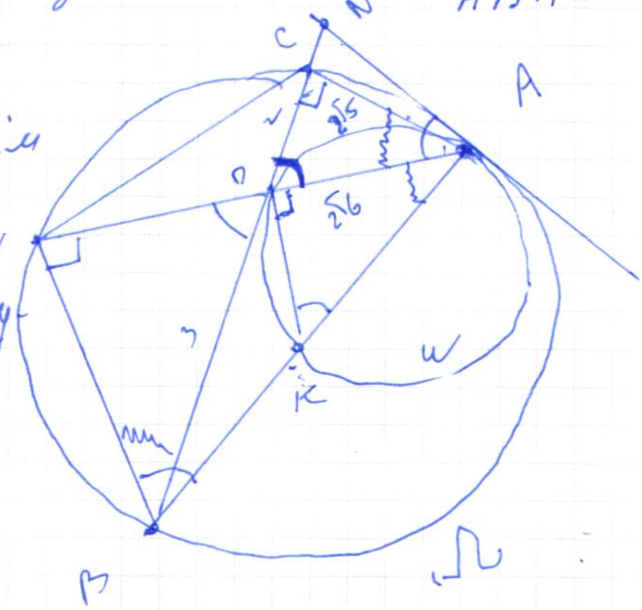
№5

Решение:

Дано:
$\Omega \cap \omega = A$
AB - диаметр Ω
BC - хорда Ω
$BC \cap \omega = D$
$AD \cap \Omega = E$
$BD = 3$
$CD = 2$
Найти:
$R(\Omega)$
$R(\omega)$
S_{BACE}

пусть радиус Ω - R, пусть радиус ω - r $AB \cap \omega = K$; O

Д.п. проведём общую касательную ℓ через т. A
пусть $\ell \cap BC = N$



тогда по теореме об угле между хордой и касательной $\angle NAD = \angle DKA$
и т.к $DN = NA$ как отрезки касательных к ω то $\triangle DNA$ - р/б $\Rightarrow \angle NDA = \angle NAD \Rightarrow \angle DKA = \angle NDA$
т.к AB содержит диаметр ω и является диаметром (иначе т. A не точка касания)
$\Omega \Rightarrow \angle BEA = \angle KDA = 90°$ т.к опирается на диаметр, тогда $\triangle EBA \sim \triangle DKA$ по двум углам ($\angle BEA = \angle KDA$; $\angle A$ - общий) $\Rightarrow \angle EBA = \angle DKA$

$\triangle EBA \sim \triangle CDA$ по 2ум углам $\angle BEA = \angle BCA$

$\Downarrow$ т.к $BECA$ вписан

и эти углы опираются на $\cup AB$

$\angle CAD = \angle BAD$

$\Downarrow$

AD - биссектриса $\angle CAB$

$\angle EBA = \angle CDA$

по св-ву биссектрисы

$\frac{AC}{AB} = \frac{2}{3}$; пусть $AC = 2x$ тогда $AB = 3x$

по Т. Пифагора в $\triangle CAB$ $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$9x^2 = 4x^2 + 25 \Rightarrow$

$AB = 3x = 3\sqrt{5}$ $\Leftarrow$ $5x^2 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{5}$

$AC = 2\sqrt{5}$

$\triangle DCA \sim \triangle KDA$ по 2-ум углам

$\frac{DC}{KD} = \frac{AC}{DA} = \frac{AD}{AK}$; $AD^2 = AC \cdot AK$

$24 = 2\sqrt{5} \cdot AK \Rightarrow$

по Формуле биссектриса

$AD^2 = AC \cdot AB - BD \cdot DC = 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} - 2 \cdot 3 = 6 \cdot 5 - 6 = 24$

$\Rightarrow AK = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$

по св-ву пересек хорд $ED \cdot DA = DC \cdot BD$

$2\sqrt{6} \cdot ED = 6 \Rightarrow ED = \frac{\sqrt{6}}{2}$, тогда $EA = 2\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

$\sin \angle CDA = \frac{CA}{AD} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

$S_{ACE} = \frac{1}{2} \sin \angle CDA \cdot EA \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \cdot 5 \cdot \frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{3}{4} 5\sqrt{5} = \frac{15\sqrt{5}}{4}$

$\boxed{\text{Ответ: } S_{BACE} = \frac{15\sqrt{5}}{4} \quad R(\Omega) = \frac{3\sqrt{5}}{2} \quad R(\omega) = \frac{12\sqrt{5}}{10}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{BA}{AE} = 4 + 4\frac{a^2}{x^2} =$$

$$\frac{9x^2(x^2+a^2)}{a^2} = KC^2 + 9x^2$$

$$9x^2\left(\frac{x^2+a^2}{a^2} - 1\right) = KC^2 \qquad \frac{BA}{AE} = 4 + 4\frac{DE^2}{AE^2}$$

$$9x^2\frac{x^2}{a^2} = KC^2 \Rightarrow KC = \frac{3x^2}{a}$$

$$4\sqrt{x^2+a^2} \cdot \frac{4(DE^2+AE^2)}{AE^2}$$

$$\frac{\frac{3x}{DE} = \frac{3x^2}{a}}{AE} \qquad \frac{3x^2+4a^2}{3x^2} =$$

$$BA \cdot AE = 4x^2 \qquad \frac{4x^2}{AE^2} = \frac{BA}{AE}$$

$$\frac{3x^2}{a} + 4a = \frac{3x^2+4a^2}{a} = KB \qquad \frac{BE}{AE}$$

$$\frac{BE}{AE} = \frac{3x^2+4a^2}{x^2} \qquad \frac{BA}{AE} = 4\frac{x^2+a^2}{x^2}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

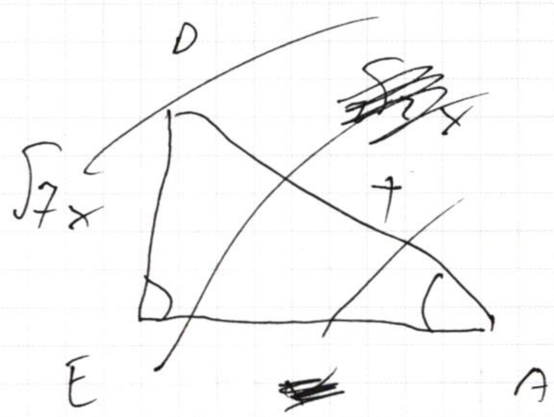
$\cancel{16a^2} + 9x^2 = DE^2 + 16x^2 + \cancel{16a^2}$

$\frac{3}{4}\frac{x^2(16a^2+9x^2)}{16(x^2+a^2)} + DE^2 = 7x^2$

$DE = \sqrt{7}x$

$16a^2+9x^2$

$\sin 120 = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x\cdot\sqrt{16a^2+9x^2} =$

$\frac{1}{2} \quad 4\sqrt{x^2+a^2} \cdot \quad \cdot DE$

$\frac{\sqrt{3}}{2} x \sqrt{16a^2+9x^2} = 4\sqrt{x^2+a^2}\cdot DE$

$\frac{3}{4}\cdot x^2(16a^2+9x^2) = 16(x^2+a^2)DE^2$

$\frac{3}{4}\frac{x^2(16a^2+9x^2)}{16(x^2+a^2)} = DE^2$

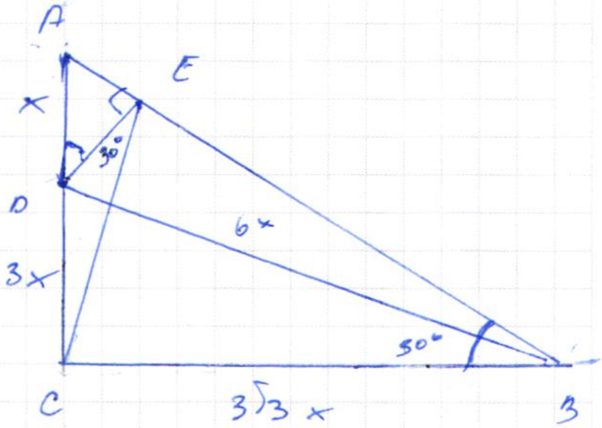
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Дано:
$\triangle ABC$ прямоуг
$\angle C = 90^\circ$
$D \in AC$
$AD : DC = 1:3$
$E \in AB$
$DE \perp AB$
$\angle CED = 30^\circ$
Найти:
а) $tg \angle BAC$
б) $S_{\triangle}(CED)$
если $AC = \sqrt{7}$

Решение:

пусть $AD = x$
тогда $DC = 3x$



$DEBC$ опис
по пр-к у
т.к $\angle DCB + \angle DEB = 180^\circ$
⇓
$\angle DEC = \angle DBC = 30^\circ$ по св-ву описанного четырёху.
тогда по св-ву угла в 30° $DB = 6x$
по Т. Пифагора в $\triangle DBC$
$CB^2 + DC^2 = DB^2$
$9x^2 + BC^2 = 36x^2 \Rightarrow BC^2 = 27x^2 \Rightarrow$
$BC = 3\sqrt{3}x$

тогда $tg \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{3\sqrt{3}x}{4x} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

т.к углы $\angle BAC$ и $\angle ADE$ в сумме дают 90°
$tg \angle BAC = ctg \angle ADE \Rightarrow tg \angle ADE = ctg \angle BAC = \frac{4}{3\sqrt{3}}$
исходя из основного триг. тождества

$tg^2 \angle ADE + 1 = \frac{1}{\cos^2 \angle ADE}$; $\frac{16}{27} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \angle ADE}$

$$\frac{43}{27} = \frac{1}{\cos^2 \angle ADE} \Rightarrow \cos\angle ADE = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}$$

т.к $\angle ADE < 90^\circ \Rightarrow \cos\angle CDE = -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}$

исходя из осн. триг тождества

$$\sin\angle BAC = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}} = \frac{DE}{x} \Rightarrow DE = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}} \cdot x$$

где $x = \frac{\sqrt{7}}{4}$

по Т. Косинусов для $\triangle DEC$

$$CE^2 = DE^2 + DC^2 - 2 \cdot DE \cdot DC \cdot \cos\angle CDE$$

$$CE^2 = \frac{27}{43}x^2 + 9x^2 - 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}} \cdot 3x^2 \cdot -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}} =$$

$$\frac{27x^2}{43} + 9x^2 + 6x^2 \cdot \frac{27}{43}$$

$$CE^2 = x^2\left(\frac{27}{43} + 9 + \frac{6 \cdot 27}{43}\right) = x^2\left(\frac{27 + 43 \cdot 9 + 6 \cdot 27}{43}\right) =$$

$$9x^2\left(\frac{3 + 43 + 18}{43}\right) = 9x^2 \cdot \frac{64}{43} \Rightarrow CE = \frac{24x}{\sqrt{43}}$$

$$S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2} \cdot \sin\angle DEC \cdot CE \cdot DE = \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \frac{\overset{6}{\cancel{24}}x}{\sqrt{43}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}x =$$

$$\frac{18\sqrt{3}}{43}x^2 = \frac{\overset{9}{\cancel{18}}\sqrt{3}}{43} \cdot \frac{7}{\cancel{16}_8} = \frac{63\sqrt{3}}{344}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } \operatorname{tg}\angle BAC = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad S_{\triangle CED} = \frac{63\sqrt{3}}{344}}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-6y=\sqrt{\cancel{x}y-6y-x+6}$

$x-6y$

$x-6$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$

$(x-6)^2+2y^2-4y-16=0$

$x^2-2\cdot 6x+3\cdot$

$(x-6)^2=x^2-12x+36$

$(x-6)^2-16+2y^2-4y=0$ $\quad (x-6)^2\cancel{+2}$

$(x-6)^2-2(y^2-2y+8)$

$2(y^2-2y+1)-18=0$

$\cancel{(x-6)^2}=$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$xy-6y-x+6$

$x(y-1)-6(y-1)$

$x-6y$

$\sqrt{(x-6)(y-1)}=x-6y$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\sqrt{(x-6)(y-1)} = x-6y$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$$

$x-6=a$

$y-1=b \Rightarrow 6y-6=6b$

$x-6y$

I) $a=9b$

II) $a=4b$

$a-6b$

$\sqrt{ab} = (a-6b)$ $\quad a = \pm 9\sqrt{\frac{18}{83}}$

$\frac{a}{b} = 9$

$a^2 + 2b^2 = 18$ $\quad b = \pm\sqrt{\frac{18}{83}}$

$\frac{a}{b} = 4$

$ab = a^2 - 12ab + 36b^2$

b^2

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$

$a^2 + 2b^2 = 18$

$\frac{a^2}{b^2} - 13\frac{a}{b} + 36 = 0$

$a-6b$

$t^2 - 13t + 36 = 0$

$D = 169 - 36 \cdot 4 =$

$169 - 144 = 25$

$x-6=0$

$y-1=0$

$3\sqrt{\frac{18}{83}}$

$t_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{2} =$

$9; 4$

$x=6$

$y=1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a, b, c, d

$ax^2 - 2bx + c$

$$\begin{cases} ac = b^2 \Rightarrow a = \frac{b^2}{c} \\ bd = c^2 \\ ad^2 - 2bd + c = 0 \end{cases}$$

$$\frac{b^2 d^2}{c} - 2c^2 + c = 0$$

$$\frac{c^4}{c} - 2c^2 + c = 0$$

$$c^3 - 2c^2 + c = 0$$

$$c(c^2 - 2c + c) = 0$$

$c = 1$

$a = b^2$

$bd = 1$

$ad^2 - 2bd + 1 = 0$

$a \quad b \quad c \quad d$

$mq \quad mq^2 \quad mq^3 \quad mq^4$

a

$mq = m^2q^4 \qquad a = b^2$

$mq^3 = 1$

$m^2q^6 = 1$

$mq(mq^4)^2 - 2mq^2 \cdot mq^4 + 1 = 0$

$m^3q^9 - 2m^2q^6 + 1 = 0$

$a \quad b \quad 1 \quad d$

$a \quad qa \quad 1$

$1 = aq^2$

$\cancel{a} \quad \cancel{aq} \quad aq^2 \quad aq^3$

$a \quad b \quad c \quad d$

$aq^2 = 1$

$a, b, c, d \quad ac = b^2$

$0 \quad 0 \quad 0$

$a, b, c, d \qquad a \quad aq \quad aq^2$

$(1)\ ac = b^2;\ (2)\ bd = c^2 \qquad a$

$ax^2 - 2bx + c = 0 \qquad ac = b^2$

$ad^2 - \underbrace{2bd}_{2c^2} + c = 0 \qquad bd = c^2 \qquad c = 1$

$ad^2 - 2c^2 + c = 0 \qquad \frac{b^2}{c}$

$$\begin{cases} a = b^2 \\ bd = 1 \\ ad^2 + 2bd + 1 = 0 \end{cases}$$

$\frac{b^2 d^2}{c} - 2c^2 + c = 0 \qquad a$

$c^3 - 2c^2 + c = 0 \qquad bd^2$

$c(c^2 - 2c + 1) = 0$

$c(c-1)^2 = 0$

$bd = -1$

$(bd)^2 + 2(bd) + 1 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)